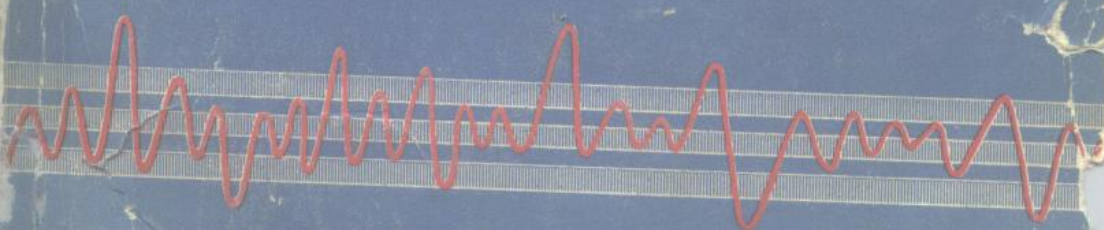


信号数字处理的 数学原理

程乾生编著



石油工业出版社

信号数字处理的 数学原理

程乾生 编著

石油工业出版社

内 容 提 要

全书主要讨论信号数字处理的基本概念、原理和方法,包括富氏级数与离散谱、富氏积分与连续谱、抽样定理与离散信号、滤波与褶积、有限离散富氏变换与快速富氏变换、一维与二维滤波、最小平方滤波、递归滤波、相关分析及 Z 变换、希尔伯特变换、信号加工等。

本书可供地球物理、无线电通信、自动化、生物医学及其它从事信号数字处理的科技人员和大专院校师生参考。

信号数字处理的数学原理

程 乾 生 编著

*

石油工业出版社出版

(北京和平里七区十六号楼)

民 族 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行

*

开本 $850 \times 1168^{1/32}$ 印张 $17^{13/16}$ 字数 472 千字 印数 1—16,350

1979 年 7 月北京第 1 版 1979 年 7 月北京第 1 次印刷

书号 15037·2029 定价 2.20 元

前 言

随着计算机的广泛应用,信号数字处理技术在越来越多的科学技术领域内得到迅速发展。用计算机进行信号数字处理,速度快、精度高、手段多,这是人工方法或模拟方法信号处理所不能比拟的。在我国的社会主义建设中,信号数字处理技术在许多科技部门已经取得显著成果。在我国向四个现代化的进军中,信号数字处理技术必将得到更加广泛的应用和深入的发展。

本书主要讨论信号数字处理的基本概念、原理和方法。要求读者具有高等数学的基本知识。在写法上,力求通俗易懂、深入浅出。具有微积分和线性代数基本知识的读者,可了解本书的大部分内容,并且可以把这些内容用于实践中。在本书个别章节的论述中,需要的数学知识较深些,对于一般的读者,只要求了解结论就行了。在内容安排上,为了使研究的问题比较集中、篇幅不至过大,我们讨论的是确定性信号数字处理的数学原理。这些原理对随机信号数字处理来说也是基本的。随机信号分析需要用概率统计的观点与方法,因此,我们认为在这本书的基础上另写一本随机信号数字处理的书,对读者更为合适。在每章后面附有问题,这些问题既作为练习,又是作为正文的一种补充。

全书共分十三章。第一、二章讨论富氏级数和富氏积分,我们不作详细的数学论证(关于富氏分析的数学专著是很多的),而是着重建立信号的频谱概念。第三章系统地讨论了各种情况下的抽样问题,这是连续信号转化为离散信号的理论基础。第四章讨论滤波概念及与褶积的关系,在这一章还讨论了 Z 变换和希尔伯特变换。第五章讨论有限离散富氏变换和快速富氏变换,以及用快速富氏变换计算褶积所引起的循环褶积问题。第六章讨论一维频率滤波的设计问题,主要讨论了镶边和时窗函数两种方法。第七

章讨论相关的概念和性质,以及相关函数的快速计算问题。第八章着重从理论上讨论物理可实现信号(单边信号)的性质。第九章讨论最小平方滤波及其解法。第十章讨论最小相位信号的确定。第十一章讨论递归滤波的概念、性质和设计。第十二章讨论信号的插值、平滑和加工。第十三章讨论二维信号和二维滤波。

