现代控制理论

M. 诺顿 著

科学出版社

现代控制理论

M. 诺顿 著

杨志坚 译

科学出版社

内 容 简 介

本书从工程的观点介绍了现代控制理论中较成熟的几个分支．内容深入浅出，取材得当． 全书共八章，包括动态系统的状态空间表示法、有穷维最优化、无穷维最优化、动态规划、随机估计与控制等．为了照顾数学基础较差的读者，书后还附了一个补充材料，概略地介绍矩阵运算与求解常微分方程的数值方法等内容．

本书可供从事机械、化工、电力等生产过程自动化和航空、航天等各领域自动控制的技术人员阅读，也可供自动控制专业的研究生和大学高年级学生参考．

M. Noton

MODERN CONTROL ENGINEERING

Pergamon Press, 1972

现代控制理论

M．诺顿 著

杨志坚 译

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1979年6月第一版 开本：787×1092 1/32

1979年6月第一次印刷 印张：9 5/8

印数：0001—107,430 字数：217,000

统一书号：15031·229

本社书号：1401·15—8

定价： 0.90 元

四甲

译 者 的 话

控制理论发展很快. 目前人们把五十年代以前发展起来的建立在传递函数或频率特性上的动态系统分析与综合方法叫做“古典”控制理论. 1960 年以后发展起来的现代控制理论是以状态空间方法为基础的. 数字计算机在线和离线的大量应用,为现代控制理论的实现提供了技术手段.

本书从工程的观点介绍了现代控制理论中较成熟的几个分支. 在一般现代控制理论的书籍里都不包括有穷维最优化，而有穷维最优化恰恰是用计算机在线或离线寻求设备最优工作状态(甚至解某些动态最优化问题)时必须用到的. 本书先讲有穷维最优化,然后再对照地讲无穷维最优化,并注意两者的有机联系，这种讲法是很可取的.

在翻译过程中，对所发现的原书公式本身及其编号中的笔误作了订正，除了涉及到概念或需要查证原始文献的地方之外,凡是由上下文的联系或由公式的推导可以证实的笔误,都不加译注.

潘科炎同志对译稿进行了认真的校阅并提出了宝贵意见，在此表示感谢.

由于译者水平有限,译文中难免有错误和不妥之处,欢迎广大读者批评指正.

译 者

1978 年 8 月

原　　序

目前，在北美洲多数的大学里，给大学生讲授的控制理论，主要是用来研究线性(通常是单回路)反馈系统的．这种理论及其向采样系统的扩展，在五十年代已经逐渐成熟．这种理论对于分析与综合伺服机构和简单的调节器是很适用的，而且一般也是够用的．无论是频率法还是根轨迹法，重点都放在时域的稳定性上．由于负反馈原理在应用科学中的重要性，这部分内容肯定还要继续放在大学生的课程里．

但是，现在人们已经认识到古典控制理论的局限性，例如在非线性控制系统和多变量(多输入与多输出)控制系统的综合以及对“收益”(profit)等性能指标的辨识方面，都有局限性．从 1960 年起，取得了两个重要的进展，使复杂的工业生产过程、宇宙航行和社会经济系统的控制面貌大为改观．第一个进展是，数字计算机无论在多用途的科学计算上还是作为在线计算机，都得到了广泛的应用．第二个进展是现代控制理论的出现．数字计算机对这个进展起了促进作用．目前一般认为，现代控制理论包括系统辨识和参数估计两个相互关联的领域．现代控制理论是从 Bellman 动态规划的应用、古典变分法的复兴和 Kalman 用状态空间表示法研究线性系统的某些早期工作开始的．1960 年以来的这些进展可以说是爆炸性的，但它们在各门学科中的充分应用还远远没有实现．因此，现代控制理论看来应该在应用科学课程中尽早地予以介绍．

本书主要是为第一学年研究生课程编写的，其中某些内

容将来也可能放在大学四年级的选修课里．如果学生在矩阵代数、数值方法以及状态变量表示法等方面有足够的准备知识，那么本书内容，除了第五章“随机控制与估计”以外，可作为一个学期的课程．另外，针对需要复习和巩固上述必要知识的学生和读者，还编了一个供选读的附录．将这个补充材料算在内，再加上第五章，总共相当于两学期的课程．由于向读者提供了这个选读材料，希望这本书也能用于工程人员的自学，象它的前身(写于 1964 年)在英国和西欧得到广泛的采用那样．这本书，乍一看，很容易当作是《控制工程变分法引论》的修订版，但实际上，从那本书里所取的材料只有百分之五．

