二阶椭圆型偏微分方程

〔美〕D. 吉耳巴格　N.S. 塔丁格　著

叶其孝等　译

上海科学技术出版社

Elliptic Partial Differential

Equations of Second Order

David Gilbarg Neil S. Trudinger

Springer-Verlag, 1977.

二阶椭圆型偏微分方程

〔美〕D. 吉耳巴格 N. S. 塔丁格 著

叶其孝等 译

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 13 字数 339,000

1981 年 1 月第 1 版 1984 年 3 月第 2 次印刷

印数 5,501—9,800

书号：13119·879 定价：(科四) 1.45 元

目　　录

第一章　引论 ……………………………………………………1

第一部分　线性方程

第二章　Laplace 方程……………………………………………14
2.1. 平均值不等式……………………………………………14
2.2. 极大值和极小值原理……………………………………16
2.3. Harnack 不等式…………………………………………17
2.4. Green 表示………………………………………………18
2.5. Poisson 积分……………………………………………20
2.6. 收敛性定理……………………………………………22
2.7. 导数的内估计…………………………………………23
2.8. Dirichlet 问题；下调和函数方法……………………24
习题……………………………………………………………29
第三章　古典极大值原理……………………………………31
3.1. 弱极大值原理…………………………………………32
3.2. 强极大值原理…………………………………………34
3.3. 先验的界………………………………………………36
3.4. Poisson 方程的梯度估计……………………………38
3.5. Harnack 不等式………………………………………42
3.6. 散度形式的算子………………………………………46
评注……………………………………………………………48
习题……………………………………………………………49
第四章　Poisson 方程和 Newton 位势…………………52
4.1. Hölder 连续性…………………………………………52
4.2. Poisson 方程的 Dirichlet 问题………………………55
4.3. 二阶导数的 Hölder 估计……………………………57
4.4. 在边界上的估计………………………………………64

评注 ……68
习题 ……68
第五章 Banach 空间和 Hilbert 空间 ……70
5.1. 压缩映象原理 ……71
5.2. 连续性方法 ……71
5.3. Fredholm 二择一性质 ……72
5.4. 对偶空间和共轭 ……76
5.5. Hilbert 空间 ……77
5.6. 投影定理 ……78
5.7. Riesz 表示定理 ……79
5.8. Lax-Milgram 定理 ……80
5.9. Hilbert 空间中的 Fredholm 二择一性质 ……81
5.10. 弱紧性 ……82
评注 ……83
习题 ……83
第六章 古典解; Schauder 方法 ……84
6.1. Schauder 内估计 ……86
6.2. 边界估计和全局估计 ……91
6.3. Dirichlet 问题 ……97
6.4. 内部正则性和边界正则性 ……107
6.5. 另一种方法 ……111
6.6. 非一致椭圆型方程 ……115
6.7. 其它边界条件; 斜导数问题 ……120
6.8. 附录 1: 内插不等式 ……130
6.9. 附录 2: 延拓引理 ……136
评注 ……139
习题 ……142
第七章 Sobolev 空间 ……144
7.1. L^p 空间 ……145
7.2. 正则化和用光滑函数逼近 ……147
7.3. 弱导数 ……149
7.4. 链式法则 ……151
7.5. $W^{k,p}$ 空间 ……153
7.6. 稠密性定理 ……154

7.7. 嵌入定理 ……155
7.8. 位势估计和嵌入定理 ……158
7.9. Morrey 和 John-Nirenberg 估计 ……163
7.10. 紧性结果 ……165
7.11. 差商 ……167
评注 ……168
习题 ……169
第八章 广义解和正则性 ……171
8.1. 弱极大值原理 ……173
8.2. Dirichlet 问题的可解性 ……176
8.3. 弱解的可微性 ……178
8.4. 全局正则性 ……181
8.5. 弱解的全局有界性 ……183
8.6. 弱解的局部性质 ……189
8.7. 强极大值原理 ……193
8.8. Harnack 不等式 ……194
8.9. Hölder 连续性 ……195
8.10. 在边界处的局部估计 ……197
评注 ……202
习题 ……205

第二部分 拟线性方程

第九章 极大值原理和比较原理 ……208
9.1. 一个极大值原理 ……211
9.2. 比较原理 ……212
9.3. 一个进一步的极大值原理 ……213
9.4. 一个反例 ……214
9.5. 散度形式算子的比较原理 ……215
9.6. 散度形式算子的极大值原理 ……217
评注 ……223
习题 ……223
第十章 拓扑不动点定理及其应用 ……224
10.1. Schauder 不动点定理 ……224
10.2. Leray-Schauder 定理：一个特殊情形 ……225

