面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

离散数学

李盘林　李丽双　李　洋　王春立　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

离散数学

李盘林　李丽双　李　洋　王春立　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112号

DL196/31 3

内容提要

本书是面向21世纪课程教材和计算机专科“九五”规划教材.本书由5篇构成。第一篇数理逻辑,内容包括命题逻辑和谓词逻辑;第二篇集合论,内容包括集合论公理系统、关系与函数、序数与基数、选择公理与无穷集合;第三篇数论,内容包括整除和同余;第四篇代数结构,内容包括代数结构基本概念及性质、半群和群、环和域、布尔代数;第五篇图论,内容包括图的基本概念及矩阵表示、几类重要的图.

书中五部分各自成篇,同时注意到各篇之间联系,增添的数论篇可为学生学习和理解密码理论打下有力基础.

全书编写力求通俗、流畅、简明、扼要,各章都配有典型例子和适量的习题,便于读者理解和掌握内容.本书可作为高等学校计算机及相关专业的教材,也可供有关技术人员学习参考.

图书在版编(CIP)数据

离散数学/李盘林等编著.—北京:高等教育出版社,1999
面向21世纪课程教材
ISBN 7-04-006991-1

Ⅰ.离… Ⅱ.李… Ⅲ.离散数学-高等学校-教材
Ⅳ.O158

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第18676号

离散数学
李盘林 李丽双 李洋 王春立 编著

出版发行	高等教育出版社		
社址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电话	010-64054588	传真	010-64014048
网址	http://www.hep.edu.cn		
经销	新华书店北京发行所		
印刷	中国科学院印刷厂		
纸张供应	山东高唐纸业集团总公司		
开本	787×960 1/16	版次	1999年6月第1版
印张	22.25	印次	1999年6月第1次印刷
字数	400 000	定价	23.40元

面向21世纪课程教材

普通高等教育“九五”
国家教委重点教材

前　　言

离散数学是现代数学的一个重要分支,是计算机科学与技术的理论基础,所以又称为计算机数学.

人们已公认,高技术本质上是数学技术,因此可以说,计算机科学与技术说到底是离散数学技术.事实上,从计算机产生到以后它的每一步发展都离不开数学.1936年,英国数学家图灵(A.M.Turing)发表了著名论文"理想计算机",从而给出了计算机设计的理论模型.1946年在著名数学家冯·诺依曼(J.von Neumann)的领导下,制造了世界上第一台计算机ENIAC(Electronic Numerical Integrator and Computer).尔后,计算机各代的发展也都无不证实了这一点.

离散数学是计算机科学与技术专业的核心、骨干课程.一方面,它给后继课,如数据结构、编译系统、操作系统、数据库原理和人工智能等,提供必要的数学基础;另一方面,通过学习离散数学,培养和提高了学生的抽象思维和逻辑推理能力,为学生今后继续学习和工作,参加科学研究,攀登科技高峰,打下坚实的数学基础.

离散数学内容很多,本书主要有5部分:数理逻辑、集合论、数论、代数结构和图论.本书是编著者在多年教学实践的基础上,参考了国内外多种教材,并结合自己一些科研成果,在力求通俗、流畅、简明、扼要的指导思想下编写而成.

本书在编写过程中有几点考虑,说明如下:

(1) 本书除讲述离散数学最基本的比较典型的传统内容外,增添了数论基础知识,以便为学习和理解密码理论打下基础.

(2) 在编写过程中,力图做到"少而精",注意突出重点,力求论证详细明了,便于自学,在基本定理的证明中,反复运用归纳法,希望读者不但了解定理内容,同时应该掌握这一证明方法.

(3) 全书涉及数学5个分支,每一分支都有数百字的说明,概述了它的发展,这对于掌握其内容是十分有益的.

(4) 在加强基本理论教学的同时,注意了分析问题、解决问题的技能培养和训练.书中各部分内容均配有典型例子,并加以说明.此外,各章都配有适量的习题,希望通过做习题这个环节,来培养、提高学生解决问题的能力和技能.

(5) 书中的5部分,一方面各自成篇,教师根据需要可以单独选讲几篇;另一方面,尽可能注意各篇之间的联系,规范并统一了符号和术语.