除了引自那本书的某些结果之外，本书大部分例题的计算结果，是 Susan Oates 用滑铁卢大学的 IBM 360 系列-75 型计算机做出的．但是“Powell-Zangwill”计算机程序是由作者的同事 J. Vlach 教授提供的．本书初稿(写于 1970 年)，由于曾给几届研究生当做阅读材料而得到校订、润饰和扩充．作者特别感激澳大利亚 Monash 大学 W. A. Brown博士精心而有益的校阅．最后，作者对 Margaret Adlington 在打印大部分手稿过程中所付出的辛勤劳动表示感谢．

M. 诺　顿

目　　录

第四章 动态规划

第五章 随机估计与控制引论

第六章 已实现和可能实现的应用

第七章　附录

第八章　补充材料——矩阵与状态变量引论

第一章 动态系统的状态空间表示法

1.1 状态方程

不用传递函数或频率特性，而用状态方程来表述动态系统,是1960年以后发展起来的控制理论的基础．传递函数或频率特性用于非线性系统受到限制，而状态方程和状态变量既能用于线性系统，也能用于非线性系统．这些状态变量就是确定动态系统行为的微分方程的因变量，读者可以立即辨认出来,至少在把微分方程写成某种形式的时候,是很容易看出来的．

作为一个例子，我们来考虑一个火箭在地球附近但不受大气阻力影响的运动．设火箭向东运动,扫过一经度角θ，离地球中心的距离为r，则火箭的运动服从下列微分方程:

$$\ddot{r} = S\sin\beta + r(\dot{\theta} + \Omega)^2 - g(r_0/r)^2 \tag{1.1}$$

$$r\ddot{\theta} = S\cos\beta - 2\dot{r}(\dot{\theta} + \Omega) \tag{1.2}$$

S为火箭发动机在与地平线成β角方向上的无量纲推力，r_0为地球的半径，g为地面上的重力加速度，Ω为地球的自转角速度．这组微分方程是非线性的，求解析解有一定的困难．如果用数值方法来积分，譬如说用数字计算机，那么读者一定知道，需要把方程重新编排一下，以便把两个二阶方程表示为四个一阶方程．为了以后的需要，我们做一些代换．令

$$x_1 = \dot{r}, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad x_3 = r, \quad x_4 = \theta,$$

则得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= S\sin\beta + x_3(x_2+\Omega)^2 - g(r_0/x_3)^2 \\
\frac{dx_2}{dt} &= (S/x_3)\cos\beta - 2x_1(x_2+\Omega)/x_3 \\
\frac{dx_3}{dt} &= x_1 \\
\frac{dx_4}{dt} &= x_2
\end{aligned}\right\} \qquad (1.3)
$$

给定 (x_1, x_2, x_3, x_4) 的初始条件和作为时间函数的推力角β，利用标准计算机子程序，就可以对这组方程进行数值积分．方程(1.3) 就是这个系统的状态方程；x_1, x_2, x_3, x_4 是状态变量，或者叫做状态向量 x 的分量[1)]．在这个例子里，若能调整火箭的推力角 β 来改变轨道，则 β 就是控制变量．

状态向量的重要性在于，确定性系统在不受不可预测的随机作用时，所有的未来状态完全由初始状态和系统的输入(即已知的扰动和控制变量)所决定．让我们举个例子，看看线性系统的传递函数与状态方程之间的关系．把电感L、电阻 R 与电容 C 串联起来，用电源 $u(t)$ 来激励，初始条件都等于零．如果电容器上的电荷为 q，显然，回路中电压之和为

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = u \qquad (1.4)$$

代入 $q = Cv$，v 是电容器两端的电压，作拉氏变换，则得传递函数，即 v 的拉氏变换与 u 的拉氏变换之比．于是

$$v(s)/u(s) = \frac{1}{1 + RCs + LCs^2} \qquad (1.5)$$

另一方面，在方程 (1.4) 中代入 $q = Cv$，得

---

1)按照最新的习惯，向量不用划线，也不用黑体字来表示．读者应随时根据课文把没有下标的小写字母看作向量，而把大写字母看作矩阵．

$$LC\ddot{v} + RC\dot{v} + v = u \tag{1.6}$$

令 $x_1 = v$, $x_2 = \dot{v}$, 则方程(1.6)可表成两个一阶微分方程,即两个状态方程

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2 \\ dx_2/dt &= (u - x_1 - RCx_2)/(LC) \end{aligned} \tag{1.7}$$

很遗憾,确定状态变量的方法不是唯一的.譬如,若令 $x_1 = v$,而 $x_2 = RC\dot{v} + v$,略加整理之后,我们就得到另一个样子的状态方程

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= (x_2 - x_1)/(RC) \\ dx_2/dt &= -(1/RC)x_1 + (1/RC - R/L)x_2 \\ &\quad - (R/L)u \end{aligned} \tag{1.8}$$

上述线性系统的例子说明，尽管两个变量之间的传递函数是唯一的,状态变量的选择和随之而来的状态方程的形式,却不是唯一的.

