

測量平差法

陈永龄 夏坚白 王之卓著

商务印书馆

測量平差法

(最小二乘法)

陈永齡 夏堅白 王之卓著

(修訂本)

本書是一部講述測量平差問題的專著，對於測量平差之基本理論及各種測量平差之計算方法均作了較為詳細的敘述，著者均有較為豐富之教學經驗，本書取材又多針對高等測量學校教學之需要，故可作為各高等測量學校教學參考書。其他各院校學習“誤差原理及最小二乘法”時，此書亦有參考價值。書中引用了一些實測的例子作為各種測量平差計算的范例，對於實際測量工作者也很有用。

本書初版於1947年，前後經過兩次修訂，供應了廣大讀者的需要。雖然由於著者工作較忙，未來得及作徹底修訂，但原書的基本內容仍適合於目前需要，故仍不失為一部頗有價值的參考書。

測 量 平 差 法

陳永齡 夏堅白 王之卓著

★版權所有★

商務印書館出版

上海河南中路二一七號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新華書店總經售

上海三星印刷廠印刷

(15017·13)

1947年5月初版	開本 850×1168 1/32
1956年12月7版(修訂本)	字數 404,000
1956年12月上海第2次印刷	印數 6,501—11,500
印數 14 6/16	定價(10) ¥ 2.10

目 錄

第七版序	7
緒論	9
第一章 觀測誤差	13
第一節 誤差種類	13
第二節 偶然誤差之特征	14
第三節 真誤差與改正數	14
第四節 觀測精度之衡量	15
第五節 極限誤差	19
第六節 觀測值之權	20
第七節 最小二乘法原理	22
第二章 誤差傳播定律	23
第一節 誤差傳播	23
第二節 倍數	23
第三節 和數	24
第四節 直綫函數	25
第五節 任意函數	27
習題	28
第三章 直接觀測之平差	30
第一節 簡單算學平均值	30
第二節 算學平均值之中誤差	32
第三節 權之意義	35
第四節 廣義算學平均值	37
第五節 權單位及廣義算學平均值之中誤差	39
第六節 根據觀測值之中誤差計算廣義算學平均值之中誤差	43
第七節 以三角形角值之平差為例	45
第八節 分組與全體平差	51
第九節 觀測值差	54
習題	58
第四章 間接觀測之平差	61

第一節	間接觀測平差之原理	61
第二節	非一次函數	66
第三節	不等權之間接觀測	73
第四節	法方程式係數之計算	74
第五節	法方程式之高斯解法	77
第六節	改正數平方和之計算	81
第七節	高斯約化法之實際解算步驟	83
第八節	杜力特爾之解法	91
第九節	權單位之中誤差	93
第十節	未知數之中誤差	96
第十一節	不定係數 Q 及權係數之特性	100
第十二節	未知數權倒數之計算	102
第十三節	未知數函數之中誤差	114
第十四節	按最小二乘法所得未知數值之中誤差為最小	121
第十五節	法方程式之逐步接近解算法	123
第十六節	約化之改正數方程式	126
第十七節	分部約化法	128
第十八節	史賴伯約化法	130
習題		133
第五章	條件觀測之平差	135
第一節	條件方程式	135
第二節	條件觀測化為間接觀測	137
第三節	繫數解法	140
第四節	未知數函數之中誤差	149
第五節	應用問題舉例	161
第六節	分組平差法	170
第七節	最適當之權分配	173
第八節	等值觀測	178
第九節	附有條件方程之間接觀測	181
第十節	附有未知數之條件觀測	186
習題		188
第六章	三角測量測站平差	191
第一節	測站平差之目的	191
第二節	觀測個別角度時之測站平差	192
第三節	史賴伯全組合測角法之測站平差	196
第四節	完全方向測回之測站平差	202
第五節	不完全方向測回之測站平差	211
第六節	不完全方向測回之簡略計算法	215

