北京师范大学现代数学丛书

函数逼近论（下册）

孙永生　房艮孙　著

北京师范大学出版社

北京师范大学现代数学丛书

函 数 逼 近 论

下 册

孙永生 房艮孙 著

国家自然科学基金资助项目

北京师范大学出版社

北京师范大学现代数学丛书

函数逼近论

下册

孙永生　房艮孙 著

*

北京师范大学出版社出版发行
全国新华书店经销
中国科学院印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：20.75　字数：516 千
1990 年 1 月第 1 版　1990 年 1 月第 1 次印刷
印数：1—2 000

ISBN 7-303-00595-1/O·104

定价：（平）12.80 元
（精）15.00 元

目　　录

第　七　章

某些周期卷积类的宽度估计

给定 r 阶实系数线性微分算子

$$P_r(D) = D^r + \sum_{j=1}^{r} a_j D^{r-j}$$

$$= \prod_{s=1}^{k} (D^2 - 2\alpha_s D + \alpha_s^2 + \beta_s^2) \prod_{j=1}^{r-2k} (D - \lambda_j), \quad (7.1)$$

其中 $k \geqslant 0$, $\alpha_s, \lambda_j \in \boldsymbol{R}$, $\beta_s > 0$. 置

$$\beta = \max_{1 \leqslant s \leqslant k} \beta_s, \quad \Lambda = 4 \cdot 3^{k-1} \cdot \beta. \quad (7.2)$$

如特征多项式 $P_r(\lambda)$ 仅有实零点,则 $\beta = 0$. 规定 $\Lambda = 0$.

和第六章一样，本章继续考虑由 $P_r(D)$ 确定的 2π 周期函数类

$$\mathscr{K}_q(P_r) = \{f \in \tilde{L}_{q,2\pi}^{(r)}: \|P_r(D)f(\cdot)\|_q \leqslant 1\}$$

的 n-K 宽度: n-G 宽度及线性宽度在 L^p 尺度下的精确估计问题，这里 $\tilde{L}_{q,2\pi}^{(r)}$ 表示 $f^{(r-1)}$ 绝对连续，$f^{(r)}$ 在 L_q 尺度下可积的 2π 周期函数全体．特别当 $P_r(D) = D^r$ 时，$\mathscr{K}_q(D^r) \equiv \widetilde{W}_q^r$ 即是以 2π 为周期的 Sobolev 类．当 $q = 1$ 时,记 $\tilde{L}_{2\pi}^{(r)} = \tilde{L}_{1,2\pi}^{(r)}$.

我们知道 $\widetilde{W}_q^r$ 是一个以 Bernoulli 函数为卷积核的周期卷积类（见第四章例 4.1-1). $\widetilde{W}_q^r$ 宽度的估计已经经历了相当长时期的研究，得到了非常完美的结果（[1]—[3]). 当 $P_r(D)$ 是一般的常系数线性微分算子时，$\mathscr{K}_q(P_r)$ 是一个以广义 Bernoulli 函

数为核的周期卷积类．其定义已在第六章内给出．关于 $\mathscr{K}_q(P_r)$ 的宽度的研究是近年来开始的．首先，1983 年苏联学者 V. T. Shevaltine[7] 就 $P_r(D)$ 的特征根具有共轭复根的情形进行了研究．应用广义差分和 $\mathscr{L}$ 样条的理论对充分大的 n 求得了 $\mathscr{K}_q(P_r)$ 当 $q=+\infty$ 时在 C 空间内的奇维数宽度的精确估计：

