信号数字处理的数学原理

程乾生编著

石油工业出版社

信号数字处理的数学原理

程乾生 编著

石油工业出版社

内 容 提 要

全书主要讨论信号数字处理的基本概念、原理和方法，包括富氏级数与离散谱、富氏积分与连续谱、抽样定理与离散信号、滤波与褶积、有限离散富氏变换与快速富氏变换、一维与二维滤波、最小平方滤波、递归滤波、相关分析及 Z 变换、希尔伯特变换、信号加工等。

本书可供地球物理、无线电通信、自动化、生物医学及其它从事信号数字处理的科技人员和大专院校师生参考。

信号数字处理的数学原理

程乾生 编著

*

石油工业出版社出版

(北京和平里七区十六号楼)

民 族 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行

*

开本 $850\times1168\ ^1/_{32}$ 印张 $17\ ^{13}/_{16}$ 字数 472 千字 印数1—16,350

1979 年 7 月北京第 1 版 1979 年 7 月北京第 1 次印刷

书号 15037·2029 定价 2.20 元

前　　言

随着计算机的广泛应用，信号数字处理技术在越来越多的科学技术领域内得到迅速发展。用计算机进行信号数字处理，速度快、精度高、手段多，这是人工方法或模拟方法信号处理所不能比拟的。在我国的社会主义建设中，信号数字处理技术在许多科技部门已经取得显著成果。在我国向四个现代化的进军中，信号数字处理技术必将得到更加广泛的应用和深入的发展。

本书主要讨论信号数字处理的基本概念、原理和方法。要求读者具有高等数学的基本知识。在写法上，力求通俗易懂、深入浅出。具有微积分和线性代数基本知识的读者，可了解本书的大部分内容，并且可以把这些内容用于实践中。在本书个别章节的论述中，需要的数学知识较深些，对于一般的读者，只要求了解结论就行了。在内容安排上，为了使研究的问题比较集中、篇幅不至过大，我们讨论的是确定性信号数字处理的数学原理。这些原理对随机信号数字处理来说也是基本的。随机信号分析需要用概率统计的观点与方法，因此，我们认为在这本书的基础上另写一本随机信号数字处理的书，对读者更为合适。在每章后面附有问题，这些问题既作为练习，又是作为正文的一种补充。

全书共分十三章。第一、二章讨论富氏级数和富氏积分，我们不作详细的数学论证(关于富氏分析的数学专著是很多的)，而是着重建立信号的频谱概念。第三章系统地讨论了各种情况下的抽样问题，这是连续信号转化为离散信号的理论基础。第四章讨论滤波概念及与褶积的关系，在这一章还讨论了Z变换和希尔伯特变换。第五章讨论有限离散富氏变换和快速富氏变换，以及用快速富氏变换计算褶积所引起的循环褶积问题。第六章讨论一维频率滤波的设计问题，主要讨论了镶边和时窗函数两种方法。第七

章讨论相关的概念和性质，以及相关函数的快速计算问题。第八章着重从理论上讨论物理可实现信号(单边信号)的性质。第九章讨论最小平方滤波及其解法。第十章讨论最小相位信号的确定。第十一章讨论递归滤波的概念、性质和设计。第十二章讨论信号的插值、平滑和加工。第十三章讨论二维信号和二维滤波。

这本书是作者在教学工作和实际工作的基础上写成的❶。在写书的整个过程中，曾与许多同志进行过有益的讨论，并得到他们的帮助和鼓励。作者感谢北京大学数学系已故的闵嗣鹤教授，感谢北京大学和其它单位的甘章泉、仇桂生、许云、牟永光等同志。