这本书是作者在教学工作和实际工作的基础上写成的^①。在写书的整个过程中,曾与许多同志进行过有益的讨论,并得到他们的帮助和鼓励。作者感谢北京大学数学系已故的闵嗣鹤教授,感谢北京大学和其它单位的甘章泉、仇桂生、许云、牟永光等同志。

由于作者水平有限,书中有错误和不当之处,诚恳希望读者提出批评指正。

作者

1977年12月

^① 书中的有些内容曾收集在文献[3]、[5]、[7]、[8]等之中。文献[1]、[2]是在[5]的基础上整理而成的。

目 录

前言

第一章 富氏级数与离散频谱	1
§ 1. 把有限区间上的复杂波分解为简谐波的叠加 ——富氏级数	1
§ 2. 复数形式的富氏级数 离散频谱	3
§ 3. 富氏级数展开定理的说明	11
问题	15
第二章 富氏积分与连续频谱	17
§ 1. 富氏变换 信号与频谱	17
§ 2. 几类基本信号的频谱	21
§ 3. 频谱的基本性质	27
§ 4. 富氏积分与富氏级数的关系 连续谱抽样定理	33
§ 5. 冲激函数—— δ 函数	36
问题	42
第三章 抽样定理与离散信号	45
§ 1. 连续信号的离散化 抽样定理 1 和抽样定理 1' 离散信号的频谱	45
§ 2. 抽样定理 2 和奈魁斯特(Nyquist)频率	55
§ 3. 由离散信号恢复成连续信号	59
§ 4. 抽样定理 3 (重抽样定理)	63
§ 5. 抽样与假频 抽样或重抽样的注意事项	65
§ 6. 关于离散信号的两个问题	68
问题	72
第四章 滤波与褶积	74
§ 1. 连续信号的滤波与褶积	74

§ 2. 离散信号的滤波与褶积	77
§ 3. 信号的能谱与能量等式 功率谱与平均功率等式	82
§ 4. 离散信号与频谱的简化表示	87
§ 5. 离散信号的 Z 变换	90
§ 6. 两个时间函数或序列相乘的频谱	98
§ 7. 滤波器的性质和组合(串联、并联、反馈)	103
§ 8. 希尔伯特变换与实信号的复数表示(解析信号)、 包络、瞬时相位、瞬时频率	113
问题	125
第五章 有限离散富氏变换和快速富氏变换 (FFT)	132
§ 1. 有限离散富氏变换	132
§ 2. 快速富氏变换(FFT)	142
§ 3. 有限离散富氏变换的循环褶积	157
§ 4. 应用快速富氏变换进行频谱分析	167
§ 5. 关于快速富氏变换的几点说明	173
问题	176
第六章 一维频率滤波	182
§ 1. 理想滤波器及其存在的问题	182
§ 2. 镶边理想滤波器	187
§ 3. 时窗函数	199
§ 4. 最佳时窗函数	209
§ 5. 一维频率滤波的实现	222
问题	231
第七章 相关分析	233
§ 1. 相关的基本概念 相关与褶积的关系	233
§ 2. 相关函数的性质	240
§ 3. FFT 在计算相关函数中的应用	250
§ 4. 多道相关	259
问题	269
第八章 物理可实现信号(单边信号)的性质	274

§ 1. 物理可实现信号(单边信号) 有限长度物理可实现信号的分类	274
§ 2. 能量有限的物理可实现信号 纯相位物理可实现信号和全通滤波器	285
§ 3. 相位延迟与群延迟的概念 最小相位信号	290
§ 4. 全通滤波器的能量延迟性质 最小延迟信号	297
§ 5. 反信号(或反滤波)	307
§ 6. Z 变换为多项式和有理分式时的最小相位性质	312
§ 7. 正实信号 最小相位滤波器的串联与并联	317
§ 8. 纯相位信号和最小延迟信号的收敛性质	325
问题	337
第九章 最小平方滤波	340
§ 1. 最小平方滤波	340
§ 2. 最小平方反滤波	348
§ 3. 波形切除反滤波与预测反滤波	357
§ 4. 最小平方滤波方程(陶布利兹方程)的解法及其解的性质	366
§ 5. 解最小平方滤波方程(陶布利兹方程)中的白噪化问题	376
§ 6. 加权最小平方滤波和约束最小平方滤波	380
§ 7. 多道滤波和多道最小平方滤波	388
问题	394
第十章 最小相位信号的确定	398
§ 1. 把已知信号转换为最小相位信号	398
§ 2. 由自相关函数确定最小相位信号	403
§ 3. 由振幅谱确定最小相位信号	413
§ 4. 关于反滤波方法的总结	418
问题	422
第十一章 递归滤波	424
§ 1. 递归滤波及其稳定性	424