在这个阶段，有些作者可能让读者演算几道由传递函数推导状态方程的例题．经过斟酌，除了指出不存在唯一的方法之外，此处不做那样的训练．系统的微分方程比之传递函数是更为基本的，它们对于线性系统和非线性系统都同样适用．有了微分方程,我们在应用古典控制理论时,可以走传递函数的路线;而在应用现代控制理论时,也可以走另一条状态方程的路线.

1.2 线性状态方程

再来看上述简单电路的例子,令 L、C、R 都等于一个单位．于是方程(1.7)用矩阵来表示就变成

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{1.9}$$

线性系统的一般形式是：

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{1.10}$$

式中 x 是 n 维向量；

u 是 m 维向量；

A 是 $n \times n$ 矩阵；

B 是 $n \times m$ 矩阵.

方程(1.9)是这个一般形式的特例．方程(1.10)中 A, B 后面的 (t) 提醒我们：状态变量的系数可以是时间的函数.

对线性系统，我们可以导出许多重要而有力的结果，而对非线性系统却存在许多困难．在这一章里，将要讲述线性系统理论的一些重要结果．由于线性系统容易处理，推导控制算法时，常常将系统线性化，就是在某个标称状态附近作小的扰动．实际上，进一步考察 1.1 节的第一个例子就可以看到，尽管状态方程(1.3)是非线性的，却可以出现(1.10)那样形式的方程.

假定火箭已经近似地发射到所要求的轨道上，规定 β 对预先算好的时间程序 $\bar{\beta}(t)$ 只能有轻微的变化．给定初始条件，将含有 $\beta = \bar{\beta}(t)$ 的方程组(1.3)积分，可到得“标准轨道” $\bar{x}(t)$，这里 $\bar{x} \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$．引入

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{1.11}$$

把 Δx_i 看做小的扰动，将方程组(1.3)两侧在 $\bar{x}(t)$, $\bar{\beta}(t)$处作一阶展开，注意到 $\bar{x}(t)$、$\bar{\beta}(t)$ 能精确地满足这些方程，我们就得到

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Delta x_1 &= S\cos\bar{\beta}\cdot\Delta\beta + (\bar{x}_2+\Omega)^2\Delta x_3 \\
&\qquad + 2\bar{x}_3(\bar{x}_2+\Omega)\Delta x_2 + 2g(r_0^2/\bar{x}_3^3)\Delta x_3 \\
\frac{d}{dt}\Delta x_2 &= -(S/\bar{x}_3)\sin\bar{\beta}\cdot\Delta\beta - (S/\bar{x}_3^2)\cos\bar{\beta}\cdot\Delta x_3 \\
&\qquad - 2\Delta x_1(\bar{x}_2+\Omega)/\bar{x}_3 - 2\bar{x}_1\Delta x_2/\bar{x}_3
\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\quad + 2\bar{x}_1(\bar{x}_2 + \Omega)\Delta x_3/\bar{x}_3^2 \\
&\frac{d}{dt}\Delta x_3 = \Delta x_1 \\
&\frac{d}{dt}\Delta x_4 = \Delta x_2
\end{aligned}\right\}
$$

方程(1.12)用矩阵来表示就是:

$$
\frac{d}{dt}\Delta x = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\beta \quad (1.13)
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
&a_1 = 2\bar{x}_3(\bar{x}_2 + \Omega), \quad b_1 = S\cos\bar{\beta} \\
&a_2 = (\bar{x}_2 + \Omega)^2 + 2gr_0^2/\bar{x}_3^3, \quad b_2 = -(S/\bar{x}_3)\sin\bar{\beta} \\
&a_3 = -2(\bar{x}_2 + \Omega)/\bar{x}_3 \\
&a_4 = -2\bar{x}_1/\bar{x}_3 \\
&a_5 = 2\bar{x}_1(\bar{x}_2 + \Omega)/\bar{x}_3^2 - (S/\bar{x}_3^2)\cos\bar{\beta}
\end{aligned}\right\} \quad (1.14)
$$

这样,在标准轨道附近的扰动就满足形如(1.10)的方程,其中 A 与 B 是在标准轨道上求值的时间函数.