10.3. 一个应用……227
10.4. Leray-Schauder 不动点定理……231
10.5. 变分问题……233
10.6. 附录：Brouwer 不动点定理……237
评注……241
第十一章 两个变量的方程……242
11.1. 拟保角映射……242
11.2. 线性方程梯度的 Hölder 估计……248
11.3. 一致椭圆型方程的 Dirichlet 问题……252
11.4. 非一致椭圆型方程……257
评注……264
习题……266
第十二章 梯度的 Hölder 估计……268
12.1. 散度形式的方程……268
12.2. 两个变量的方程……272
12.3. 一般形式的方程；内估计……273
12.4. 一般形式的方程；边界估计……277
12.5. 对 Dirichlet 问题的应用……280
评注……281
第十三章 边界梯度估计……282
13.1. 一般区域……284
13.2. 凸区域……286
13.3. 边界曲率条件……290
13.4. 非存在性结果……295
13.5. 连续性估计……301
评注……302
习题……303
第十四章 全局估计和梯度内估计……304
14.1. 梯度的极大值原理……304
14.2. 一般情形……307
14.3. 梯度的内估计……314
14.4. 散度形式的方程……318
14.5. 存在定理选讲……325
14.6. 连续边值的存在定理……329

评注 ……………………………………………………………330
习题 ……………………………………………………………331
第十五章　平均曲率型方程 ……………………………………333
15.1. $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的超曲面 …………………………………333
15.2. 梯度的内估计 ……………………………………………344
15.3. 在 Dirichlet 问题中的应用 ………………………………349
15.4. 两个自变量的方程 ………………………………………352
15.5. 拟保角映射 ………………………………………………355
15.6. 具有拟保角 Gauss 映射的图象 …………………………364
15.7. 对平均曲率型方程的应用 ………………………………371
15.8. 附录:椭圆参数泛函 ……………………………………375
评注 ……………………………………………………………378
习题 ……………………………………………………………380
附录:边界曲率和距离函数 ……………………………………382
参考书目 ………………………………………………………385
内容索引 ………………………………………………………396
记号索引 ………………………………………………………402

第一章

引 论

概要

本书的主要目的是系统展开二阶拟线性椭圆型方程的一般理论以及为此而需要的线性理论. 这就意味着我们将要处理边值问题(首先是 Dirichlet 问题)的可解性以及与线性方程

$$(1.1)\qquad Lu \equiv a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u = f(x),\quad i, j=1, 2, \cdots, n,$$

和拟线性方程

$$(1.2)\qquad Qu \equiv a^{ij}(x, u, Du)D_{ij}u + b(x, u, Du) = 0$$

的解有关的一般性质, 这里 $Du=(D_1u, \cdots, D_nu)$, 其中 $D_iu=\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $D_{ij}u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$, 等等, 而且求和约定是不讲自明的. 这些方程的椭圆性是通过下列事实来表明的, 即在各个变元的定义域中, 系数矩阵$[a^{ij}]$(在每种情形中)是正定的. 如果矩阵$[a^{ij}]$的最大特征值和最小特征值的比γ有界, 我们就把这个方程叫做一致椭圆型的. 我们将处理非一致和一致椭圆型方程.

线性椭圆型方程的古典原型当然是 Laplace 方程

$$\Delta u = \sum D_{ii}u = 0$$

及其相应的非齐次方程, Poisson 方程 $\Delta u=f$. 拟线性椭圆型方程最著名的例子可能就是在求最小面积问题中提出来的极小曲面方程

$$\sum D_i(D_iu/(1+|Du|^2)^{1/2}) = 0.$$

这个方程为非一致椭圆的, 因为 $\gamma=1+|Du|^2$. 这些例子中的微分算子的性质促进了本书中讨论的一般类型方程的许多理论.