由于作者水平有限，书中有错误和不当之处，诚恳希望读者提出批评指正。

作者

1977 年 12 月

❶ 书中的有些内容曾收集在文献［3］、［5］、［7］、［8］等之中。文献［1］、［2］是在［5］的基础上整理而成的。

目 录

第一章　富氏级数与离散频谱

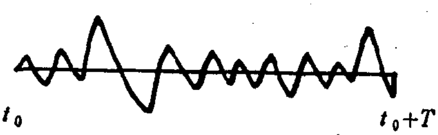
一个复杂的连续信号，一般来说，总可以分解为许多简单的正弦信号的叠加。这样，我们就可以进一步了解复杂的连续信号的性质，并对它进行分析和处理。

把有限区间上的复杂波分解为简谐波的叠加，这在数学上称之为富氏级数，或富里叶(Fourier)级数。在这一章，我们着重从工程应用角度讨论这一问题。

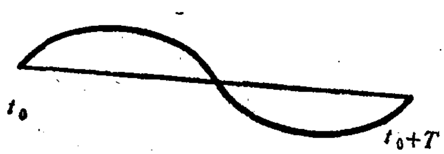
§ 1. 把有限区间上的复杂波分解为简谐波的叠加——富氏级数

1. 问题的提出

在工程信号的记录中，我们取其一段，即在有限时间区间 $[t_0,\ t_0+T]$ 上考察信号（见图 1.1 (1)），它往往是一种复杂的信号。



(1) 有限区间上的复杂波



(2) 正弦波 $A\sin 2\pi f_0(t-t_0)$　$f_0=\frac{1}{T}$

图 1.1　复杂波与简单波

在物理中，大家都知道，最简单的振动波是简谐波，把这个振动波记录下来，所得到的信号可以用正弦函数表示出来，即为正弦波

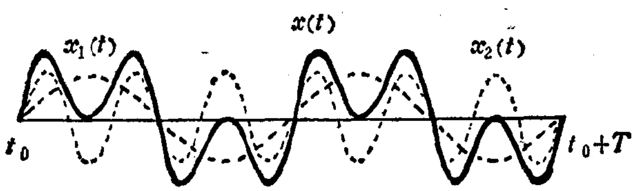
$$A\sin(2\pi f t+\varphi)$$

其中 A 为振幅，φ 为初相位，f 为频率，$\frac{1}{f}$ 为谐波的周期。

对长度为 T 的时间区间而言，最简单的频率为 $f_0=\frac{1}{T}$，因

为这时正弦波的周期正好就是 T（见图 1. 1(2)）。再稍微简单一些的频率就是 $f_n=nf_0$，这时正弦波的周期为 $\frac{1}{f_n}=\frac{T}{n}$。因此，对长度为 T 的时间区间而言，我们称 $f_0=\frac{1}{T}$ 为基频，$A\sin(2\pi f_0 t+\varphi)$ 为基波，$A\sin(2\pi n f_0 t+\varphi)$ 为 n 次谐波。

当几个这样的谐波叠加在一起的时候，得到的波就比较复杂了，见图 1.2。



$x(t)=x_1(t)+x_2(t)$

图 1.2 两个谐波的叠加

我们的问题是：任一个复杂波能否分解成简谐波的叠加呢？一般地说是可以的，下面进行讨论。

2. 把有限区间上的复杂波分解为简谐波的叠加

复杂波与简谐波是有本质区别的，但它们又可以相互转化：当许多振幅、相位、频率都不同的简谐波叠加在一起的时候，可以得到一个复杂波；反过来，在一般情况下，一个复杂波又可以分解为许多简谐波的叠加。这就是说，复杂波与简谐波是矛盾的对立统一。

在区间 $[t_0, t_0+T]$ 上，对于一个不是十分复杂的波 $x(t)$，可以分解为有限多个简谐波的叠加：

$$x(t)=A_0+\sum_{n=1}^{N}A_n\sin(2\pi n f_0 t+\varphi_n)$$

上式右端实际上是一个常量加上 N 个谐波。

但是，对一个十分复杂的波 $x(t)$ 而言，有限个谐波的叠加是得不到它的，只有当 N 增长到无限时(记为 $N\to+\infty$)，也即当

无限个谐波叠加在一起时(数学上表示为 $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{N} A_n\sin(2\pi n f_0 + \varphi_n)$，把它记作 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\sin(2\pi n f_0 t+\varphi_n)$)，才能得到一个复杂波 $x(t)$：

$$x(t)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin(2\pi n f_0 t+\varphi_n) \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