習題	217
第七章 圖形平差	219
第一節 圖形條件方程式	219
第二節 三角網內圖形條件之數目	222
第三節 四邊形之圖形條件	224
第四節 四邊形按角度平差	233
第五節 四邊形按方向平差	239
第六節 多邊中點形之平差	246
第七節 三角網平差舉例	247
第八節 方向觀測之簡略平差法	266
第九節 應用不完全方向測回觀測時之圖形平差法	268
第十節 間接觀測平差法	275
習題	278
第八章 三角網之其他條件	281
第一節 基綫條件	281
第二節 方位角及拉伯拉斯條件	283
第三節 經緯度條件	287
第四節 環形網之平差	294
第九章 交会定點法	296
第一節 概論	296
第二節 方位角及距離之平面改正	297
第三節 方向角與平面坐標之關係	300
第四節 方向係數之計算方法	302
第五節 前方交会定點法	303
第六節 后方交会定點法	318
第七節 聯合交会定點法	322
第八節 雙點交会定點法	325
第九節 網狀交会定點法	333
第十節 有距離條件之交会定點法	337
第十一節 誤差橢圓	339
第十章 大規模三角網或三角鎖之平差	356
第一節 概論	356
第二節 克里格爾分組平差法	358
第三節 博爾茲擴展法	360
第四節 三角網法方程式之點綫表示法	365
第五節 三角形單鎖之擴展式	367

第六節	多邊中點形及單鎖環形網之擴展式	370
第七節	四邊形單鎖之擴展式	373
第八節	博爾茲代替法	392
第九節	以大地綫代替三角鎖	400
第十節	約爾得之大地綫平差法	402
第十一節	愛格之大地綫嚴格平差法	403
第十二節	鮑威法	406
第十三節	坐標平差法	407
第十一章	誤差理論	413
第一節	偶然誤差之或是率	413
第二節	根據算學平均值之假定求誤差定律	414
第三節	根據原子誤差之假定以求誤差定律	417
第四節	誤差或是率函數之展開	420
第五節	誤差分佈曲綫	422
第六節	最小二乘法之理論	423
第七節	中誤差、平均誤差及或是誤差之幾何意義	424
第八節	理論與實際之比較	427
第九節	由有限數日之真誤差計算所得 t 及 m 值之中誤差	430
第十節	直接觀測及間接觀測內中誤差計算之精度	433
第十一節	最大誤差之理論	437
第十二章	觀測誤差之檢查	439
第一節	檢查之目的	439
第二節	誤差前置符號數目之檢查	440
第三節	誤差前置符號順序之檢查	440
第四節	正負誤差大小之檢查	441
第五節	阿卑檢查法	442
第六節	修正之阿卑檢查法	443
第七節	全組誤差分佈之檢查	443
第八節	改正數之檢查	444
第九節	实例	445
附錄一	方向係數表	447
附錄二	中英德文名詞對照表	454

測量平差法

(最小二乘法)

陈永齡 夏堅白 王之卓著

(修訂本)

本書是一部講述測量平差問題的專著，對於測量平差之基本理論及各種測量平差之計算方法均作了較為詳細的敘述，著者均有較為豐富之教學經驗，本書取材又多針對高等測量學校教學之需要，故可作為各高等測量學校教學參考書。其他各院校學習“誤差原理及最小二乘法”時，此書亦有參考價值。書中引用了一些實測的例子作為各種測量平差計算的范例，對於實際測量工作者也很有用。

本書初版於1947年，前後經過兩次修訂，供應了廣大讀者的需要。雖然由於著者工作較忙，未來得及作徹底修訂，但原書的基本內容仍適合於目前需要，故仍不失為一部頗有價值的參考書。

測 量 平 差 法

陳永齡 夏堅白 王之卓著

★版權所有★

商務印書館出版

上海河南中路二一七號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新華書店總經售

上海三星印刷廠印刷

(15017·13)

1947年5月初版

1956年12月7版(修訂本)

1956年12月上海第2次印刷

印數14 6/16

開本850×1168 1/32

字數404,000

印數6,501—11,500

定價(10) ¥ 2.10

目 錄

第七版序	7
緒論	9
第一章 觀測誤差	13
第一節 誤差種類	13
第二節 偶然誤差之特征	14
第三節 真誤差與改正數	14
第四節 觀測精度之衡量	15
第五節 極限誤差	19
第六節 觀測值之權	20
第七節 最小二乘法原理	22
第二章 誤差傳播定律	23
第一節 誤差傳播	23
第二節 倍數	23
第三節 和數	24
第四節 直綫函數	25
第五節 任意函數	27
習題	28
第三章 直接觀測之平差	30
第一節 簡單算學平均值	30
第二節 算學平均值之中誤差	32
第三節 權之意義	35
第四節 廣義算學平均值	37
第五節 權單位及廣義算學平均值之中誤差	39
第六節 根據觀測值之中誤差計算廣義算學平均值之中誤差	43
第七節 以三角形角值之平差為例	45
第八節 分組與全體平差	51
第九節 觀測值差	54
習題	58
第四章 間接觀測之平差	61