有关的线性理论在第2—8章(以及第11章的一部分)中展开. 虽然这些材料有其独立的兴趣, 这里把重点还是放在应用到非线

1111778

性问题上去所需要的那些方面．因此这个理论强调关于系数的弱的假定，从而放过了许多有关线性椭圆型方程的重要的古典和近代结果．

因为我们最终感兴趣的是方程(1.2)的古典解，在某些方面所需要的是相当大一类线性方程的古典解的一个基础理论．这是由第 6 章的 Schauder 理论提供的，对于具有 Hölder 连续系数的(1.1)类方程来说，Schauder 理论是一个本质上完备的理论．对古典解而言这类方程具有确定的存在性和正则性理论，而对于系数只假定是连续的那些方程，相应的结果就不再成立了．

研究古典解的一个自然的出发点是 Laplace 方程和 Poisson 方程的理论．这是第 2 章和第 4 章的内容．为预示以后的发展，具有连续边值的调和函数的 Dirichlet 问题是通过下调和函数[*)]的 Perron 方法来解决的．在论证中强调极大值原理以及研究边界行为时的闸函数概念，在后面的章节中都容易推广到更一般的情形中去．在第 4 章中我们从 Newton 位势的分析中推得了 Poisson 方程的基本的 Hölder 估计．第 4 章的主要结果是说(见定理 4.6, 4.8)：$\mathbb{R}^n$ 的区域 Ω 中 Poisson 方程 $\Delta u=f$ 的所有 $C^2(\Omega)$ 解在任何子集 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 中满足一致估计

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}')}\leqslant C\left(\sup_{\Omega}|u|+\|f\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}\right), \tag{1.3}$$

其中 C 是一个只依赖于 $\alpha(0<\alpha<1)$，维数 n 及 $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ 的常数；(记号见 4.1 节)．对于取充分光滑边值的解，只要边界 $\partial\Omega$ 也充分光滑，就可以把这个内估计(因为 $\Omega'\subset\subset\Omega$，所以是内估计)延拓成为全局估计(global estimate)．在第 4 章中只对超平面和球面

[*)] 译者注：在本书中我们统一采用下述译名：

harmonic	调和
subharmonic	下调和
superharmonic	上调和
subsolution	下解
supersolution	上解
subfunction	下函数
superfunction	上函数

边界建立了直到边界的估计，但就以后的应用来说这些就够了.

线性二阶椭圆型方程古典解理论的最高峰是在 Schauder 理论中达到的，这个理论以修改过的而且发展了的形式在第 6 章中展开. 本质上说，这个理论是把位势理论的结果推广到具有 Hölder 连续系数的方程类(1.1)中去. 它是通过一个简单然而基本的方法来完成的，这个方法是：在单个点上固定首项系数的值，得到一个常系数方程，把原方程局部地看作是这个常系数方程的扰动. 基于上面提到的 Poisson 方程的估计进行仔细的计算就得出(1.1)的任何 $C^{2,\alpha}$ 解的同一不等式(1.3)，其中常数 C 现在还依赖于系数的界和 Hölder 常数，此外还依赖于系数矩阵$[a^{ij}]$在 Ω 中的最大和最小特征值. 这些结果被叙述为以加权内部范数表示的内估计(定理 6.2)，而在边界数据充分光滑的情形，则被叙述为以全局范数表示的全局估计(定理 6.6). 这里我们遇到了*先验估计*这个重要而又要经常用到的概念；也就是说，对一类问题的所有可能的解都成立(以给定的数据表出)的一个估计，即使前提并不保证这样的解的存在性. 本书的主要部分就是专门用来建立各种问题的先验的界.

在第 6 章的一些应用中可以看到这些先验估计的重要性，其中包括用连续性的方法建立 Dirichlet 问题的可解性(定理 6.8)以及在适当的光滑性假定下证明 C^2 解的更高阶的正则性(定理 6.17, 6.19). 在这两种情形中这种估计对于某类解提供了必须的紧致性，由此就容易推出所要的结果.

我们评述一下第 6 章的另外几个特征，虽然它们对本书后面的发展说来并不需要，但却扩大了基本 Schauder 理论的范围. 在 6.5 节中我们看到对于连续边值问题以及适当广泛的一类区域，(1.1)的 Dirichlet 问题可解性的证明可以完全用内估计来完成，从而简化了理论的结构. 6.6 节的结果把 Dirichlet 问题的存在性理论推广到了某类非一致椭圆型方程. 这里我们看到边界的几何性质和在边界处的退化椭圆性之间的一些关系如何确定边值的连续性假定. 基于闸函数论证的这些方法预示着第 II 部分中非线

性方程的类似的(但更深入的)结果. 在 6.7 节中我们把 (1.1) 的理论推广到正则斜导数问题上去. 这个方法基本上是对早先处理 Poisson 方程的边界条件和 Schauder 理论 (但是不用闸函数的论证)的外推.