其中 $f_0=\dfrac{1}{T}$为基频，A_0 为 $x(t)$的直流分量或常数分量，$A_n\sin(2\pi n f_0 t+\varphi_n)$ 为 $x(t)$ 的 n 次谐波，特别地，把 1 次谐波称为基波。

关系式(1-1-1)还可改换成别的形式。把 n 次谐波变为

$$A_n\sin(2\pi n f_0 t+\varphi_n)$$
$$=A_n\cos\varphi_n\sin 2\pi n f_0 t+A_n\sin\varphi_n\cos 2\pi n f_0 t$$

令

$$a_n=A_n\cos\varphi_n,\ b_n=A_n\sin\varphi_n,\ b_0=A_0 \qquad (1\text{-}1\text{-}2)$$

则(1-1-1)变为

$$x(t)=b_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\sin 2\pi n f_0+b_n\cos 2\pi n f_0 t) \qquad (1\text{-}1\text{-}3)$$

(1-1-1)式或(1-1-3)式都称为 $x(t)$ 的富氏级数展开式，(1-1-1)或(1-1-3)的右端称为 $x(t)$的富氏级数。

但是在工程中使用更方便的是复数形式的富氏级数，下面进行讨论。

§ 2. 复数形式的富氏级数　离散频谱

1. 关于复数的说明

我们先对复数作一简要说明，这对以后的讨论是有用的。

1) 关于复数的表示与运算

从字面上看，“复”就是“重复”的意思。复数 z 就是用两个实

数 x 和 y 表示的一个数，记为

$$z=x+iy$$

其中 $i=\sqrt{-1}$，x 称为复数 z 的实部，记为 Rez；y 称为复数 z 的虚数，记为 Imz。

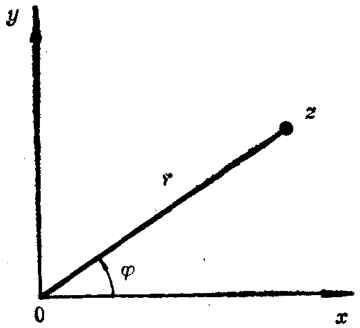


图 1.3 复数 z 的表示

复数 z 还可表示为

$$z=re^{i\varphi}$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，称为复数 z 的模，记为 $|z|$；$\varphi=\text{arctg}\dfrac{y}{x}$，称为复数 z 的幅角，记为 Argz（见图 1.3）。

在复数的运算中，下面的尤拉公式

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

起着重要作用。如果把上式中的 φ 取为 $-\varphi$，则有 $e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$。把上面两式相加或相减便得

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)\\ \sin\varphi&=\frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}2\text{-}1)$$

最后介绍一下复数的共轭运算。复数 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 为

$$\bar{z}=x-iy$$

z 与 $\bar{z}$ 相乘便得模 $|z|$ 的平方，即

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2$$

两个复数 z_1、z_2 相乘，其共轭复数 $\overline{z_1\cdot z_2}$ 等于分别的共轭复数相乘，即

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$$

由尤拉公式可得到

$$\overline{e^{i\varphi}}=e^{-i\varphi}$$

2）关于复函数的运算

设 $u(t)$、$v(t)$ 为两个普通的取实值的函数，由它们可构成一

个复函数

$$g(t)=u(t)+iv(t)$$

复函数 $g(t)$的共轭函数为

$$\overline{g(t)}=u(t)-iv(t)$$

复函数 $g(t)$的微商为

$$\frac{dg(t)}{dt}=\frac{du(t)}{dt}+i\frac{dv(t)}{dt}$$

复函数 $g(t)$的积分为

$$\int_{t_1}^{t_2}g(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}u(t)dt+i\int_{t_1}^{t_2}v(t)dt$$