第一節	間接觀測平差之原理	61
第二節	非一次函數	66
第三節	不等權之間接觀測	73
第四節	法方程式係數之計算	74
第五節	法方程式之高斯解法	77
第六節	改正數平方和之計算	81
第七節	高斯約化法之實際解算步驟	83
第八節	杜力特爾之解法	91
第九節	權單位之中誤差	93
第十節	未知數之中誤差	96
第十一節	不定係數 Q 及權係數之特性	100
第十二節	未知數權倒數之計算	102
第十三節	未知數函數之中誤差	114
第十四節	按最小二乘法所得未知數值之中誤差為最小	121
第十五節	法方程式之逐步接近解算法	123
第十六節	約化之改正數方程式	126
第十七節	分部約化法	128
第十八節	史賴伯約化法	130
習題		133
第五章	條件觀測之平差	135
第一節	條件方程式	135
第二節	條件觀測化為間接觀測	137
第三節	繫數解法	140
第四節	未知數函數之中誤差	149
第五節	應用問題舉例	161
第六節	分組平差法	170
第七節	最適當之權分配	173
第八節	等值觀測	178
第九節	附有條件方程之間接觀測	181
第十節	附有未知數之條件觀測	186
習題		188
第六章	三角測量測站平差	191
第一節	測站平差之目的	191
第二節	觀測個別角度時之測站平差	192
第三節	史賴伯全組合測角法之測站平差	196
第四節	完全方向測回之測站平差	202
第五節	不完全方向測回之測站平差	211
第六節	不完全方向測回之簡略計算法	215

習題	217
第七章 圖形平差	219
第一節 圖形條件方程式	219
第二節 三角網內圖形條件之數目	222
第三節 四邊形之圖形條件	224
第四節 四邊形按角度平差	233
第五節 四邊形按方向平差	239
第六節 多邊中點形之平差	246
第七節 三角網平差舉例	247
第八節 方向觀測之簡略平差法	266
第九節 應用不完全方向測回觀測時之圖形平差法	268
第十節 間接觀測平差法	275
習題	278
第八章 三角網之其他條件	281
第一節 基綫條件	281
第二節 方位角及拉伯拉斯條件	283
第三節 經緯度條件	287
第四節 環形網之平差	294
第九章 交会定點法	296
第一節 概論	296
第二節 方位角及距離之平面改正	297
第三節 方向角與平面坐標之關係	300
第四節 方向係數之計算方法	302
第五節 前方交会定點法	303
第六節 后方交会定點法	318
第七節 聯合交会定點法	322
第八節 雙點交会定點法	325
第九節 網狀交会定點法	333
第十節 有距離條件之交会定點法	337
第十一節 誤差橢圓	339
第十章 大規模三角網或三角鎖之平差	356
第一節 概論	356
第二節 克里格爾分組平差法	358
第三節 博爾茲擴展法	360
第四節 三角網法方程式之點綫表示法	365
第五節 三角形單鎖之擴展式	367

第六節	多邊中點形及單鎖環形網之擴展式	370
第七節	四邊形單鎖之擴展式	373
第八節	博爾茲代替法	392
第九節	以大地綫代替三角鎖	400
第十節	約爾得之大地綫平差法	402
第十一節	愛格之大地綫嚴格平差法	403
第十二節	鮑威法	406
第十三節	坐標平差法	407
第十一章	誤差理論	413
第一節	偶然誤差之或是率	413
第二節	根據算學平均值之假定求誤差定律	414
第三節	根據原子誤差之假定以求誤差定律	417
第四節	誤差或是率函數之展開	420
第五節	誤差分佈曲綫	422
第六節	最小二乘法之理論	423
第七節	中誤差、平均誤差及或是誤差之幾何意義	424
第八節	理論與實際之比較	427
第九節	由有限數日之真誤差計算所得 t 及 m 值之中誤差	430
第十節	直接觀測及間接觀測內中誤差計算之精度	433
第十一節	最大誤差之理論	437
第十二章	觀測誤差之檢查	439
第一節	檢查之目的	439
第二節	誤差前置符號數目之檢查	440
第三節	誤差前置符號順序之檢查	440
第四節	正負誤差大小之檢查	441
第五節	阿卑檢查法	442
第六節	修正之阿卑檢查法	443
第七節	全組誤差分佈之檢查	443
第八節	改正數之檢查	444
第九節	实例	445
附錄一	方向係數表	447
附錄二	中英德文名詞對照表	454

