工程数学

积分变换

周肇锡 编

国防工业出版社

工程数学

积分变换

周肇锡 编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学 院等 三院校数学教研室合编的“工程数学”七个分册之一。本 分 册介绍科学技术中最常用的两种积分变换——富里哀变换 和 拉普拉斯变换，并着重于基本概念、基本理论以及各类应用。书 中附有适量习题，书后附习题答案。

本书可作为高等工科院校试用教材，也可供有关科 技 人员参考。

工 程 数 学

积 分 变 换

周肇锡 编

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

787×1092 1/32 印张 4 1/8 87千字

1982年7月第一版　1984年9月第二次印刷　印数 23,201—33,600册

统一书号：15034·2308　　定价：0.44元

前　言

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的“工程数学”教材之一。全套教材共分七册出版：矢量分析、复变函数、积分变换、线性代数、计算方法、数学物理方程与特殊函数、概率论与数理统计。

本册介绍科学技术中最常用的两种积分变换——富里哀变换和拉普拉斯变换，并着重于基本概念、基本理论以及各类应用。

书中加有“*”号的内容可根据情况予以取舍，排小字的内容供阅读时参考。各部分附有适量习题，书后附习题答案。阅读本书只需具备一般高等数学知识。

本册由西北工业大学周肇锡编写，由北京航空学院刘运华主审。参加本书审稿的还有西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院、沈阳航空工业学院、南昌航空工业学院等院校数学教研室的同志。我们对在本书编写过程中给予大力支持和提供宝贵意见的所有同志，在此一并致以衷心感谢。

由于水平所限，书中缺点和错误在所难免，诚望同志们批评指正。

编　者

积 分 变 换

引　言

所谓积分变换，就是通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换。详言之，就是把某函数类A中任意的函数$f(x)$，乘上一个确定的二元函数$K(x,\ p)$，然后计算积分，即

$$F(p)=\int_a^b f(x)K(x,\ p)dx$$

这样，便变成了另一个函数类B中的函数$F(p)$。其中积分域是确定的。$K(x,\ p)$的形式，决定着变换的不同名称。通常把$K(x,\ p)$称作核；把$f(x)$称作像原函数，把$F(p)$称作$f(x)$的像函数；在一定条件下，它们是一一对应的，并且变换是可逆的。

用积分变换去解微分方程或其它方程，是基于这样一种想法：假若不容易从原方程中直接求得未知的解x，那么，便去求它的某种变换的像函数X，然后再由求得的X去找x。这种变换的选择，当然应当使得把x的方程变成x的像函数X的方程是容易解出的。

在初等数学里，也有类似的作法。例如，欲解代数方程$x^3=\sqrt[4]{a}\times b^5/c$，其中$a$、$b$、$c$为已知。先对方程两边取对数，把求未知数$x$的问题，转化为求它的对数$X=\lg x$的问题，求出了$X$，再取反对数，$x$也就得出了。以上运算过程，是离不开对数表的。

目　　录

从上例中我们得到的启示是：

1．对特定类型的方程，必须选用适宜的“变换”。上例取对数，便可以用较简单的运算代替相对来说是复杂的运算(具体地说，是用加、减运算代替乘、除，用乘、除代替乘方、开方)，若对上述方程取其它“变换”，例如取正弦，显然是不能成功的。

2．对这种“变换”，应制成备查用的“变换表”，它的作用与对数表的作用相同。

下面分别介绍最常用的积分变换：富里哀变换、富里哀正弦变换、富里哀余弦变换与拉普拉斯变换。先讨论它们的定义与性质，在此基础上制成最简单的变换表。有了这些准备，才有可能讨论应用——解某些微分方程及其它方程。

第一章　富里哀变换

我们从函数在区间（$-l$，l）上的富里哀级数展开式出发，讨论当 $l\to+\infty$ 时它的极限形式，得出函数的富里哀积分展开式。然后在这个基础上定义富里哀(Fourier)变换。