复函数 $g(t)$ 的积分 $\int_{t_1}^{t_2}g(t)dt$ 是一个复数，它的共轭复数为

$$\overline{\int_{t_1}^{t_2}g(t)dt}=\int_{t_1}^{t_2}\overline{g(t)}dt$$

例：计算 $\int_{t_0}^{t_0+T}e^{i2\pi n\frac{1}{T}t}dt$, n 为整数。

因为

$$\int_{t_0}^{t_0+T}e^{i2\pi n\frac{1}{T}t}dt=\int_{t_0}^{t_0+T}\cos 2\pi n\frac{1}{T}tdt+i\int_{t_0}^{t_0+T}\sin 2\pi n\frac{1}{T}tdt$$

分别计算上式右边的两个定积分，可得到

$$\int_{t_0}^{t_0+T}e^{i2\pi n\frac{1}{T}t}dt=\begin{cases}T & n=0\\0 & n\neq 0\end{cases}\tag{1-2-2}$$

上面的积分是通过分别计算实部与虚部两个积分得到的，但是也可以直接进行积分，即把 i 当成一个普通的常数，让它参与积分运算中的变量替换，例如

$$\int_{t_0}^{t_0+T}e^{i2\pi n\frac{1}{T}t}dt \quad (当\ n\neq 0 时)$$

$$=\frac{1}{i2\pi\frac{n}{T}}\int_{i2\pi\frac{n}{T}t_0}^{i2\pi\frac{n}{T}(t_0+T)} e^u du(令\ u=i2\pi\frac{n}{T}t)$$

$$=\frac{1}{i2\pi\frac{n}{T}}e^{i2\pi\frac{n}{T}t_0}(e^{i2\pi\frac{n}{T}\cdot T}-1)=0$$

3）关于虚数 $i=\sqrt{-1}$ 的说明

在 16 世纪中叶，人们在解一元二次方程 $x^2+1=0$ 时，就遇到了负数开平方 $\sqrt{-1}$ 的问题。然而，在实数范围内，负数是不能开平方的，即在实数范围内是找不到方程 $x^2+1=0$ 的根的。人们就把 $\sqrt{-1}$ 称为虚数，由于在当时的生产实践中还没有发现它的用途，人们一直无法理解它。后来，随着流体力学等科学技术的发展，提出了关于实数概念进一步扩充的问题，在 19 世纪末以后，关于虚数的理论才逐渐发展起来，成为解决自然科学问题的一个重要的数学工具。从这个意义上来看，我们说虚数不虚，虚数 $\sqrt{-1}$ 归根结底是客观事物量的关系的反映。但是我们还必须看到，虚数 $\sqrt{-1}$ 并不具有实在性，它是数学上理论思维发展到一定阶段的产物，否则就必然陷入唯心主义泥坑，和承认神灵世界的存在没有多大差别（参看恩格斯《自然辩证法》，人民出版社，1971 年，第 44 页）。

2. 复数形式的富氏级数

由 (1-2-1)知，$\sin 2\pi nf_0t$ 和 $\cos 2\pi nf_0t$ 可用 $e^{i2\pi nf_0t}$ 和 $e^{-i2\pi nf_0t}$ 表示，把这种表示代入(1-1-3)便得

$$x(t)=b_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\sin 2\pi nf_0t+b_n\cos 2\pi nf_0t)$$

$$=b_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\frac{-i}{2}(e^{i2\pi nf_0t}-e^{-i2\pi nf_0t})\right.$$

$$\left.+b_n\frac{1}{2}(e^{i2\pi nf_0t}+e^{-i2\pi nf_0t})\right]$$

$$=b_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}(b_n-ia_n)e^{i2\pi nf_0t}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(b_n+ia_n)e^{-i2\pi nf_0t}\right]$$