在上述考虑中,特别是在存在性理论和闸函数论证中,算子 L (当 $c\leqslant 0$ 时) 的极大值原理起着本质的作用. 这是二阶椭圆型方程的一个特别的特征,它简化并加强了二阶椭圆型方程的理论. 关于极大值原理的基本事实, 以及比较方法的例证性应用都包括在第 3 章中. 极大值原理提供了一般理论的最早和最简单的先验估计. 相当重要的是第 4 和第 6 章中所有的先验估计完全可以从基于极大值原理的比较论证中推得, 而不用任何 Newton 位势或积分.

线性问题的另一种而且是更一般的不用位势理论的方法可以象第 8 章所讲的那样用基于广义解或弱解的 Hilbert 空间方法来得到. 更具体地说, 设 L' 是由

$$L'u\equiv D_i(a^{ij}(x)D_ju+b^i(x)u)+c^i(x)D_iu+d(x)u$$

定义的主部是散度形式的二阶微分算子. 如果系数都充分光滑, 则这个算子显然可归入第 6 章所讨论的类中. 但是, 即使系数属于更广泛的函数类而且 u 只是弱可微的(在第 7 章的意义下), 我们仍然能够在适当的函数类中定义 $L'u=g$ 的弱解或广义解. 特别, 如果系数 a^{ij}, b^i, c^i 在 Ω 中有界可测, 而且 g 是 Ω 中的可积函数, 如果 $u\in W^{1,2}(\Omega)$ (就象第 7 章中定义的那样)并且对一切检验函数 $v\in C_0^1(\Omega)$ 有

$$\int_\Omega [(a^{ij}D_ju+b^iu)D_iv-(c^iD_iu+du)v]\,dx=-\int_\Omega gv\,dx, \tag{1.4}$$

我们就把 u 叫做 $L'u=g$ 在 Ω 中的弱解或广义解. 显然, 如果系数和 g 都充分光滑并且 $u\in C^2(\Omega)$, 则 u 也是古典解.

现在我们也可以说广义 Dirichlet 问题

$$\text{在 } \Omega \text{ 中 } L'u=g,\ \text{在 } \partial\Omega \text{ 上 } u=\varphi$$

的弱解 u 了: 如果 u 是满足 $u-\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 的一个弱解, 其中

$\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. 假定$[a^{ij}]$的最小特征值在$\Omega$中有正下界，在弱的意义下

$$D_i b^i + d \leqslant 0, \tag{1.5}$$

而且还有 $g \in L^2(\Omega)$，在定理 8.3 中我们发现广义 Dirichlet 问题有唯一解 $u \in W^{1,2}(\Omega)$. 条件(1.5)是与(1.1)中 $c \leqslant 0$ 相类似的条件，它保证了 $L'u \geqslant 0 (\leqslant 0)$ 的弱解的极大值原理(定理 8.1)，因此保证了广义 Dirichlet 问题解的唯一性. 然后，从算子 L' 的 Fredholm 二择一性质得出解的存在性(定理 8.6)，在 Hilbert 空间 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中应用 Riesz 表示定理就证明了这定理.

第 8 章的主要部分是处理弱解的正则性. (1.4)中系数的附加的正则性蕴涵着解属于更高的 $W^{k,2}$ 空间(定理 8.8, 8.10). 如果系数充分正则，从第 7 章的 Sobolev 嵌入定理就得到弱解实际上就是古典解. 当边界数据充分光滑时，把内部正则性延拓到边界就得到这些解的全局正则性(定理 8.13, 8.14).

对于非线性理论，弱解的正则性理论和相应的逐点估计是基本的. 这些结果提供了非线性问题中典型的“依靠自己力量”(bootstrap)的论证的出发点. 简言之，这里的想法是从一个拟线性方程的弱解出发，把它们看成是把这些解代入到系数中去而得到的有关的线性方程的弱解，然后继续改进这些解的正则性. 重新从后来得到的解出发，重复这个过程，使进一步的正则性仍得到保证，如此等等. 直到原来的弱解最终被证明是适当光滑的. 这是较古老的变分问题的正则性证明的实质，它对这里介绍的非线性理论来说无疑也是本质的.

