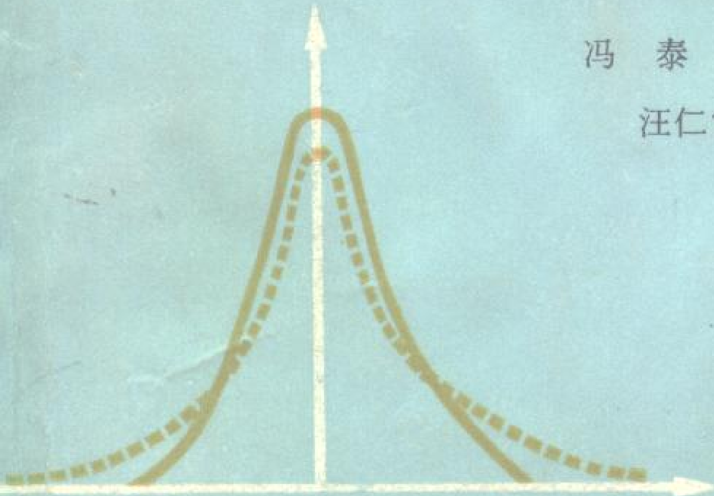
GAILU TONGJI FUDAO



冯 泰 王玉孝 编

汪仁官 审阅

概率统计辅导

中国铁道出版社

概 率 统 计 辅 导

编　者

冯　泰（中央广播电视大学）

王玉孝（北 京 邮 电 学 院）

审 阅 者

汪仁官（北京大学）

中 国 铁 道 出 版 社

1 9 8 4年·北京

内 容 简 介

本书是结合北京大学刘婉如等编写的《概率统计讲义》和广播电视大学本课程的教学大纲编写的辅导教材，全书共七章，每章均扼要地介绍了有关概念、定理和公式，选择了部分典型例题进行剖析，并附有练习题，帮助读者搞清基本概念，提高分析问题和解决问题的能力。

本书可供电大、职工大学及高等工程院校师生参考使用。

概率统计辅导

冯 泰　王玉孝 编

汪仁官 审阅

中国铁道出版社出版

责任编辑 于宗远

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 1/32 印张：15.5 字数：358千

1984年5月第1版 1984年5月第1次印刷

印数：0001—60,000册 定价：1.90元

前　　言

概率论是从数量侧面研究随机现象规律性的数学学科，理论严谨，应用广泛，并有其独特的概念和方法，同时与其它数学分支有着密切的联系，它是近代数学的重要组成部分。

随着概率论的发展，应用概率论的结果深入地分析研究统计资料，观察某些现象并发现其内在规律性，进而作出一定精确程度的判断和预测，将这些研究结果加以归纳整理，形成一定的数学概型。这就是数理统计研究的问题。

由于概率统计的方法有其独特之处，初学者往往感到它的基本概念难懂，习题难做，方法不易掌握。本书就这些难点，由浅入深，有针对性地给予辅导。为便于读者学习，我们逐章按四个部分编写：

内容提要部分，说明本章所要学习的基本内容；给出概率统计的基本概念与定义、重要定理以及公式，并作必要的解释。

要求部分，以广播电视大学本课程的教学大纲为依据，具体地说明对该章内容应掌握的程度。

例题分析部分，这是本书的重要内容。这里选择了大量的例题，用例题的形式体现各章的基本内容与具体要求，并从概念、计算、证明及应用四个方面对概率统计中的典型问题进行剖析，辅导学生掌握基本概念，提高分析问题和解决问题的能力。

练习题部分，这里列出侧重于概念的A组题目和侧重于计算的B组题目，并附有参考答案或提示，供读者自我检查之用。

在编写过程中，承蒙北京大学数学系汪仁官同志给予支持和帮助，并对本书作了审订，在此致以谢意。

由于编者水平有限，时间仓促，书中错误在所难免，请读者批评指正。

编　者

1982年9月

目　录

第一篇 概 率 论

第一章 随机事件与概率

一、内 容 提 要

（一）随机事件及其概率

1. 随机试验

对于随机现象的观察称为随机试验，记作E或E_1, E_2，……。随机试验具有下列特征：

（1）在不变的一组条件S下，可以重复进行多次；

（2）各次试验的结果不一定相同，而且每次试验之前不能预先判断哪一个结果发生；

（3）所有可能的试验结果是预先可以明确的。

2. 基本事件和样本空间

对于某个随机试验，它的一个指定的试验结果出现，称为这试验的一个基本事件，记作ω或ω_1，ω_2，……。由于一个试验结果对应于一个基本事件，所以一试验的试验结果也用ω或ω_1，ω_2，……表示。