§ 2. 递归滤波的设计方法之一——最小平方法	441
§ 3. 递归滤波的设计方法之二——用 Z 平面法设计简 单递归滤波	455
§ 4. 递归滤波的设计方法之三——由模拟滤波器转换 为数字递归滤波器	461
§ 5. 巴特沃斯递归滤波	472
§ 6. 切比雪夫递归滤波	478
§ 7. 关于递归滤波设计和实现的说明	493
问题	501
第十二章 信号的插值、平滑和加工	504
§ 1. 曲线与信号的插值	504
§ 2. 两条曲线的拼接与时变滤波 最小平方曲线拟合 与信号的趋势分析	512
§ 3. 曲线或信号的平滑	517
§ 4. 信号的加权处理	524
§ 5. 提高曲线尖锐度的方法	526
问题	529
第十三章 二维信号和二维滤波	531
§ 1. 二维连续信号和二维频谱	531
§ 2. 二维离散信号和二维频谱、二维 Z 变换	535
§ 3. 二维有限离散富氏变换	540
§ 4. 二维滤波	543
问题	558
译名对照表	560
参考文献	560

第一章 富氏级数与离散频谱

一个复杂的连续信号,一般来说,总可以分解为许多简单的正弦信号的叠加。这样,我们就可以进一步了解复杂的连续信号的性质,并对它进行分析和处理。

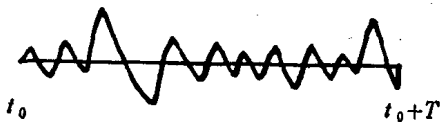
把有限区间上的复杂波分解为简谐波的叠加,这在数学上称之为富氏级数,或富里叶(Fourier)级数。在这一章,我们着重从工程应用角度讨论这一问题。

§ 1. 把有限区间上的复杂波分解为简谐波的叠加——富氏级数

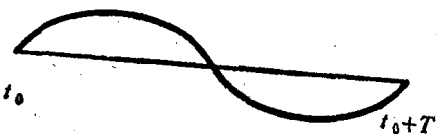
1. 问题的提出

在工程信号的记录中,我们取其一段,即在有限时间区间 $[t_0, t_0+T]$ 上考察信号(见图 1.1 (1)),它往往是一种复杂的信号。

在物理中,大家都知道,最简单的振动波是简谐波,把这个振动波记录下来,所得到的信号可以用正弦函数表示出来,即为正弦波



(1) 有限区间上的复杂波



(2) 正弦波 $A \sin 2\pi f_0(t-t_0)$ $f_0 = \frac{1}{T}$

图 1.1 复杂波与简单波

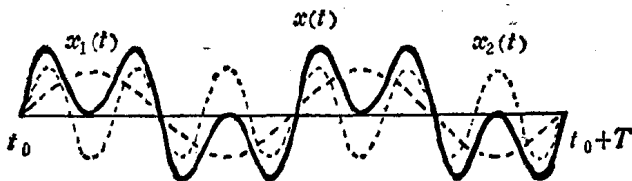
$$A \sin(2\pi f t + \varphi)$$

其中 A 为振幅, φ 为初相位, f 为频率, $\frac{1}{f}$ 为谐波的周期。

对长度为 T 的时间区间而言,最简单的频率为 $f_0 = \frac{1}{T}$, 因

为这时正弦波的周期正好就是 T (见图 1.1(2))。再稍微简单一些的频率就是 $f_n = n f_0$, 这时正弦波的周期为 $\frac{1}{f_n} = \frac{T}{n}$ 。因此, 对长度为 T 的时间区间而言, 我们称 $f_0 = \frac{1}{T}$ 为基频, $A \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$ 为基波, $A \sin(2\pi n f_0 t + \varphi)$ 为 n 次谐波。

