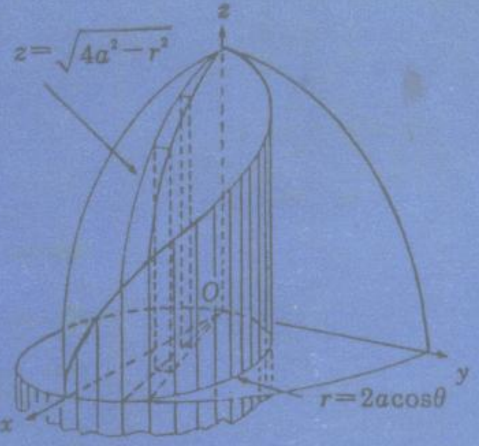
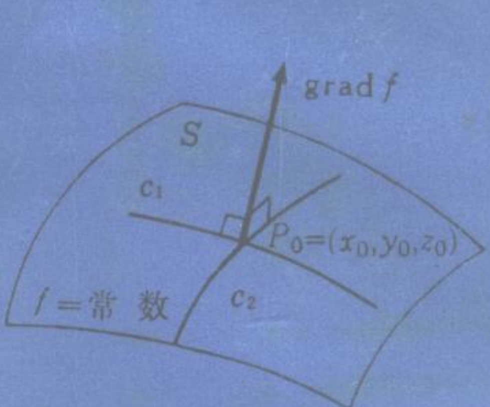
谢国瑞　主编



高等数学

(多元函数)



华东化工学院出版社

应用数学基础教材丛书

高等数学

（多元函数）

谢国瑞　龚成通　冯家裕　编著

华东化工学院出版社

（沪）新登字 208 号

高 等 数 学

（多元函数）

Caodeng Shuxue (duoyuan hanshu)

谢国瑞　龚成通　冯家裕　编著

华东化工学院出版社出版发行

（上海市梅陇路 130 号）

新华书店上海发行所发行经销

江 苏 句 容 县 排 印 厂 排 版

上 海 东 方 印 刷 厂 印 刷

开本 850×1168 1/32　印张 16.25　字数 456 千字

1992 年 6 月第 1 版　　1995 年 4 月第 2 次印刷

印数 7001-9500 册

ISBN 7-5628-0183-5/O·24　　定价：15.40 元

内容提要

本书的内容，主要包括多元函数微分法的概念、计算与应用；重积分、曲线积分、曲面积分的概念、计算与应用；还讨论到场论的一些概念以及傅里叶级数等。涉及这些课题的深度及广度，大体符合国家教委批准印发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》中的规定。而在编写体系及内容处理上，则根据编者的经验作了有利于教学的安排。本书可作为高等工业学校本、专科各专业高等数学课程的部分教材，也可作为科技人员的参考用书。

序　言

自从1985年1月原教育部发出《关于高等学校教材工作若干问题的通知》以来，教师编写教材的各项有关政策得到了落实，明确了编写教材既是一项教学工作，也是一项科研工作。因此，教师编写教材的积极性有了提高。随着教学改革的深入开展，各种不同观点、不同风格和特色的教材逐渐出现。除了由各课程教学指导委员会审定出版的教材外，学校自编教材的出版数量也在逐渐增加。

华东化工学院积极开展教学改革，学校领导鼓励教师编写教材。本教材是在该院院长的直接支持下着手编写的。主编谢国瑞教授长期从事教学工作，教学经验丰富，在总结教学改革和多年来的教学经验基础上编成此书。

该书取材适当，理论与应用并重，在内容安排上进行了改革，改变了传统的顺序，有一定的新意，且能自成体系。全书满足国家教委颁发的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》，并略高于《教学基本要求》，适合作为重点学校教材。

该书比较重视教学法，对问题的提出和解决问题的思路、来龙去脉介绍得比较清楚，在传授知识的同时注意培养分析问题和解决问题的能力。作者根据经验，对涉及高等数学中最基本的一些概念、理论和思想方法的有关内容，作了相对集中又多次反复出现的处理，有利于多数学生的学习与掌握。如对极限概念采取了前后分层次展开讨论的方法，这样不仅使全书能较早地进入微积分的主题，以提高学生的学习积极性，并满足一些后续课程的需要；而且在后面再论极限时，由于已经有了相当的微积分基础知识，而有可能作出较为全面的讨论；又如对于数学应用中非常重要的微分方程，早在微分学应用中就插入了一节“列微分方程”，而在有关章节中相对集中地介绍了微分方程的基本概念、解法、应用后，在级数、多元函数微分学及曲线积分的一些章节中还多次涉及；另外，