一个随机试验的所有可能的试验结果的全体，称为该试验的样本空间，记作U或U_1，U_2，……。

3. 随机事件、必然事件和不可能事件

对于某个随机试验，在一次试验中可能出现也可能不出现的事情，称为这试验的随机事件，记作A，B，……。

通常一个随机事件由这试验的若干个（有限或无限）试验结果构成。在试验中，称一随机事件出现了，当且仅当它

所包含的一个试验结果出现了。基本事件也是随机事件。

随机事件的两个极端情况：

必然事件——在任何一次试验中必然出现的事件，记作 U。

不可能事件——在任何一次试验中都不可能出现的事件，记作 V。

必然事件是由试验的所有可能的试验结果构成的事件，不可能事件是不包含任何试验结果的事件。

4. 随机事件的概率

定义：对于某个随机试验的每一个随机事件 A，都有一个确定的数字 p 与之对应，用这个数字来标志相应的随机事件 A 出现的可能性的大小，并称 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A)=p$。

对于必然事件 U，$P(U)=1$；对于不可能事件 V，$P(V)=0$。对于一般的随机事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

5. 事件频率的稳定性

将一个试验重复独立地作 n 次，事件 A 出现的次数 μ 称为事件 A 在这 n 次试验中的频数，比值 $\frac{\mu}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率。实践证明，当试验的次数很大时，频率 $\frac{\mu}{n}$ 在某一数值 p 附近摆动，而且一般来说随着试验次数的增多，这种摆动的幅度愈变愈小。这就是事件频率的稳定性，这是定义事件概率的基础。数值 p 就是事件 A 的概率。

在实际问题中，当 n 很大时，常用事件 A 的频率 $\frac{\mu}{n}$ 作为它的概率 p 的近似值。这称为概率的统计定义。

对于某个试验的两个随机事件 A，B，$p(A)<p(B)$ 意味着在 n 次重复独立试验中，如果 n 足够大，那么一般来说

事件A出现的次数μ_1比事件B出现的次数μ_2少一些。

（二）古典概型

在概率论发展的历史上，人们最早进行研究的一类随机试验，称为古典概率模型，它具有如下特征：

1. 所有可能的试验结果只有有限多个，即试验的基本事件，只有有限多个；

2. 根据某种“对称性”可以判断所有基本事件都是等可能的。

对于具有以上特征的随机试验，设它所有可能的基本事件的总数为n，A为一随机事件，它包含m个试验结果，则可用简单的计算公式

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.1}$$

来计算$P(A)$。有时也称m为对A有利的基本事件数，因此

$$P(A)=\frac{\text{对}A\text{有利的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