1.3 基础矩阵

我们首先来考虑方程(1.10)的齐次项

$$
\dot{x} = A(t)x \quad (1.15)
$$

式中 x 为 n 维向量. 可以证明[11],如果 $A(t)$ 的实元素在区间 $[t_0, t_f]$ 上有界,则总有依赖于初始状态向量 $x(t_0)$ 的唯一解存在. 此外,采用不同的初始向量 $x(t_0)$, 我们可以得到 n 个线性无关的解,但不能多于 n 个. 换句话说, 如果 $x_i(t)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 n 个线性无关的解,而 $x_{n+1}(t)$ 是对应另一个初始

向量的任何一个其他解，那么就可以找到一组实数 $a_i(i=1, 2, \cdots, n+1)$，使方程

$$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)+\cdots+a_{n+1}x_{n+1}(t)=0 \tag{1.16}$$

对闭区间 $[t_0, t_f]$ 里的一切 t 值都成立。

让我们任取一组 n 个线性无关解的列向量，把它们并列起来，构成一个时变的 $n\times n$ 矩阵：

$$\Phi(t)=[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)], \quad \Phi(t_0)=Z \tag{1.17}$$

$\Phi(t)$ 叫做对应于初始条件矩阵 Z 的基础矩阵。将初始向量 $x_i(t_0)(i=1, 2, \cdots, n)$ 并列起来，就得到矩阵 Z。因为 $x_i(t)$ 是解向量，所以

$$\dot{x}_i=Ax_i, \quad i=1, 2, \cdots, n \tag{1.18}$$

或者

$$[\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_n]=A[x_1, x_2, \cdots, x_n] \tag{1.19}$$

将方程(1.17)、(1.19)联立起来，就得到下面的重要结果：

$$\dot{\Phi}(t)=A(t)\Phi(t) \tag{1.20}$$

就是说，基础矩阵满足原系统的微分方程。Φ 是 $n\times n$ 矩阵，因而方程(1.20)代表 n^2 个微分方程式。读者还应该注意到：因为 Φ 是用 n 个线性无关的列向量来定义的，所以

$$|\Phi(t)|\neq 0 \tag{1.21}$$

1.4 转 移 矩 阵

下面我们用 $\Phi(t, t_0)$ 表示基础矩阵，以便指出这个矩阵的初始时间。在初始矩阵为单位矩阵即 $\Phi(t_0, t_0)=I$ 这种特殊情况下，所得到的基础矩阵叫做转移矩阵。若 $x_1(t)$ 是由初始向量 $[1, 0, 0, \cdots, 0]^T$ 产生的，$x_2(t)$ 是由初始向量 $[0, 1, 0, \cdots, 0]^T$ 产生的，以此类推，这就构成一个转移矩阵。让我们来看一下，为什么把 $\Phi(t, t_0)$ 叫转移矩阵。现考虑用下式定义

的向量 $z(t)$

$$z(t)=\Phi(t,\ t_0)\,x(t_0) \tag{1.22}$$

因 $\Phi(t_0,\ t_0)=I$， 故 $z(t_0)=x(t_0)$. 且

$$\begin{aligned}\dot{z}=\dot{\Phi}(t,\ t_0)\,x(t_0)&=A(t)\,\Phi(t,\ t_0)\,x(t_0)\\&=A(t)z\end{aligned} \tag{1.23}$$

即 $z(t)$ 是微分方程(1.15)的解，并满足初始条件向量. 因而它就是所求的解，于是

$$x(t)=\Phi(t,\ t_0)\,x(t_0) \tag{1.24}$$

只要转移矩阵是已知的时间函数，对应任何给定初始向量 $x(t_0)$ 的解都可以用方程(1.24)的矩阵乘法求出来.

由方程(1.24)很容易导出转移矩阵的一些有用特性. 譬如

$$x(t_3)=\Phi(t_3,\ t_2)\,x(t_2)$$
$$x(t_2)=\Phi(t_2,\ t_1)\,x(t_1)$$

则

$$x(t_3)=\Phi(t_3,\ t_2)\Phi(t_2,\ t_1)x(t_1)=\Phi(t_3,\ t_1)x(t_1)$$

即

$$\Phi(t_3,\ t_2)\,\Phi(t_2,\ t_1)=\Phi(t_3,\ t_1) \tag{1.25}$$

又

$$x(t_2)=\Phi(t_2,\ t_1)\,x(t_1)$$
$$x(t_1)=\Phi(t_1,\ t_2)\,x(t_2)$$

因 Φ 是非奇异的，我们可以写出：

$$x(t_2)=\Phi^{-1}(t_1,\ t_2)\,x(t_1)$$

于是

$$\Phi(t_2,\ t_1)=\Phi^{-1}(t_1,\ t_2) \tag{1.26}$$

在 A 随时间变化的情况下，计算 $\Phi(t,\ t_0)$*，只能用数值方

---

*原书此处为 $A(t)$，根据上下文改为 $\Phi(t,t_0)$. ——译者