§1.1　富里哀积分公式

设函数 $f(t)$ 在每一个有限区间（$-l$，l）上满足狄义赫里条件●，并且在区间（$-\infty$，$+\infty$)上绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt=Q<+\infty$$

由富里哀级数理论中的狄义赫里定理知，在区间($-l$，l）内的连续点上，$f(t)$ 可用三角级数表示，即有

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right) \quad (1.1.1)$$

其中

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{n\pi u}{l}du \quad (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(u)\sin\frac{n\pi u}{l}du \quad (n=1,2,3,\cdots) \end{cases} \quad (1.1.2)$$

● 狄义赫里（Dirichlet）条件，参看樊映川等编《高等数学》（下册），1964年版第57页。

将（1.1.2）式代入（1.1.1）式，整理后可得

$$f(t)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(u)du$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{n\pi}{l}(t-u)du \quad (1.1.3)$$

若在间断点上，则上式左端应换成$[f(t-0)+f(t+0)]/2$。

根据假设，l 是任意的。因此，对周期函数 $f(t)$ 来说，不论 t 为何值，都可由富里哀级数（1.1.1）或(1.1.3)表示，只要选择 l 为周期之半。但对非周期函数 $f(t)$ 来说，不论 l 选得多么大，级数（1.1.1）或（1.1.3）只能表示（$-l$，l）内所有的 t 所对应的函数值 $f(t)$，但仍不能表示整个 t 轴上在区间（$-l$，l）外面的 t 所对应的函数值 $f(t)$。

为了表示非周期函数 $f(t)$ 在所有 t 上的值，很自然地想到在式（1.1.3）中令 $l\to+\infty$。这时，其中第一项显然趋向 0，因为

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(u)du\right|\leqslant\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(u)|du$$

$$\leqslant\frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|du=\frac{Q}{2l}\to 0$$

回到式（1.1.3）中剩下的级数项，注意其中余弦符号后的因子$\frac{n\pi}{l}$，是级数(1.1.1)的每一个简谐分量$\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right)$的频率。设简谐分量的频率为 α。它依次取离散值

$$\alpha_1=\frac{\pi}{l},\quad \alpha_2=\frac{2\pi}{l},\quad \cdots,\quad \alpha_n=\frac{n\pi}{l},\quad \cdots$$

频率α的增量为确定的常数

$$\triangle\alpha_i=\alpha_{i+1}-\alpha_i=\frac{\pi}{l},\quad (i=1,2,\cdots,n,\cdots)$$

用这种记号，式（1.1.3）中的级数项可改写成

$$\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{n\pi}{l}(t-u)du$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-l}^{l}f(u)\cos\alpha_n(t-u)du\right]\triangle\alpha_n$$

其中的和式，好像是区间（0，$+\infty$）上的α的函数●

$$\phi(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(t-u)du$$

的“积分和”$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\phi(\alpha_n)\triangle\alpha_n$。取$l\to+\infty$时，$\triangle\alpha_i=\frac{\pi}{l}\to 0$，

上述积分和变成了对α的积分

$$\int_0^{+\infty}\phi(\alpha)d\alpha=\int_0^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(t-u)du$$

这样，我们就由式（1.1.3）得到

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(t-u)du \quad (1.1.4)$$

这个由富里哀级数得来的公式，叫做函数$f(t)$的富里哀积分展开式。如此，我们引出命题。

● 注意这里的“好像”二字，这是因为和式内的积分限与$\phi(\alpha)$的积分限不同。这样的推导显然不严格，不能当作富里哀积分公式的证明。严格的证明，可参考《数学分析原理》。

富里哀积分定理 若函数 $f(t)$ 在任何有限区间上满足狄义赫里条件，并且在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 上是绝对可积的，则在所有连续点上，下面等式成立