（三）事件的相互关系及其运算

在考虑两个事件之间的相互关系以及在若干个事件进行运算时，总假定它们是同一随机试验的事件。这一点是重要的。

1. 事件之间的相互关系

（1）包含关系　A，B为二事件，如果A出现必然导致B出现，则称事件B包含事件A或者A包含在B中，记作$B\supset A$或$A\subset B$。

$A\subset B$等价于A所包含的每一个试验结果都是B所包含的，见图1—1。

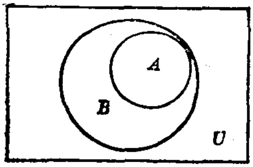


图 1—1

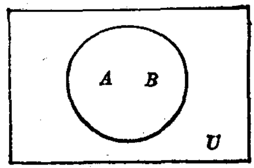


图 1—2

（2）相等关系　A，B为二事件，如果$A\subset B$而且$B\subset A$，则称事件A与B相等，记作$A=B$。

$A=B$等价于它们是由相同的试验结果构成的，即A，B不过是同一随机事件的两种不同的表达方式，见图1—2。

（3）互不相容　A，B为二事件，如果A，B同时出现是不可能的，则称A，B二事件互不相容。

A，B互不相容等价于它们不包含相同的试验结果，见图1-3。

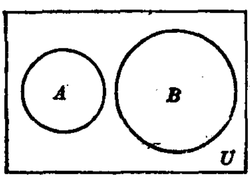


图 1—3

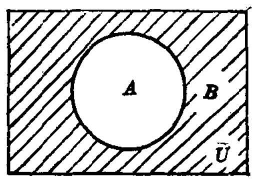


图 1—4

（4）互逆关系　A，B为二事件，如果A，B互不相容，而且在任何一次试验中A，B中必然有一个出现，则称A，B互逆，或互为对立事件。

A，B互为对立事件等价于它们不包含相同的试验结果，而且任何一个试验结果不是包含在A中就是包含在B中，见图1—4。

注：i）A，B互逆$\Longrightarrow A$，B互不相容；A，B互不相容$\not\Longrightarrow A$，B互逆。

ii）对任何事件A，$V\subset A\subset U$。

2. 事件的运算

（1）事件的和 “二事件A，B中至少有一个出现”是一个事件，称此事件为A，B的和，记作$A+B$或$A\cup B$。

$A+B$是由所有或包含在A中的或包含在B中的试验结果构成，见图1－5。

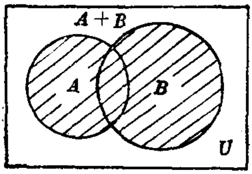


图 1－5

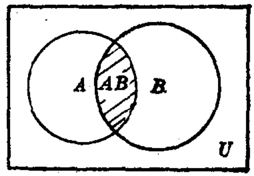


图 1－6

事件“A_1，$A_2\cdots$，A_n中至少有一个出现”称为A_1，A_2，…，A_n的和，记作$A_1+A_2+\cdots+A_n$或$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，也可以记作$\sum\limits_{k=1}^{n}A_k$或$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$。

事件“A_1，A_2，……，A_n，……中至少有一个出现”称为A_1，A_2……，A_n，……的和，记作$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$或$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$。

注：i）若二事件A，B满足$A\subset B$，则$A+B=B$。

ii）对任何事件A有$V+A=A$，$U+A=U$。

iii）$A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$。

（2）事件的积 “二事件A，B同时出现”是一个事件，称此事件为A，B的积，记作AB或$A\cap B$。

AB是由所有既包含在A中又包含在B中的试验结果构成，见图1－6。

事件“$A_1,A_2,\cdots,A_n$同时出现”称为$A_1,A_2,\cdots,A_n$的积，记作$A_1A_2\cdots A_n$或$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，也可以记作

$\prod_{k=1}^{n} A_k$ 或 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$。

事件"$A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$同时出现"称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$, $\cdots$的积，记作$\prod_{k=1}^{\infty} A_k$ 或 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$。

注：Ⅰ）如果$A \subset B$，则$AB = A$。

Ⅱ）$AV = V$，$AU = A$。

Ⅲ）$AB \subset A$，$AB \subset B$。

Ⅳ）A，B互不相容等价于$AB = V$。

（3）事件的差　"A出现而B不出现"是一个事件，称此事件为A与B的差，记作$A - B$。

$A - B$是由所有包含在A中而不包含在B中的试验结果构成，见图1—7。

注：$A + B = A + (B - A) = B + (A - B)$，而$A$与$(B - A)$，$B$与$(A - B)$互不相容。

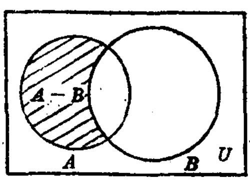


图 1—7

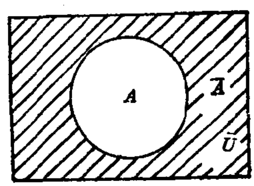


图 1—8

（4）事件的逆　"A不出现"是一个事件，称此事件为A的逆，记作$\overline{A}$。

$\overline{A}$是由所有不包含在A中的试验结果构成，见图1—8。

注：Ⅰ）$\overline{(\overline{A})} = A$。

Ⅱ）$A - B = A\overline{B}$。

Ⅲ）A，B互逆等价于$A = \overline{B}$或$B = \overline{A}$。

事件的运算法则：

（Ⅰ）交换律

$$A+B=B+A \qquad AB=BA$$

（Ⅱ）结合律

$$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$ABC=(AB)C=A(BC)$$

（Ⅲ）分配律

$$A(B+C)=AB+AC$$

$$A+BC=(A+B)(A+C)$$

（Ⅳ）对偶性

$$\overline{\sum_{k=1}^{n} A_k}=\prod_{k=1}^{n}\overline{A}_k \qquad \overline{\sum_{k=1}^{\infty} A_k}=\prod_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k$$

$$\overline{\prod_{k=1}^{n} A_k}=\sum_{k=1}^{n}\overline{A}_k \qquad \overline{\prod_{k=1}^{\infty} A_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k$$

（四）概率的加法公式

事件的概率具有以下性质，其中最重要的是概率的加法公式：

性质（Ⅰ）$P(V)=0$，$P(U)=1$，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

性质（Ⅱ）若A，B互不相容，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1.2}$$

推广：（i）若$A_1, A, \cdots, A_n$两两互不相容，则

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \tag{1.3}$$

（ii）若$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$两两互不相容，则

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \tag{1.4}$$

（iii）$P(A)=1-P(\overline{A})$。

(iv) 若$A\subset B$，则$P(A)\leqslant p(B)$。

性质（Ⅲ）对任二事件A，B

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad (1.5)$$

推广：设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是n个事件

$$P\left(\sum_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{i<j=2}^{n}P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{i<j<k=3}^{n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n) \qquad (1.6)$$