当几个这样的谐波叠加在一起的时候, 得到的波就比较复杂了, 见图 1.2。



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

图 1.2 两个谐波的叠加

我们的问题是: 任一个复杂波能否分解成简谐波的叠加呢? 一般地说是可以的, 下面进行讨论。

2. 把有限区间上的复杂波分解为简谐波的叠加

复杂波与简谐波是有本质区别的, 但它们又可以相互转化: 当许多振幅、相位、频率都不同的简谐波叠加在一起的时候, 可以得到一个复杂波; 反过来, 在一般情况下, 一个复杂波又可以分解为许多简谐波的叠加。这就是说, 复杂波与简谐波是矛盾的对立统一。

在区间 $[t_0, t_0 + T]$ 上, 对于一个不是十分复杂的波 $x(t)$, 可以分解为有限多个简谐波的叠加:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \sin(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$

上式右端实际上是一个常量加上 N 个谐波。

但是, 对一个十分复杂的波 $x(t)$ 而言, 有限个谐波的叠加是得不到它的, 只有当 N 增长到无限时 (记为 $N \rightarrow +\infty$), 也即当

无限个谐波叠加在一起时(数学上表示为 $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N A_n \sin(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$), 把它记作 $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$, 才能得到一个复杂波 $x(t)$:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(2\pi n f_0 t + \varphi_n) \quad (1-1-1)$$

其中 $f_0 = \frac{1}{T}$ 为基频, A_0 为 $x(t)$ 的直流分量或常数分量, $A_n \sin(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$ 为 $x(t)$ 的 n 次谐波, 特别地, 把 1 次谐波称为基波。

关系式(1-1-1)还可改换成别的形式。把 n 次谐波变为

$$\begin{aligned} & A_n \sin(2\pi n f_0 t + \varphi_n) \\ &= A_n \cos \varphi_n \sin 2\pi n f_0 t + A_n \sin \varphi_n \cos 2\pi n f_0 t \end{aligned}$$

令

$$a_n = A_n \cos \varphi_n, b_n = A_n \sin \varphi_n, b_0 = A_0 \quad (1-1-2)$$

则(1-1-1)变为

$$x(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \sin 2\pi n f_0 t + b_n \cos 2\pi n f_0 t) \quad (1-1-3)$$

(1-1-1)式或(1-1-3)式都称为 $x(t)$ 的富氏级数展开式, (1-1-1)或(1-1-3)的右端称为 $x(t)$ 的富氏级数。

但是在工程中使用更方便的是复数形式的富氏级数, 下面进行讨论。

§ 2. 复数形式的富氏级数 离散频谱

1. 关于复数的说明

我们先对复数作一简要说明, 这对以后的讨论是有用的。

1) 关于复数的表示与运算

从字面上看, “复”就是“重复”的意思。复数 z 就是用两个实

数 x 和 y 表示的一个数, 记为

$$z = x + iy$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, x 称为复数 z 的实部, 记为 $\operatorname{Re} z$; y 称为复数 z 的虚数, 记为 $\operatorname{Im} z$ 。

复数 z 还可表示为

$$z = r e^{i\varphi}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 称为复数 z 的模, 记为 $|z|$; $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$, 称为复数 z 的幅角, 记为 $\operatorname{Arg} z$ (见图 1.3)。

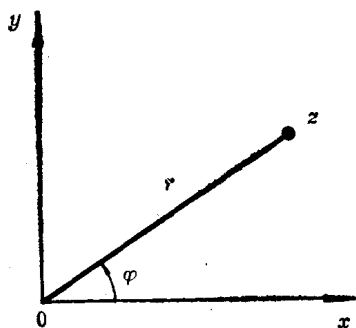


图 1.3 复数 z 的表示

在复数的运算中, 下面的尤拉公式

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

起着重要作用。如果把上式中的 φ 取为 $-\varphi$, 则有 $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ 。把上面两式相加或相减便得