(6) 在内容安排上，既考虑到大纲中关于学时的要求，又不完全受其限制．书中有些章节是供选讲的．有些重要定理的证明偏难又冗长，讲或不讲由任课教师酌定．

书末附有七、八两章习题的部分解答，供读者参考．

上海交通大学左孝凌教授、上海大学刘永才教授仔细审阅了全稿，提出了许多宝贵意见，张华女士在文稿整理中做了大量工作，对此编者表示诚挚的谢意．

限于作者水平，书中不当和疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指正．

编 者

1998年10月

目　　录

第一篇　数理逻辑

第二篇　集　合　论

第四篇 代数结构

第五篇 图 论

第一篇　数理逻辑

研究人的思维形式和规律的科学，称为逻辑学．由于研究的对象和方法各有侧重而又分为形式逻辑、辩证逻辑和数理逻辑．

数理逻辑是用数学方法研究推理，是研究推理中前题和结论之间的形式关系的科学．所谓推理就是由一个或几个判断推出一个新判断的思维形式，这里所说的数学方法就是建立一套表意符号体系，对具体事物进行抽象的形式研究的方法．因此，数理逻辑又称符号逻辑．这种方法的优点是表达简洁、推理方便、概括性好、易于分析等．

一般认为，数理逻辑是由德国数学家兼哲学家莱布尼兹(G. W. Leibnitz)在17世纪中叶创立的．其后由英国数学家布尔(G. Boole)于1847年出版的《逻辑的数学分析》一书发展了逻辑代数，即通常称为布尔代数．还有德国数学家弗雷格(F. L. G. Frege)于1879年出版了《表意符号》，引入了量词、约束变元，使逻辑演算趋于完备．1930年出生于奥地利的美籍数学家哥德尔(K. Gödel)的完全性定理证明，使数理逻辑的基础得到完善．意大利数学家皮亚诺(G. Peano)，英国数学家德·摩根(A. DeMorgen)、罗素(B. A. W. Russell)等人都做了很大贡献，丰富和发展了数理逻辑．

数理逻辑主要包括五部分：逻辑演算、证明论、公理化集合论、模型论和递归函数论．本篇仅介绍计算机科学领域中所必需的数理逻辑基础知识：命题逻辑和谓词逻辑．

第一章　命题逻辑 $\mathscr{L}s$

命题逻辑简称为 $\mathscr{L}s$ 也称命题演算，或语句演算，它研究由命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系. 那么，什么是命题? 如何表示和构成? 下面逐一地进行讨论.

1.1　命题与联结词

1. 命题的概念

所谓命题，是指具有真假意义的陈述句. 也就是说能够确定或能够分辨其真假的陈述句，且真或假二者必居其一，也只居其一. 简言之，非真必假的陈述句.

例 1.1.1　① 你听懂了吗?

② 这真开心!

③ 请止步!

④ 我是学生.

⑤ 6 不是自然数.

①、②和③不是命题，因为他们分别是疑问句、感叹句和祈使句；④和⑤是命题.

像④⑤那样一些不能分解为更简单的陈述句，称为原子命题.

一个命题的真或假称为命题的真值，简称值，真用 T 或 1 表示；假用 F 或 0 表示.

由于命题只有真、假二个真值，所以命题逻辑也称二值逻辑.

应该注意，一个陈述句能否分辨真假，与是否知道它的真假，是两件事.

例 1.1.2　张校长的头发有一万根.

这句话，虽不能马上分辨其真假，但是只要认真地去数一数，还是可以知道的.

在判断一个句子是否为命题时，从语法上就是看它是否为陈述句. 但值得注意的是，那些“自指谓”的陈述句，不在其列. 因为这种自指谓的句子，往往产生自相矛盾的结论. 所说“自指谓”是指其结论是对自身而言.

例 1.1.3　我所说的是假的.

显然，这个句子从表面上看，当它假时，它便真；当它真时，它便假.

还应说明一点，命题的真值会因人因时因地而异.

例 1.1.4　① 人有五指.

② 人类即将进入 21 世纪.

③ 现在是六点钟.

① 对一般人来说是真，而对于有的个别人却是假.

② 在 3 年内，为真；3 年后是假.

③ 对于北京时间可能是真，而对于美国便是假.

因此，在数理逻辑中，不能去纠缠各种具体命题的真假问题，而是将命题当成数学概念来处理，看成一个抽象的形式化的概念，把命题定义成非真必假的陈述句.

此时所关心的并不仅仅是这些陈述句究竟是真还是假，更关心的是它可以被赋予真或假的可能性，以便被规定真值后它与其他命题发生的联系.

2. 命题标识符

在科学领域中，每门科学为描述它的概念和论证其有关定理，都拥有自己的语言符号以及所使用的规则.

在 $\mathscr{L}s$ 中，采用一种形式语言，形式语言与我们通常使用的自然语言不同，它由特定意义的符号和规则组成，其特征是有确定的含义.

一个原子命题，一般用大写字母或带下标的大写字母，如 $P,Q,R,\cdots$，或 $P_i,Q_i,R_i,\cdots$，等表示，把表示原子命题的符号，称为命题标识符，简称命题符.