对于非线性理论说来，非常重要的弱解的 Hölder 估计在第 8 章中从基于 Moser 迭代技巧的 Harnack 不等式推导出来(定理 8.17, 8.18, 8.20, 8.24). 这些结果推广了 De Giorgi 的基本的 Hölder 先验估计，De Giorgi 的估计是多于两个自变量的拟线性方程理论的最早的突破. 论证是以从(1.4)中适当选取检验函数而导出的弱解 u 的积分估计为依据的. 在本书大多数估计的推导中检验函数的技巧是支配性的课题.

本书的第二部分大部分讲述拟线性方程的 Dirichlet 问题和有关的估计. 一部分结果是关于一般算子(1.2)的, 而其余的主要是应用到散度形式的算子

$$Qu\equiv \operatorname{div}\mathbf{A}(x, u, Du)+\mathbf{B}(x, u, Du) \tag{1.6}$$

的, 其中 $\mathbf{A}(x, z, p)$ 和 $\mathbf{B}(x, z, p)$ 分别是定义在 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上的向量和数量函数.

第 9 章把极大值原理和比较原理(类似于第 3 章中的结果)推广到拟线性方程的解和下解. 我们特别要提到 $Qu\geqslant 0(=0)$ 的解的先验界, 其中 Q 是一个散度形式的算子, 满足一些比椭圆性更一般的结构条件(定理 9.7).

第 10 章为下几章解 Dirichlet 问题提供了基本的框架. 我们主要处理古典解, 而方程可以是一致或非一致椭圆型的. 在适当一般的假定下, 具有光滑边界的区域 Ω 中 $Qu=0$ 的边值问题的任何全局光滑解 u, 可以看作对于任一 $\alpha\in(0, 1)$ 从 $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ 到 $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ 的紧致算子 T 的一个不动点 $u=Tu$. 在应用中, 对于任何的 $u\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, 由 Tu 定义的函数是把 u 代入 Q 的系数中而得到的线性问题的唯一解. 如果对于有关的连续方程族 $u=T(u;\sigma)$, $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, 其中 $T(u;1)=Tu$ 的解能在 $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ 中建立一个先验的界, 那么, (在第 10 章中证明的) Leray-Schauder 不动点定理蕴涵着边值问题解的存在性(定理 10.4, 10.7). 对于广泛的一类 Dirichlet 问题, 这种先验界的建立是第 12—14 章的目标.

为了对可能的解 u 得到所需要的先验界, 一般的方法包括逐次估计 $\sup\limits_{\Omega}|u|$, $\sup\limits_{\partial\Omega}|Du|$, $\sup\limits_{\Omega}|Du|$ 和 $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}$ (对于某个 $\alpha>0$) 等四步. 每一步都事先假定了前一步的估计, 根据 Leray-Schauder 定理, 最后的关于 $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}$ 的界完成了存在性的证明.

如同已经谈到的那样, 在第 9 章中讨论关于 $\sup\limits_{\Omega}|u|$ 的界. 在以后各章中这个界或者假定在假设中, 或者蕴涵在方程的性质中.

两个自变量的方程 (第 11 章) 在理论中占有特殊的地位. 部

分原因是因为对这种方程已经发展了有特色的方法，另一部分原因是因为两个自变量的某些结果对于多于两个自变量的方程是不成立的. 拟保角映射的方法以及基于散度结构方程的论证（参看第10章）都可用到两个变量的方程上去，而且相对说来容易得到所要的 $C^{1,\alpha}$ 先验估计，从这个先验估计容易得到 Dirichlet 问题的解.

特别有意思的是两个变量的一致椭圆型线性方程的解满足一个只依赖于椭圆性常数和系数的界，而不要任何正则性假定的 $C^{1,\alpha}$ 先验估计（定理 11.4）. 对于多于两个变量的方程来说，这样一种 $C^{1,\alpha}$ 估计，或者甚至在同样的一般条件下梯度界的存在性都是不知道的. 二维理论的另一个特别的特征是对于任意的椭圆型方程

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}=0 \tag{1.7}$$

的解 u，存在一个先验的 C^1 界 $|Du|\leqslant K$，其中 u 在有界凸区域 Ω 的闭包上连续，而且在 $\partial\Omega$ 上取边值 φ，$\partial\Omega$ 满足常数为 K 的有界斜率（或三点）条件. 这个古典的结果通常是根据鞍面的 Radó 定理来证明的，在引理 11.6 中给出了一个初等的证明. 已经说过的梯度的界——这个界对于一般的拟线性方程 (1.7) 的所有解 u 成立，其中 $a=a(x, y, u, u_x, u_y)$ 等等，并且在 $\partial\Omega$ 上满足 $u=\varphi$——把这个 Dirichlet 问题化为定理 11.5 中讨论过的一致椭圆型方程的情形. 在定理 11.7 中，假定了系数的局部 Hölder 连续性和边界数据的有界倾斜条件（对数据没有进一步的光滑性限制），我们就得到 (1.7) 的一般 Dirichlet 问题的解.