书中还对一些重要定理给出了多种证法，一些典型例题给出了多种解法，以便于从不同角度去深入理解，学生可从不同方法的比较中提高数学思维能力并激起学习的兴趣。

例题是教材的一个重要组成部分，该书的例题量多面广，且举例的目的性明确，或是为了说明、引出问题，或是为了指明解题的思路与方法，或是为了使读者了解高等数学在科技和工程中的广泛应用，使人感到内容丰满有趣，不觉得干瘪枯燥。

书中配有大量的习题，其中不少习题较有特色，也比较新颖，与已出版的同类教材相比，该书在习题更新方面向前迈出了较大的一步，这是十分可贵的。特别是所配的应用题中，有不少是与物理、力学、化工等有关的题。因此，读者通过解题既能提高分析问题和解决问题的能力，又可获得实际知识。

该书的出版在高等数学教材建设的百花园中又添一株奇葩，可以预期，它对进一步推动教学改革、提高教学质量定将起积极的促进作用。

陆庆乐

编者的话

在国内外，已经有了为数不少的高等数学及微积分教材，其中还不乏较为优秀的著作。我们之所以还要编写本书，主要是为了适应教学上的需要，同时也希望借此机会把多年教改中积累的认识、看法提出来，进一步在实践中经受检验，为教育改革的大目标献出绵薄之力。

本书（包括一元函数、多元函数两部分）的核心是微积分的概念、理论、计算、应用以及一些与之密切有关的内容，如微分方程、级数等。涉及这些课题的深度，基本符合国家教委批准印发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》中相应部分的规定。而在编写体系及内容的处理上则根据我们的经验作了便于教学的安排。本书可作为高等工业学校本、专科各专业相应课程的教材，也可作为科技人员的参考用书。

微积分的英文名称 Calculus 之拉丁文原意为石子，古代的欧洲人曾用石子作计算，后来就把"计算"称作 Calculus，这里的Calculus是微分学(Differential Calculus)与积分学(Integral Calculus)的合称。在科学和技术各领域的定量研究中，总要处理多种数量，这中间的一些可为人们所直接感知并控制其取值（数学上常称之为独立变量或自变量），也有一些人们感兴趣的量，虽然在实际问题中常会对其提出一定的要求（如在某特定范围内取值等），却因无法直接控制它们，而只能采取迂回的途径：通过调节可控变量的取值间接地影响它们〔称之为应（因）变量或函数〕，使之达到预期的要求。显然，这只有在对这些数量取值的联系方式获得规律性认识后才能做到，而取得这种认识正是各门学科定量地研究各具体过程或现象时的一个重要内容。数学上把这类数量上的联系方式抽象成函数，通过对已知函数的计算（包括微分或积分等）可以解决实际中提出的不少问题，而对未知函数作相应的分析和计算更有助于具体地确定函数。因此，微积分解决问题的方法对每

个科技人员都是重要的，而微积分解决问题的思想在锻炼人们科学素养方面的作用更是必须足够重视的。

本书是作为应用数学基础教材丛书的一种而编就的高等数学课程教材，在编写方式上，既大体保持了微积分教材传统的演绎推理与几何直观并重的特征，又经常通过归纳和类比“发现”概念、“猜测”结果、“想出”解法，很多地方详细介绍了“分析过程”，也不时“点明”沿怎样的思路在考虑问题，对不少例题介绍了从不同角度入手导致的多种解法以启迪思维和引起学习的兴趣。这种种努力是希望在教材之中直接反映本课程对提高工科学生数学素质的要求，而且也希望能对多数工科学生培养数学思维能力作些有益的引导。

从目录可以看出本书在内容体系编排上的一些特点。这里要作几点说明：首先，如所熟知，极限是微积分的基本研究方法。为了强化这部分内容的教学，更为了能尽快地进入微积分主题的学习（以更好地适应其他课程应用微积分的要求），我们把极限内容作了分散处理：在引入导数概念的同时，讨论函数在$x \to a$时的极限；在再论极限一章中才介绍涉及无穷的种种极限问题，并把广义积分明确规定成定积分的极限；习惯上在极限论中首先处理的数列极限，被推迟到和级数放在一起讨论，这样做的原因，既考虑了要把学生已有数列极限的知识提高一步需要足够的背景知识，也考虑到它在定义“级数和”这个概念中有直接的作用。其次，关于对数函数和指数函数，我们不仅承认学生的已有知识，先作了简单的回顾，而且还在积分一章中对其作了较为自然的重新定义。这一简单的重复，对使用本书的教师就有了两种选择的可能，如果愿意的话，在教学中可直到接触积分概念后再开始涉及这些函数。为便于不同教学要求的课程安排，本书将多元函数积分学的内容处理成了四个章次，即二重积分、平面曲线积分、多重积分以及第二型曲面积分与积分公式，教师可视具体情况，调整教学内容的顺序，或只教其中的部分章节。另外，对讨论应用问题的一些章节，我们在选材上力求反映微积分在各个领域，包括传统的物理、