例 1.1.5　P：北京是中国的首都. 其中"："代表表示的意思，下同.

一个命题标识符 P，如果表示一个确定的命题，则称 P 为原子命题常元，简称命题常元；若 P 只表示任意命题的位置标志，或表示不确定的命题，就称 P 为原子命题变元，简称命题变元. 显然，命题变元不是命题. 将一个命题变元 P 用一特定命题去代替，它才能确定真值，这叫对 P 的指派，或解释，记为 $S(P)$或 $I(P)$.

3. 联结词

联结词是逻辑联结词或命题联结词的简称，它是自然语言中连词的逻辑抽象. 有了联结词，便可以用它和原子命题构成复合命题. 常用联结词有以下 5 种.

(1) 否定联结词——$\neg$

设 P 是一个命题，由联结词$\neg$和命题 P 构成$\neg P$，称$\neg P$ 为命题P 的否定式复合命题. $\neg P$ 读"非 P".

复合命题$\neg P$的值由命题P的真值来确定. 若P为T,则$\neg P$为F;若P为F,则$\neg P$为T. $\neg P$的真值可列表表示如下:

P	$\neg P$
T	F
F	T

联结词$\neg$是自然语言中的"非"、"不"和"没有"等的逻辑抽象.

例 1.1.6 设P:大连是北方香港,则$\neg P$表示大连不是北方香港,或者大连并非是北方香港.

(2) 合取联结词——$\wedge$

令P和Q是两个命题,由联结词$\wedge$把P,Q连接成$P\wedge Q$,称$P\wedge Q$为P和Q的合取式复合命题,$P\wedge Q$读做"P与Q",或"P合取Q".

$P\wedge Q$的真值由P,Q的值确定.若P为T,Q为T,则$P\wedge Q$为T;否则$P\wedge Q$为F. $P\wedge Q$的真值可列表表示如下:

P	Q	$P\wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

联结词$\wedge$是自然语言中的"并且","既…又…"等的逻辑抽象.

例 1.1.7 设P:张明学习好,Q:张明工作好,则由$P\wedge Q$表示张明既学习好又工作好.

如果又设Q:$1+1=3$,则$P\wedge Q$表示张明学习好并且$1+1=3$. 从自然语言看,这是不合理的,但在$\mathscr{L}s$中是允许的,也是正确的.

合取联结词$\wedge$具有对称性,即$P\wedge Q$和$Q\wedge P$具有相同的真值.

(3) 析取联结词——$\vee$

设P和Q是两个命题,由联结词$\vee$把P,Q连接成$P\vee Q$,称$P\vee Q$为P,Q的析取式复合命题,$P\vee Q$读做"P或Q".

联结词$\vee$是自然语言中的"或","或者"的逻辑抽象,而在自然语言中,"或"是多义的,这可列表说明如下:

或的含义	例		说明
联结词	可兼或	$a\cdot b=0$ 即 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $a=b=0$	二者至少有一个发生，不排斥二者都发生的情况
	排斥或	他的死或重于泰山或轻于鸿毛	非此即彼，不可兼得
非联结词	表示近似数的或	去主楼需 6 分钟或 8 分钟	近似数"6 至 8 分钟"

析取联结词是表示可兼或．据此可知，对于复合命题 $P\vee Q$ 的真值，当且仅当 P,Q 同为 F，$P\vee Q$ 才为 F；否则 $P\vee Q$ 为 T．可列表为：

P	Q	$P\vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

因此，在遇到含有"或"的意思的语句，要分清它是否为可兼或．

例 1.1.8　如果有的话，将下列语句表示为析取式复合命题．

① 张明正在睡觉或游泳．

② 李强是位排球队员或是足球队员．

③ 他昨晚做了二十或三十道题．

解　对于② 是可以表示为析取式复合命题 $P\vee Q$，其中 P：李强是位排球队员，Q：李强是位足球队员．

① 的表示要麻烦些，若引入"排斥或"联结词将会简单．

③ 不能表示，因为这里的或是个近似数．

与联结词 $\wedge$ 类似，在自然语言中，通常是在具有某种关系的两语句之间使用析取"或"，但在 $\mathscr{L}s$ 中，并不要求这一点．

例 1.1.9　二二得四或者北京是中国的首都．

这也是可接受的，它是使用 $\vee$ 且具有真值为真的复合命题．

(4) 条件联结词—— →

设 P 和 Q 是两个命题，由联结词 → 把 P,Q 连接成 $P\to Q$，称 $P\to Q$ 为 P 和 Q 的条件式复合命题，把 P 和 Q 分别称为 $P\to Q$ 的前件和后件，或者前提和

结论. $P \to Q$ 读做"如果 P,则 Q"或"P 条件 Q".