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\ \sin \varphi &= \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \end{aligned} \right\} \quad (1-2-1)$$

最后介绍一下复数的共轭运算。复数 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 为

$$\bar{z} = x - iy$$

z 与 $\bar{z}$ 相乘便得模 $|z|$ 的平方, 即

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

两个复数 z_1, z_2 相乘, 其共轭复数 $\overline{z_1 \cdot z_2}$ 等于分别的共轭复数相乘, 即

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

由尤拉公式可得到

$$\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$$

2) 关于复函数的运算

设 $u(t), v(t)$ 为两个普通的取实值的函数, 由它们可构成一

个复函数

$$g(t) = u(t) + iv(t)$$

复函数 $g(t)$ 的共轭函数为

$$\overline{g(t)} = u(t) - iv(t)$$

复函数 $g(t)$ 的微分为

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + i \frac{dv(t)}{dt}$$

复函数 $g(t)$ 的积分为

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt + i \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

复函数 $g(t)$ 的积分 $\int_{t_1}^{t_2} g(t) dt$ 是一个复数, 它的共轭复数为

$$\overline{\int_{t_1}^{t_2} g(t) dt} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{g(t)} dt$$

例: 计算 $\int_{t_0}^{t_0+T} e^{i2\pi n \frac{1}{T} t} dt$, n 为整数。

因为

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{i2\pi n \frac{1}{T} t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \cos 2\pi n \frac{1}{T} t dt + i \int_{t_0}^{t_0+T} \sin 2\pi n \frac{1}{T} t dt$$

分别计算上式右边的两个定积分, 可得到

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{i2\pi n \frac{1}{T} t} dt = \begin{cases} T & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1-2-2)$$

上面的积分是通过分别计算实部与虚部两个积分得到的, 但是也可以直接进行积分, 即把 i 当成一个普通的常数, 让它参与积分运算中的变量替换, 例如

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{i2\pi n \frac{1}{T} t} dt \quad (\text{当 } n \neq 0 \text{ 时})$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{i2\pi \frac{n}{T}} \int_{i2\pi \frac{n}{T} t_0}^{i2\pi \frac{n}{T} (t_0+T)} e^u du \quad (\text{令 } u = i2\pi \frac{n}{T} t) \\
 &= \frac{1}{i2\pi \frac{n}{T}} e^{i2\pi \frac{n}{T} t_0} (e^{i2\pi \frac{n}{T} \cdot T} - 1) = 0
 \end{aligned}$$

3) 关于虚数 $i = \sqrt{-1}$ 的说明

在 16 世纪中叶, 人们在解一元二次方程 $x^2 + 1 = 0$ 时, 就遇到了负数开平方 $\sqrt{-1}$ 的问题。然而, 在实数范围内, 负数是不能开平方的, 即在实数范围内是找不到方程 $x^2 + 1 = 0$ 的根的。人们就把 $\sqrt{-1}$ 称为虚数, 由于在当时的生产实践中还没有发现它的用途, 人们一直无法理解它。后来, 随着流体力学等科学技术的发展, 提出了关于实数概念进一步扩充的问题, 在 19 世纪末以后, 关于虚数的理论才逐渐发展起来, 成为解决自然科学问题的一个重要的数学工具。从这个意义上来看, 我们说虚数不虚, 虚数 $\sqrt{-1}$ 归根结底是客观事物量的关系的反映。但是我们还必须看到, 虚数 $\sqrt{-1}$ 并不具有实在性, 它是数学上理论思维发展到一定阶段的产物, 否则就必然陷入唯心主义泥坑, 和承认神灵世界的存在没有多大差别 (参看恩格斯《自然辩证法》, 人民出版社, 1971 年, 第 44 页)。

2. 复数形式的富氏级数

由 (1-2-1) 知, $\sin 2\pi n f_0 t$ 和 $\cos 2\pi n f_0 t$ 可用 $e^{i2\pi n f_0 t}$ 和 $e^{-i2\pi n f_0 t}$ 表示, 把这种表示代入 (1-1-3) 便得

$$\begin{aligned}
 x(t) &= b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \sin 2\pi n f_0 t + b_n \cos 2\pi n f_0 t) \\
 &= b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \frac{-i}{2} (e^{i2\pi n f_0 t} - e^{-i2\pi n f_0 t}) \right. \\
 &\quad \left. + b_n \frac{1}{2} (e^{i2\pi n f_0 t} + e^{-i2\pi n f_0 t}) \right]
 \end{aligned}$$

$$= b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} (b_n - ia_n) e^{i2\pi n f_0 t} + \frac{1}{2} (b_n + ia_n) e^{-i2\pi n f_0 t} \right]$$