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(t-u)du$$

若是有间断点的话，在这样的点上，只须用

$$\frac{f(t+o)+f(t-o)}{2}$$

来代换公式左端的 $f(t)$。这是因为富里哀级数式 (1.1.1) 中，在间断点上，也是这样替换的。

利用差角余弦公式，富里哀积分公式 (1.1.4)变为与富里哀级数相对应的形式

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}[A(\alpha)\cos\alpha t+B(\alpha)\sin\alpha t]d\alpha \tag{1.1.5}$$

其中

$$\begin{cases} A(\alpha)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha u\,du \\ B(\alpha)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin\alpha u\,du \end{cases} \tag{1.1.6}$$

从以上两式，我们可以看出它们与三角级数展开式及其系数公式 (1.1.1)、(1.1.2) 的相似性。在这里，我们得到了无穷区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 上非周期函数 $f(t)$ 依简谐振动的展开式，这里这些振动的频率 α 由 0 连续改变到 $+\infty$，而系数 $A(\alpha)$，$B(\alpha)$ 在其结构上就像富里哀系数，它们给出了振幅分布的规律以及初相位对频率 α 的依赖关系。对于有限区间 $(-l,\ l)$，那里的简谐分量 $a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}=A_n\sin\left(\frac{n\pi t}{l}+p_n\right)$的频率，则是取等差的离

散值$\frac{n\pi}{l}$，$(n=0,1,2\cdots)$。

〔**例 1**〕 将函数$f(t)=\begin{cases}1, & |t|<2, \\ 0, & |t|\geqslant 2,\end{cases}$展开成富里哀积分。

解 把函数代入（1.1.6）得

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2}\cos\alpha u\,du=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}$$

$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2}\sin\alpha u\,du=0$$

从而由（1.1.5）式得

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}A(\alpha)\cos\alpha t\,d\alpha$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\alpha t\sin 2\alpha}{\alpha}d\alpha \quad (t\neq\pm 2)$$

当$t=\pm 2$时，积分应收敛为$\frac{f(\pm 2+0)+f(\pm 2-0)}{2}$ $=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$，它与$f(\pm 2)$不同。

〔**例 2**〕 试利用广义积分公式$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$[●]验证例 1 结论的正确性。

解 容易知道

● 这个积分公式的推证请参看《复变函数》有关部分。它也可以由计算二重积分$\iint\limits_{(D)}e^{-xy}\sin x\,dxdy$得到，其中积分域$(D)$为第一象限。容易算得，先对$x$积分得$\frac{\pi}{2}$，而先对$y$积分得$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$。

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin at}{t}dt=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & (a>0)\\ 0, & (a=0)\\ -\frac{\pi}{2}, & (a<0)\end{cases}\qquad(1.1.7)$$

事实上，$a=0$ 时，结果是显然的。$a\neq 0$ 时，令$|a|t=x$，则

$$\sin at=\frac{a}{|a|}\sin|a|t=\frac{a}{|a|}\sin x,\quad dt=\frac{1}{|a|}dx$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin at}{t}dt=\frac{a}{|a|}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{a}{|a|}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & (a>0)\\ -\frac{\pi}{2}, & (a<0)\end{cases}$$

现在回到例1结论中的富里哀积分，并利用式（1.1.7）

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha t\sin 2\alpha}{\alpha}d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2+t)\alpha}{\alpha}d\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2-t)\alpha}{\alpha}d\alpha$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (2+t>0)\\ 0, & (2+t=0)\\ -\frac{1}{2}, & (2+t<0)\end{cases}+\begin{cases}\frac{1}{2}, & (2-t>0)\\ 0, & (2-t=0)\\ -\frac{1}{2}, & (2-t<0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & (|t|<2)\\ \frac{1}{2}, & (|t|=2)\\ 0, & (|t|>2)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} f(t), & (t\neq\pm 2) \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & (t=\pm 2) \end{cases}$$