几何方面以及近期活跃的经济、生物或工程上的应用以激发学生的学习兴趣；还把在科学和工程上重要的列出微分方程的问题作为微分法的一项重要应用予以强调。在处理各个具体问题时，我们还希望能体现出函数方法在解决问题时发挥的作用。

演算一定数量的习题是学好微积分的必由之路。为此，本书以三种不同的方式安排了相当数量的练习与习题供学生选用。穿插在课文中的那些最基本的练习题是每个学生都应独立完成的，而各节末的习题及每章最后的总习题，则可根据各自的具体情况或在教师指导下演算其中的部分或全部。

"大学教书不是照本讲"①，按这种认识，更为了有利于学生在今后学习中的参考和扩展知识面、提高综合运用知识的能力，本书也包括了少量可教可不教的材料。如某些关于应用课题与个别应用数学概念的讨论以及少数的习题等(特别是那些带*的部分内容、节、段、定理或示例)。对于这些"不属"《教学基本要求》范围之内的题材，老师们在教学中可灵活掌握，或用作专题讲座的素材，也可指导学有余力的学生自学，等等。

编写出能够反映"培养学生能力"要求的高等数学教材，是我们自悬的努力目标，对这样一项带开创性的工作，自不敢说在这里已取得了多少的成功，但我们确信已迈出了开始的一步。因此，我们特别要感谢给这项工作以有力支持的许多领导、专家和同志们。

本书的编写是在院长陈敏恒教授、副院长戴干策教授的直接支持下完成的，由谢国瑞主编，龚成通和冯家裕参加执笔编写。另外，李昌文副教授也曾为个别章节写过初稿并参加讨论。

承原国家教委"工科数学课程教学指导委员会"主任陆庆乐教授审阅本书稿，并欣然命序，使本书增色不少。本书的编写还得到了很多教师的帮助，他们在讨论书稿时都发表了不少建设性的意见，特别是李昌文、蒲思立、周根成、陈秀华、殷锡鸣、王刚、苏萌、崔卫旗和曹宵临等先生，他们通过实践提出了改进书稿的很好建议；

---

① 华罗庚：《高等数学引论》，第一卷第一分册序言，科学出版社，1963年。(华罗庚，1910—1985，中国现代数学家。)

殷锡鸣、王刚、崔卫旗三位先生为本书(多元函数)提供了全部练习和习题的参考答案;尹丽华、刘丽萍两位同志细致而高质量地完成了书稿的打字工作。应用数学研究所所长俞文魮教授和汪嘉冈教授对本书的编写始终给予关心和鼓励。我们对给本书的编写、出版以种种帮助的所有同志谨表衷心的感谢。由于成书时间仓促,对有些问题的处理方法实践不多,书中定有不少错、漏、不妥之处,敬祈读者不吝指正。

谢国瑞

目　　录

第 1 章　向量、空间直角坐标系

向量是个重要的数学工具，在科学和工程中试图运用数学方法之际，有许多量需藉以刻划；在多元函数的讨论中，由于利用向量而可使许多概念的表述更为简单明晰。

本章主要介绍向量代数基础和空间直角坐标系，利用坐标系为工具，向量的运算可通过对其坐标的适当数字运算而完成。这就为对一些数字运算或关系赋予"几何意义"奠下了基础。在最后二节，利用这两个工具，讨论了空间解析几何中一些有用的基本事项。

1.1　向　　量

1.1.1　引言

将数学用于科学或工程时，通常要把有关的量和数相联系。经验表明，许多量可用数字表出其特征，如物体的质量、体积、某人跑 100 米所用的时间等。由于处理这些量所遵循的代数规则与平常运算实数的规则相当，所以普遍接受这样的表达方式，并称这些量为纯量(scalars)。

另外，有些量却不是只用单个数字就足以表达其特征的。例如，为了表达将物体从点 A 移到点 B 这个位移的动作，只描述移动的距离是不够的，还要说明移动的方向。亦即要用距离和方向两个特征来共同描述一个**位移** (displacement)。又如，一个力作用于某物体上，也需由此力的大小及施力的方向共同形成此作用力的效果。还可举出许多需用几个数字共同表达其特征的量：一艘船在航行时的速度(velocity)，需用速率 (speed) v 及方向 θ 刻划；而飞机的飞行则要用速率 v，方向 θ，高度 φ 三个数字来表