第 12，13 和 14 章讲述包含在上面叙述过的存在性方法中的梯度估计的推导. 在第 12 章中我们证明 Ladyzhenskaya 和 Ural'tseva 关于拟线性椭圆型方程导数的 Hölder 估计的基本结果. 在第 13 章中我们研究拟线性椭圆型方程的解在边界上的梯度估计. 在考虑了一般的以及凸的区域后，我们叙述了 Serrin 的理论，它把广义边界曲率条件和 Dirichlet 问题的可解性联系起来了. 特别是从第 10，12 和 13 章的结果能得出极小曲面方程的 Dirichlet 问题的可解性的 Jenkins 和 Serrin 判别准则，也就是说，

对于光滑区域以及任意的光滑边值，极小曲面方程是可解的当且仅当边界(关于内法向的)平均曲率在每一点非负(定理 13.14).

在第14章中建立了拟线性方程解 u 的梯度界的全局和内部估计. 遵循 Bernstein 的老方法的一个改进，我们对一类方程——既包括满足自然增长条件的一致椭圆型方程，也包括与规定平均曲率的方程有共同结构性质的方程，我们推导了用 $\sup_{\partial\Omega}|Du|$ 表示的 $\sup_{\Omega}|Du|$ 的估计(定理 14.2). 对于限制更多的一类方程，我们方法的一个变种给出了内部梯度估计(定理 14.3). 我们还考虑了散度形式的一致和非一致椭圆型方程(定理 14.4, 14.5 和 14.6)，在这些情形中，通过适当的检验函数的论证，我们推得了与一般情形相比是不同类型的系数条件下的梯度估计. 我们选择了一些用来说明理论的范围的存在定理来结束第 14 章. 这些定理都是通过应用第 9, 13 和 14 章的先验估计的各种组合，并且适当选择可以应用定理 10.8 的一族问题而得到的.

在第 15 章中我们集中于规定平均曲率的方程，并导出梯度的内估计 (定理 15.5)，从而使我们能够对只假定连续边值的 Dirichlet 问题导出存在性定理(定理 15.8, 15.10). 我们还考虑了一组两个变量的方程，在某种意义下这组方程和规定平均曲率的方程的关系与第 11 章中一致椭圆型方程和 Laplace 方程的关系是一样的. 确实，借助于拟保角映射的一个推广了的概念，我们导出了一阶和二阶导数的内估计. 二阶导数的估计对极小曲面方程的解提供了熟知的 Heinz 曲率估计的一个推广 (定理 15.20)，而且蕴涵着 Bernstein 的著名结果的一个推广(推论 15.19)，Bernstein 的结果是：两个变量的极小曲面方程的整函数解必定是线性函数. 然而，定理 15.5 和 15.20 的显著的特征或许是下列方法，与其在区域 Ω 中讨论问题，不如在由解 u 的图象给出的超曲面 S 上讨论问题，并且去发掘在切线梯度和 S 上的 Laplace 算子以及 S 的平均曲率之间的各种关系.

我们对读者提出某些指导来结束本概要. 本书的材料不是按

严格的逻辑次序安排的. 因此在正规情形下 Poisson 方程的理论(第 4 章)应该跟在 Laplace 方程(第 2 章)的后面. 但是由于极大值原理的结果是很基本的而且为了使读者有早一点碰到某些变系数的一般问题的机会,所以把这些内容插在第二章之后. 事实上,直到第 6 章的存在性理论时, 才用到一般的极大值原理. 基本的泛函分析材料(第 5 章)对于 Schauder 理论来说只在少数几点上是需要的: 除了证明定理 6.15 中的 Fredholm 二择一性质外, 只要压缩映象原理和 Banach 空间的基本概念就够了. 为了在第二部分中应用到非线性问题中去,只要知道第 6 章 1—3 节的结果就够了. 如果读者有兴趣,直接从第 8 章的 L^2 理论开始学习线性理论更好些; 这要假定有泛函分析(第 5 章)和弱可微函数计算(第 7 章) 方面的初步知识. 第 8 章正则性理论中的 Harnack 不等式和 Hölder 估计直到第 12 章才有应用.