这里我们不准备介绍富里哀积分定理的严格证明，仅用以上实例来验证这个定理，从而从一个侧面去理解该定理的正确性。

若$f(t)$是偶函数，则式（1.1.6）中第一式的被积函数是偶函数，第二式的被积函数是奇函数，于是推知

$$\begin{cases} A(\alpha)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\cos \alpha u\, du \\ B(\alpha)=0 \end{cases}$$

所以（1.1.5）式变为

$$f(t)=\int_0^{+\infty} A(\alpha)\cos \alpha t\, d\alpha$$

即
$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos \alpha t\, d\alpha\int_0^{+\infty} f(u)\cos \alpha u\, du$$

$$(-\infty<t<+\infty) \qquad (1.1.8)$$

若$f(t)$是奇函数，则同样可得

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin \alpha t\, d\alpha\int_0^{+\infty} f(u)\sin \alpha u\, du$$

$$(-\infty<t<+\infty) \qquad (1.1.9)$$

若$f(t)$只是确定在半区间（0，$+\infty$）上，我们可

以把它延续● 到区间（$-\infty$，0）上，或者成为偶函数，或者成为奇函数。这样，对于区间（0，$+\infty$）上的同一个函数 $f(t)$，便得到了两个富里哀积分展开式，依次为：

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\alpha t\,d\alpha\int_0^{+\infty}f(u)\cos\alpha u\,du \quad (t\geqslant 0) \tag{1.1.10}$$

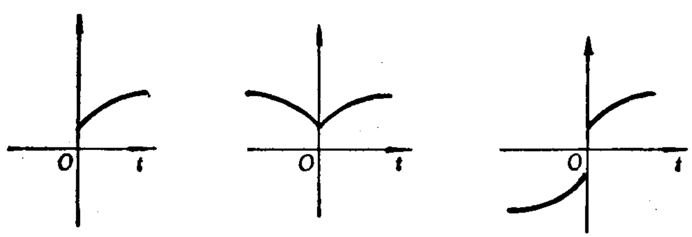
$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\alpha t\,d\alpha\int_0^{+\infty}f(u)\sin\alpha u\,du \quad (t>0) \tag{1.1.11}$$

它们分别称为函数 $f(t)$ 在区间（0，$+\infty$）上的富里哀余弦积分展开式及富里哀正弦积分展开式。前者可以在 $t=0$ 时成立，是因为函数 $f(t)$ 作为偶函数延续之后，在 $t=0$ 必然连续。

§1.2 富里哀变换的定义

在本节，我们将定义富里哀变换、富里哀余弦变换、富里哀正弦变换，并导出它们的反演公式。定义之前，要先对上节富里哀积分公式变形。

● 关于延续的概念，请看下面说明图



定义在（0，$+\infty$）上的函数　　按偶函数延续的结果　　按奇函数延续的结果

（一）富里哀积分公式的复数形式

富里哀积分公式（1.1.4）中，其内层积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)$ $\times\cos\alpha(t-u)du$ 是 α 的偶函数，记为 $\phi(\alpha)$，所以有

$$\int_{0}^{+\infty}\phi(\alpha)d\alpha=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\alpha)d\alpha$$

这样，式（1.1.4）变成了全对称的形式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(t-u)du \qquad (1.2.1)$$

又由于与 $\phi(\alpha)$ 相对应的含参变量的积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)$ $\times\sin\alpha(t-u)du$，是 α 的奇函数，根据奇函数的积分性质，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin\alpha(t-u)du=0$$

上式乘虚数 i，加于式（1.2.1）的右端，再由尤拉公式得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{i\alpha(t-u)}du$$

即 $$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha t}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\alpha u}du \qquad (1.2.2)$$

这是富里哀积分公式的复数形式，富里哀变换定义在它的基础上。

（二）富里哀变换的定义

在（1.2.2）中，令

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\alpha u}du^{㊀} \qquad (1.2.3)$$

㊀ 式（1.2.3）和（1.2.4）中的广义积分，是哥西（Cauchy）意义下的主值，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}x(t)dt$$