令

$$\begin{cases} c_0=b_0 \\ c_n=\dfrac{1}{2}(b_n-ia_n),\ n\geqslant 1 \\ c_{-n}=\dfrac{1}{2}(b_n+ia_n),\ n\geqslant 1 \end{cases} \tag{1-2-3}$$

则有

$$x(t)=c_0+\sum_{n=1}^{+\infty}c_ne^{i2\pi nf_0t}+\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}\ e^{-i2\pi nf_0t}$$

如果我们让 n 从 -1 取到 $-\infty$，则上式第三项就可表示为 $\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n\ e^{i2\pi nf_0t}$，于是便得到 $x(t)$ 的复数形式的富氏级数展开式

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\ e^{i2\pi nf_0t} \tag{1-2-4}$$

我们知道，对于 n 次谐波，它的频率是 nf_0，在实际中，频率都是正的。但是在式(1-2-4)中，n 可取负整数，nf_0 就变成了“负频率”。那么，“负频率”是怎样出现的呢？从实数形式的富氏级数(1-1-3)过渡到复数形式的富氏级数(1-2-4)，关键在于用复数表示正弦与余弦(见(1-2-1))，因此，“负频率”完全是由复数表示引起的。但是由以后的分析可以知道，富氏级数的复数形式，应用起来方便，同时也有很明确的物理意义。

在(1-2-4)中，我们称 c_n 为富氏级数的系数。系数 c_n 完全由 $x(t)$ 确定，现在来求 c_n。

设 $x(t)$ 的变化范围为有限区间 $[t_0, t_0+T]$，用 $e^{-i2\pi mf_0t}$ 乘(1-2-4)式两边，并从 t_0 到 t_0+T 进行积分，得

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-i2\pi mf_0t}\,dt=\int_{t_0}^{t_0+T}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\ e^{i2\pi(n-m)f_0t}\right)dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\int_{t_0}^{t_0+T}e^{i2\pi(n-m)f_0t}dt$$

我们注意到 $f_0=\frac{1}{T}$,那么由(1-2-2)知,积分 $\int_{t_0}^{t_0+T}e^{i2\pi(n-m)f_0t}dt$,当 $n-m=0$ 时为 T，当 $n-m\neq0$ 时为 0，因此上面等式右边的和号中只剩下 $n=m$ 那一项，即剩下 c_mT，所以

$$c_m=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)e^{-i2\pi mf_0t}dt,\ m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

我们把以上结果写成定理形式。

富氏级数展开定理：有限区间$[t_0, t_0+T]$上的函数 $x(t)$，在一定条件下，可以展成富氏级数

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\ e^{i2\pi nf_0t},t\in[t_0,t_0+T] \text{❶} \tag{1-2-5}$$

其中 $f_0=\frac{1}{T}$, $i=\sqrt{-1}$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\ e^{-i2\pi nf_0t}\ dt \tag{1-2-6}$$

这个定理在不同的条件下有不同严格、详细的数学论述，我们给出其中的一种：设 $x(t)$在$[t_0, t_0+T]$上连续，或者只有有限个第一类间断点，并在 $[t_0, t_0+T]$上具有有限个极大、极小点，则有

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{i2\pi nf_0t}=\begin{cases}x(t) & \text{当 } t \text{ 是 } x(t) \text{的连续点时}\\ \frac{1}{2}[x(t-0)+x(t+0)] & \text{当 } t \text{ 是 } x(t) \text{的间断点时}\\ \frac{1}{2}[x(t_0)+x(t_0+T)] & \text{当 } t=t_0 \text{ 或 } t_0+T \text{ 时}\end{cases}$$

❶ 符号"∈"表示属于的意思，$t\in[t_1,t_2]$ 表示 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$，$t\in[t_1,t_2)$ 表示 $t_1\leqslant t<t_2$。