第七版序

本書系在1943年以前寫成，1947年初版，至1956年共印行六版，未曾作較大修訂。

最近高等教育出版社反映讀者的需要，建議將本書加以修訂再版，并提出對本書修訂的意見，其中主要的一點是希望把誤差理論一部分移到本書的最后去。

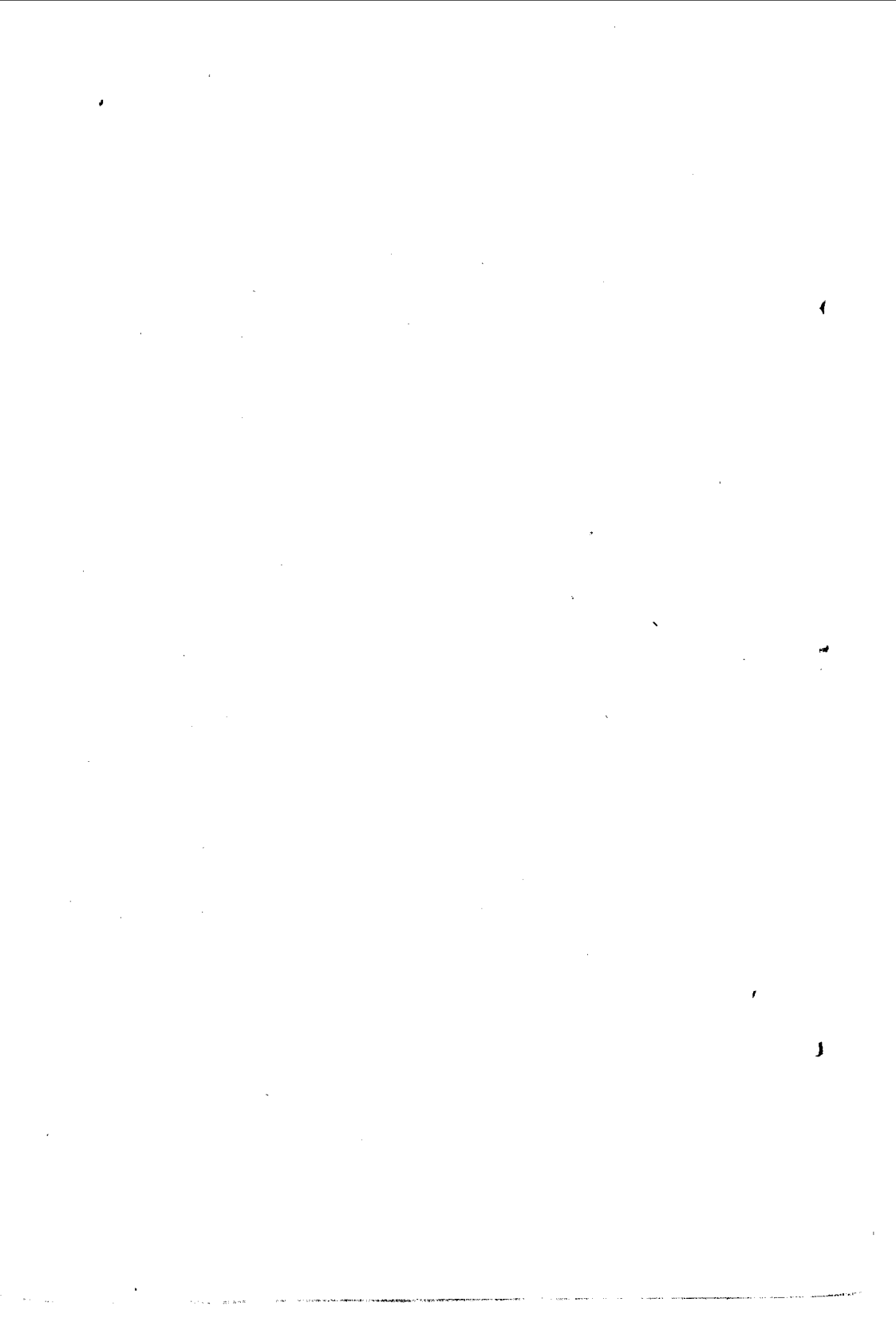
著者的考慮是，幾年以來在測量平差方法方面已經有若干新的發展，特別是在蘇聯發展的一些新的方法，在修訂時應當吸收到本書內向讀者介紹；此外，本書用文言體裁對於目前也是不合適的。因此，認為對本書加以徹底改編是非常必要的。