式(1.2)～(1.6)都称为概率的加法公式，特别地把式(1.5)和(1.6)称为一般加法公式，因为它们没有互不相容的限制。

注：两个以上事件两两互不相容与它们不能同时发生是不同的，见自我检查题A组第6题。

（五）条件概率与乘法公式

定义：如果A，B为同一随机试验的两个事件，而且$P(A)\neq 0$，则称在A出现的条件下B出现的概率为事件B关于A的条件概率，记作$P(B|A)$。

条件概率$P(B|A)$与事件的原概率有如下的关系

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

或

$$P(AB)=P(B|A)P(A) \qquad (1.7)$$

式（1.7）称为概率的乘法公式。

条件概率的使用常常是这样的：先利用试验方法求得$P(B|A)$及$P(A)$，再利用式（1.7）计算$P(AB)$。

乘法公式的一般形式是

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots$$

$$P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

其中$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})\neq 0$。

（六）事件的独立性

称二事件A，B是相互独立的，如果

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.8}$$

称$A_1,A_2,\cdots,A_n$是相互独立的，如果对任意整数$k(2\leqslant k\leqslant n)$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}) \tag{1.9}$$

其中$i_1,i_2,\cdots i_k$是满足下面不等式的任意k个自然数：

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$$

注：Ⅰ）当$P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$时

$$P(B|A)=P(B)\Longleftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)\Longleftrightarrow P(A|B)=P(A)$$

由此可理解A，B相互独立的含义。

Ⅱ）当$P(A)=0$或$P(A)=1$，则A与任何事件B相互独立；特别地V与任何事件相互独立，U与任何事件相互独立。

Ⅲ）若A与B相互独立，则

$$A与\overline{B} \qquad \overline{A}与B \qquad \overline{A}与\overline{B}$$

也都相互独立。

Ⅳ）三个或三个以上事件两两独立却不一定相互独立，见自我检查题A组第8题。

事件的独立性的使用常常是这样的：由试验方式来判定试验的独立性，由试验的独立性来判定事件的独立性，则可利用（1.8）式计算AB的概率，利用（1.9）式计算$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})$的概率。

（七）全概公式

如果事件组$A_1,A_2,\cdots,A_n$满足：

（1）$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互不相容，而且$P(A_k)>0$（$k=1,2,\cdots,n$）；

（2） $A_1+A_2+\cdots+A_n=U$，则对任一事件B皆有

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k) \qquad (1.10)$$

称（1.10）式为全概率公式，简称全概公式。

运用全概公式的关键是找出满足(1)、(2)两条的事件组，称为完备事件组。当直接计算$P(B)$较为困难，而$P(A_k)$，$P(B|A_k)$（$k=1,2,\cdots,n$）的计算较为简单时，则可利用全概公式计算$P(B)$。

（八）逆概公式

设事件组$A_1,A_2,\cdots,A_n$满足全概公式的(1)、(2)两条，则对任意事件B（$P(B)\neq 0$）有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)} \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (1.11)$$

称（1.11）式为逆概公式，又称贝叶斯公式。

（九）独立试验序列概型

一个试验在条件不变的前提下重复进行n次，称为n次重复独立试验。

需要指出的是同时观察在相同的条件下进行的n个试验，与重复观察同一个试验n次有相同的意义。

独立试验序列概型概率的计算公式：

设在单次试验中，事件A出现的概率为p（$0<p<1$），则在n次重复试验中

$$P\{\text{“}A\text{恰出现}k\text{次”}\}=C_n^k p^k q^{n-k} \tag{1.12}$$

$(q=1-p,\ k=0,1,2,\cdots,n)$

当p很小n很大时，有下列近似公式

$$P\{\text{“}A\text{恰出现}k\text{次”}\}\approx\frac{(np)^k}{k!}e^{-np} \tag{1.13}$$

当p不是很小，而n很大时，有下列近似公式

$$P\{\text{“}A\text{恰出现}k\text{次”}\}\approx\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x_k^2} \tag{1.14}$$

其中 $x_k=\dfrac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$。

二、要　　求

1． 理解随机试验的特征。对于一个具体的试验要弄清试验方式：什么叫一次试验？一个试验结果指的是什么？

会表达简单的随机试验的有关随机事件。对于一个具体的事件要弄清它由哪些试验结果构成？什么叫做它出现了？

2． 理解事件的概率的含义，以及概率的统计定义方法和依据。掌握概率的古典定义方法和适用范围，并能计算基本的古典概型的概率问题。

3． 熟练掌握事件的四种基本关系和四种基本运算，以及四种基本运算法则。

4． 理解概率的基本性质，会使用概率的加法公式。

5． 理解条件概率的含义，会利用乘法公式和事件的独立性计算积事件的概率。

6． 会利用全概公式和逆概公式计算典型问题。

7． 会利用独立试验序列概型概率的计算公式计算典型问题。