两个变量的拟线性方程的理论 (第 11 章) 本质上是独立于第 7—10 章的, 只要假定 Schauder 不动点定理(定理 10.1), 它就可以接着第 6 章来念. 拟保角映射的方法在第 15 章中再次碰到,但在其它方面, 余下的章节是不依赖于第 11 章的. 因此在第 10 章中有了非线性理论的基本轮廓以后,读者可以直接读第 12—15 章的 n 个变量的理论. 第 15 章大部分是与第 12—14 章独立的.

进一步的附注

除了假定基本的实分析和线性代数以外, 本书的材料几乎完全是自封的. 因而,位势理论和泛函分析的很多初步结论,以及关于 Sobolev 空间和不动点定理的结果, 对许多读者说来将是熟悉的, 虽然在定理 10.6 中不用拓扑度的 Leray-Schauder 定理的证明很可能不是众所周知的. 为了完整起见还证明了许多建立得很好的辅助结果,诸如第 6 章的内插不等式和延拓引理.

本书与 Ladyzhenskaya 和 Ural'tseva [LU4] 和 Morrey [MY5] 的专著有相当大的重迭. 本书在某些分析技巧以及在非线性理论中强调非一致椭圆型方程方面与[LU4]不同. 不同于[MY5]的是本书不直接涉及变分问题和变分方法. 本书还包含了自那两本书

出版以来所发展的材料. 另一方面,在许多方面受到更多的限制. 没有包括方程组,非 Dirichlet 边界条件的非线性问题、单调算子理论以及基于几何测度理论方面的课题.

在一些常常完全是技术性的问题上我们永远不去追求最大的一般性,特别是关于连续模、估计、积分条件等等方面. 我们把自己限于由幂函数决定的条件: 例如, Hölder 连续性而不是 Dini 连续性,在第 8 章中是 L^p 空间而不是 Orlicz 空间,是用 $|p|$ 的幂表示的结构条件而不是更一般的 $|p|$ 的函数,等等. 适当修改一下证明,读者通常都能作出适当的推广.

历史材料和参考文献主要在每章的末尾的评注中讨论. 这不是为了完整而是为了补充正文以及更好地看待正文. 更为详尽的文献的述评,至少到 1968 年为止,包括在 Miranda[MR2] 中. 每章附加的习题也是为了补充正文; 希望这些对于读者将是有用的练习.

基本记号

$\mathbb{R}^n$: n 维 Euclid 空间, $n\geqslant 2$, 其点为 $x=(x_1, \cdots, x_n)$, $x_i\in\mathbb{R}$(实数); $|x|=(\sum x_i^2)^{1/2}$; 若 $\mathbf{b}=(b_1, \cdots, b_n)$ 是一个有序 n 重数,则 $|\mathbf{b}|=(\sum b_i^2)^{1/2}$.

$\mathbb{R}^n_+$: $\mathbb{R}^n$ 中的半空间 $=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,x_n>0\}$.

∂S: 点集 S 的边界; $\bar{S}=S$ 的闭包 $=S\cup\partial S$.

$S-S'$: $\{x\in S\,|\,x\notin S'\}$.

$S'\subset\subset S$: $S'\subset S$ 而且 $\operatorname{dist}(S', \partial S)>0$; S' 严格包含在 S 中.

Ω: $\mathbb{R}^n$ 的一个真开子集,不必有界; Ω 是一个区域,如果它还是连通的; $|\Omega|=\Omega$ 的体积.

$B(y)$: $\mathbb{R}^n$ 中中心在 y 的球; $B_r(y)$ 是中心在 y、半径为 r 的开球.

ω_n: $\mathbb{R}^n$ 中的单位球的体积 $=\dfrac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$.

$D_iu=\partial u/\partial x_i$, $D_{ij}u=\partial^2u/\partial x_i\partial x_j$, 等等; $Du=(D_1u, \cdots, D_nu)=u$ 的梯度; $D^2u=[D_{ij}u]=$ 二阶导数 $D_{ij}u$ 构成的矩阵, i, $j=1$, 2,