$P \to Q$ 的真值由 P 和 Q 的值确定:当 P 为 T, Q 为 F 时, $P \to Q$ 为 F;否则 $P \to Q$ 为 T. 这可列表如下:

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

例 1.1.10　如果我有时间,那么我一定认真读书.

本例可用条件式命题 $P \to Q$ 表示,其中 P:我有时间, Q:我一定认真读书.

联结词→是自然语言中的"如果……,则……","若……,才能……"等的逻辑抽象.

在自然语言中,前件为假,不管结论真假,整个语句的意义,往往无法判断. 但在 $\mathscr{L}s$ 中,当 P 为 F, $P \to Q$ 为 T,称为"善意推定".

例 1.1.11　命题"如果天下雨,则马路湿"可表示为 $P \to Q$,其中 P:天下雨, Q:马路湿.

下面,讨论本例的真值,以说明关于它的真值的规定是有一定道理的.

① "如果天下雨,则马路湿"值为真,即若 P 真, Q 真,则 $P \to Q$ 为真.

② "如果天下雨,则马路不湿"显然假,即若 P 真, Q 假,则 $P \to Q$ 假.

③ "如果天不下雨,则马路湿"可能为真,即 P 假, Q 真,则 $P \to Q$ 真,是善意推定.

④ "如果天不下雨,那么马路也不湿"可能为真,即 P 假, Q 假,则 $P \to Q$ 真.

这里,要特别提一下"→"的含义. 在自然语言中,条件式中前提和结论间必含有某种因果关系,但在 $\mathscr{L}s$ 中可以允许两者无必然因果关系,也就是说并不要求前件和后件间有什么联系.

例 1.1.12　如果 $2+2=4$,则雪是黑的. 这可表示为 $P \to Q$,其中 P:$2+2=4$, Q:雪是黑的. 因为 P 真, Q 假,则 $P \to Q$ 为假.

(5) 双条件联结词—— $\leftrightarrows$

令 P 和 Q 是两个命题,由联结词 $\leftrightarrows$ 把 P, Q 连接成 $P \leftrightarrows Q$,称 $P \leftrightarrows Q$ 为 P 和 Q 的双条件式复合命题, $P \leftrightarrows Q$ 读做"P 当且仅当 Q",其真值由 P 和 Q 值确定,具体可表示为:

P	Q	$P\leftrightarrows Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

双条件联结词$\leftrightarrows$又常称为同或,异用符号$\odot$表示。

例 1.1.13　三角形是等边三角形当且仅当三角形的三个内角相等.

本例可表示成双条件式复合命题.

双条件联结词$\leftrightarrows$是自然语言中的"充分必要条件"、"当且仅当"等的逻辑抽象,与上面定义的$\wedge$,$\vee$和$\rightarrow$一样,构成双条件式命题 $P\leftrightarrows Q$ 也不要求P 和 Q 两个命题之间有任何联系,$P\leftrightarrows Q$ 的真值,仅与 P 和 Q 的真值有关. 请看下面例题.

例 1.1.14　$2+2=4$ 当且仅当太阳是恒星.

本例是真值为真的双条件式命题 $P\leftrightarrows Q$,其中 P:$2+2=4$,Q:太阳是恒星.

再强调如下几点:

(1) 复合命题的真值只取决于构成它们的各原子命题的真值,而与它们的内容、含义无关,与联结词所连接的两原子命题之间是否有关系无关.

(2) $\wedge$,$\vee$和$\leftrightarrows$具有对称性,而$\neg$,$\rightarrow$没有.

(3) 联结词都有从已知命题得到新的命题的作用,从这个意义上讲,它们具有操作或运算的意义. 可见,它们可以被看作是一、二元运算,或一、二元函数.

(4) 关于$\rightarrow$,$\leftrightarrows$的其他说法,如蕴涵、等价等,后面有他用.

4. 命题的分类

从上可知,命题分两类:一类是原子命题;另一类是复合命题,它是由原子命题和联结词复合而成. 判断一个命题是否为复合命题,其关键是联结词出现否? 出现,则是复合命题;不出现,则是原子命题.

1.2　命题公式、翻译和真值表

1. 命题公式

前面讲了联结词、原子命题变元. 再加上圆括号"("、")",便可以进行有限次的连接,得到许多字符串,这些字符串是否都有意义呢? 即对其中命题变元作指派后,它们是否都有确定的真值? 答案为否. 那些有意义的字符串,称为 $\mathscr{L}s$ 中的合式公式, 简称命题公式或公式. 如何连接才能得到合式公式,这就需要给出一定的规则.

下面,使用归纳法定义合式公式.