征。在处理这些量的过程中，人们发现一些共同的规律，从而形成了数学上称作向量(vectors)的概念。在给向量下定义之前，先考察位移的一些性质。

设点 A 沿直线 AB 的方向移到点 B 处，将此位移用有向线段 $\overrightarrow{AB}$来表示(见图 1-1)。符号 $\overrightarrow{AB}$ 并不意味着此位移一定与点 A 有关。它表示的含意是，这个位移在点 A 所能产生的效果。如果这同样的位移作用在另一点 P 上(见图 1-1)，则将点 P 移至点 Q。$\overrightarrow{PQ}$在长度上等于 $\overrightarrow{AB}$，两者是平行且指向相同的，我们写作 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PQ}$。所以符号 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\overrightarrow{PQ}$ 代表着一种量的型式，而不只表示实际的变化。

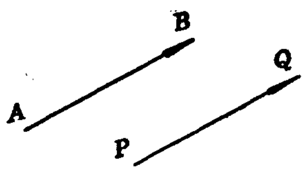


图 1-1

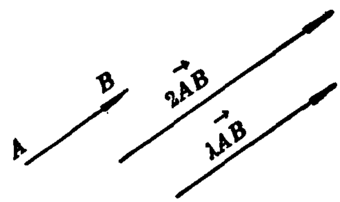


图 1-2

处理位移的简单代数运算可描述如下：例如，若想把点 A 顺着从 A 到 B 的方向移至距点 B 两倍远之处，自然就可将此位移记成$2\overrightarrow{AB}$。同理，$\lambda\overrightarrow{AB}$($\lambda$为正值常数)的意义是保持 $\overrightarrow{AB}$ 原来的方向，而将长度变为原来的 λ 倍(见图 1-2)。这是位移的**倍数**(scalar multiple)。加法的运算可看作是连续两次位移的结果。参照图1-3，设 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{RS}$ 为两已知位移，若 $\overrightarrow{BC}$ 等于 $\overrightarrow{RS}$，则当对点 A 连续施以这两次位移的结果是先将点 A 移至点 B，然后移到点 C，记为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{AC}$。即

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \tag{1-1}$$

称之为加法的三角形定律，即沿$\triangle ABC$ 的两边 AB 和 BC 作相继

的两次位移，其最终结果无异于沿第三边 AC 的一次位移。有时也将加法规则称为**平行四边形定律**，如图 1-4，A、B、C、D 依序为一平行四边形的四个顶点，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，因 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，所以平行四边形定律和三角形定律是一回事。

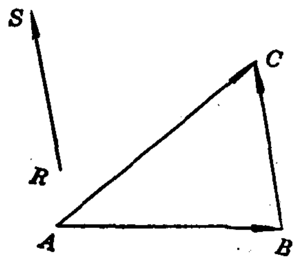


图 1-3

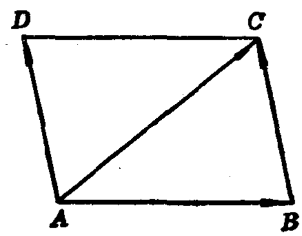


图 1-4

既然线段 AA 的长度为 0，则位移 $\overrightarrow{AA}$ 将把点 A 留在原位置不动，而可合理地记 $\overrightarrow{AA}$ 为 **0**。按式(1-1)知

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0$$

从而将 $\overrightarrow{BA}$ 解释成 $-\overrightarrow{AB}$，即 $\overrightarrow{BA}$ 是与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相反而长度相等之位移。进一步，可得负数和位移相乘之意义，例如 $\lambda=-\mu(\mu>0)$，则 $\lambda\overrightarrow{AB}=-\mu\overrightarrow{AB}$，其意义为向量$(\lambda\overrightarrow{AB})$与向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向相反而长度为 $\overrightarrow{AB}$ 之 μ 倍(图 1-5)。

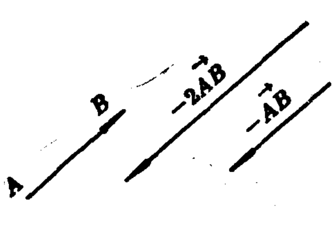


图 1-5

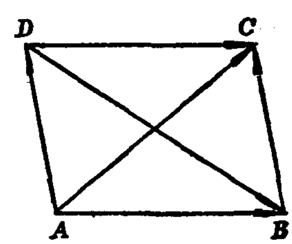


图 1-6

例 1　设 A、B、C、D 为某平行四边形之顶点(参图1-6)，试解