但是由於修訂限期急迫，而著者目前工作又都很忙，不能專心從事於修訂本書，所以商得原出版機關的同意，在這一版里，暫不考慮全部修訂，而僅作局部的重點的修改，以便早日再版，供測量作業人員和教學的參考。

由於局部修訂，本書的上述兩個缺點也就不可能在這一版中消除，這是著者感到十分遺憾的。好在現在國內已有幾本蘇聯最小二乘法教材翻譯出版，而本書內容在許多方面都可作為那幾本教材的補充和參考資料，對於讀者還可以有一定的幫助。

著 者

一九五六年二月



緒 論

觀測結果不能免于誤差，故吾人永遠不能測得一量之絕對真值。倘吾人丈量一直綫之長度多次，則多次觀測結果必不能盡等；或者吾人觀測一個多邊形之所有內角，其內角總和亦不能與理論上應得之值完全相等。凡此均系由于觀測結果必然受許許多種誤差影響之故。

多次丈量一直綫長度之結果既然不能互相符合，究應取何值作為最後結果？或者測定多邊形之所有內角，而其總和不等于幾何上應有之值，究應如何改正各內角之觀測結果，使之符合于幾何要求？此種問題稱為平差問題。

由上所述可見，平差問題系由于有多餘觀測存在而產生。如果直綫長度僅丈量一次，即無任何理由不取此次丈量之結果作為最後結果，于是即無平差問題。在測定多邊形內角時，倘多邊形系由 n 個內角所組成，而測量時僅測定其中 $n-1$ 個內角，另一個內角乃由此 $n-1$ 個內角之觀測結果根據幾何定理推算而得，于是亦不存在平差問題。

但在各種測量工作中，為檢查觀測結果有無錯誤，並為提高最後結果之精度，通常要求必須作多餘觀測。是以在各種測量結果中通常均有平差問題。

消除觀測結果中所存在之矛盾為平差之主要目的。但在消除矛盾時不能隨意對觀測結果加以取捨，或任意給予改正，而必須提出要求，消除矛盾後所得之最後結果必須為最可靠之結果，亦即與其真值可能最為接近之結果。是以解決平差問題時不能採用任意之方法，而必須根據觀測誤差之理論制定一種方法，使由此法所得之結果最為可靠。

最初研究此問題者為德人高斯(Gauss)。1794年高斯正在大學讀

書，年僅十七歲。當時觀測小行星 ceres 在天球上之位置，獲得一系列結果，而欲由此結果推算該行星之軌道。由於有多餘觀測存在，用不同組觀測結果計算行星軌道即將獲得不同之結果。究竟如何始能充分利用所有觀測結果以便獲得決定行星軌道各原素之最可靠數值，此乃高斯所欲解決之問題。

高斯根據下列考慮出發：倘用同等精度測定一量多次，既不能對某一次結果特別重視，亦不能對某次結果廢棄不用，唯一合理之辦法系取各次觀測結果之算學平均值為其最後結果。此種考慮實際上系假定觀測結果所受誤差之影響純系偶然性質，所以不能對某一次觀測結果採取任何偏信態度。在此假定之下，高斯進一步研究偶然誤差之特性，得出偶然誤差之理論，並以此理論為基礎得出最小二乘法作為解決平差問題之基本方法。

1806 年法人勒戎德爾亦獨立提出同樣方法用以計算彗星的軌道，為文發表，並首次正式命名此方法為“最小二乘法”。

最小二乘法可以簡單解釋如下：如果以同等精度觀測一個或多個未知量，並有多餘觀測，則在求定各未知量之最後結果中，必須如此改正每次觀測值，使所有改正數之平方和為最小。如用符號表示，則最小二乘法的原理可以寫成

$$[vv] = \text{最小},$$

v 代表在各觀測值上所應加之改正數。

高斯研究之結果於 1809 年始發表，遲於勒戎德爾。但高斯系從誤差理論出發對此方法加以論證之第一人，同時高斯又推証出如何由平差結果估計觀測值以及最後平差值精度之方法。

在此後由高斯領導所進行之天文與大地測量工作中，彼曾廣泛應用最小二乘法解決測量中各項問題。對於誤差理論，對於各種類型平差問題之處理方法以及對於在平差計算中解算法方程式之方法等，高斯均有更深入之研究，作出了重要之貢獻。