令

$$\begin{cases} c_0 = b_0 \\ c_n = \frac{1}{2} (b_n - ia_n), n \geq 1 \\ c_{-n} = \frac{1}{2} (b_n + ia_n), n \geq 1 \end{cases} \quad (1-2-3)$$

则有

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{i2\pi n f_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} e^{-i2\pi n f_0 t}$$

如果我们让 n 从 -1 取到 $-\infty$, 则上式第三项就可表示为

$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{i2\pi n f_0 t}$, 于是便得到 $x(t)$ 的复数形式的富氏级数展开式

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi n f_0 t} \quad (1-2-4)$$

我们知道, 对于 n 次谐波, 它的频率是 $n f_0$, 在实际中, 频率都是正的。但是在式(1-2-4)中, n 可取负整数, $n f_0$ 就变成了“负频率”。那么, “负频率”是怎样出现的呢? 从实数形式的富氏级数(1-1-3)过渡到复数形式的富氏级数(1-2-4), 关键在于用复数表示正弦与余弦(见(1-2-1)), 因此, “负频率”完全是由复数表示引起的。但是由以后的分析可以知道, 富氏级数的复数形式, 应用起来方便, 同时也有很明确的物理意义。

在(1-2-4)中, 我们称 c_n 为富氏级数的系数。系数 c_n 完全由 $x(t)$ 确定, 现在来求 c_n 。

设 $x(t)$ 的变化范围为有限区间 $[t_0, t_0 + T]$, 用 $e^{-i2\pi m f_0 t}$ 乘(1-2-4)式两边, 并从 t_0 到 $t_0 + T$ 进行积分, 得

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-i2\pi m f_0 t} dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi(n-m)f_0 t} \right) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{t_0}^{t_0+T} e^{i2\pi(n-m)f_0 t} dt\end{aligned}$$

我们注意到 $f_0 = \frac{1}{T}$, 那么由(1-2-2)知, 积分 $\int_{t_0}^{t_0+T} e^{i2\pi(n-m)f_0 t} dt$, 当 $n-m=0$ 时为 T , 当 $n-m \neq 0$ 时为 0, 因此上面等式右边的和号中只剩下 $n=m$ 那一项, 即剩下 $c_m T$, 所以

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-i2\pi m f_0 t} dt, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

我们把以上结果写成定理形式。

富氏级数展开定理: 有限区间 $[t_0, t_0+T]$ 上的函数 $x(t)$, 在一定条件下, 可以展成富氏级数

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi n f_0 t}, \quad t \in [t_0, t_0+T] \quad (1-2-5)$$

其中 $f_0 = \frac{1}{T}$, $i = \sqrt{-1}$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt \quad (1-2-6)$$

这个定理在不同的条件下有不同严格、详细的数学论述, 我们给出其中的一种: 设 $x(t)$ 在 $[t_0, t_0+T]$ 上连续, 或者只有有限个第一类间断点, 并在 $[t_0, t_0+T]$ 上具有有限个极大、极小点, 则有

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi n f_0 t} = \begin{cases} x(t) & \text{当 } t \text{ 是 } x(t) \text{ 的连续点时} \\ \frac{1}{2} [x(t-0) + x(t+0)] & \text{当 } t \text{ 是 } x(t) \text{ 的间断点时} \\ \frac{1}{2} [x(t_0) + x(t_0+T)] & \text{当 } t=t_0 \text{ 或 } t_0+T \text{ 时} \end{cases}$$

① 符号“ $\in$ ”表示属于的意思, $t \in [t_1, t_2]$ 表示 $t_1 \leq t \leq t_2$, $t \in [t_1, t_2)$ 表示 $t_1 \leq t < t_2$.