$$d_{2n-1}[\mathscr{K}_\infty(P_r);\ C]=\|\Phi_{r,n}\|_C. \tag{7.3}$$

随之出现了孙永生和黄达人[20][30][31]、房艮孙[22][23]以及 I. N. Volodina[25]、S. I. Novikov[26] 的工作．建立了基本上和 Sobolev 类 $\widetilde{W}_q^r$ 上的精确结果平行的结果．本章介绍这一部分结果．这里采用与 V. T. Shevaltine[7] 不同的方法，更简洁地求出了量 $d_n[\mathscr{K}_q(P_r);L_p]$（$q=+\infty$，$p=1,2,+\infty$；$q=+\infty,1\leqslant p\leqslant+\infty$，$\beta$ 充分小；以及 $p=q=1$）当 n 充分大时的精确估计并给出了极子空间的构造．另外，本章还将介绍由上凸连续模 $\omega(t)$ 所确定的函数类

$$\mathscr{K}H^\omega(P_r)=\{f(t)\in\widetilde{C}_{2\pi}^r;\omega(P_r(D)f;\ t)\leqslant\omega(t)\} \tag{7.4}$$

在 C 空间内 n-K 宽度的估计问题，给出一个强渐近估计式：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n[\mathscr{K}H^\omega(P_r);\ C]}{d_n[\widetilde{W}^rH^\omega;\ C]}=1.$$

这里 $\widetilde{W}^rH^\omega=\mathscr{K}H^\omega(D^r)$ 就是由 S. M. Nikolsky 首先引入的，并在逼近论中受到充分研究的函数类．

除了 Sobolev 类，在逼近论中受到充分重视的另一类周期卷积函数是以 CVD 函数为核的卷积类．其典型的例子是在 N. I. Achiezer[4] 中引入的解析函数类 A_q^h（见第四章，例 4.1-4）．有许多工作（[4],[5],[34]—[37]）研究了这个函数类的宽度精确估计．长期以来，对 $\widetilde{W}_q^r$ 及 A_q^h 上极值问题的研究是互相独立地进行的．M. A. Chahkiev[6] 指出了二者之间的联系．他在[6]内引入了满足 RA_q 条件的核，其实质是考虑一切广义 Bernoulli 函数的集合的 L_q 范闭包．房[32]刻划了这一闭包，指出了它和周

期的 Polya 密度以及 CVD 函数类的关系．本章内将介绍这些结果，以及利用这些结果得到的在宽度估计方面的新的精确结果．

§1 线性插值算子和 $\mathscr{K}_q(P_r)$ 以 $\mathscr{L}$ 样条的最佳逼近

（一）线性插值算子

引理 7.1-1[8] 设 $u(t)$ 是以 2π 为周期的实值可积函数，则实系数的常微分方程 $P_r(D)f(t)=u(t)$ 有 2π 周期解的充分必要条件是

$$\int_0^{2\pi} u(t)v(t)\,dt=0,$$

其中 $v(t)$ 是共轭微分方程 $P_r^*(D)v(t)=0$ 的任意 2π 周期解．

由 $P_r(D)$ 确定的广义 Bernoulli 多项式（见(6.2)）

$$G_r(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{i\nu t}}{P_r(i\nu)},\quad i=\sqrt{-1}.$$

注意到引理 7.1-1 可以得到（参见[9]，p. 50，以及定义 6.1-3）

$$\mathscr{K}_q(P_r)=\begin{cases}\{f=c+G_r*u: c\in\boldsymbol{R},\ \|u\|_q\leqslant 1,\ \int_0^{2\pi}u(t)\,dt=0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{如 } P_r(0)=0\}, \\ \{f=G_r*u: \|u\|_q\leqslant 1, \qquad\qquad\quad \text{如 } P_r(0)\neq 0\},\end{cases}$$

$$\mathscr{K}H^\omega(P_r)=\begin{cases}\{f=c+G_r*u: c\in\boldsymbol{R},\ \omega(u,t)\leqslant\omega(t), \\ \qquad \int_0^{2\pi}u(t)dt=0, \qquad\qquad \text{如 } P_r(0)=0\}, \\ \{f=G_r*u: \omega(u,t)\leqslant\omega(t), \quad \text{如 } P_r(0)\neq 0\}.\end{cases}$$

定义 7.1-1 设 2π 周期函数 $s(t)\in\widetilde{C}_{2\pi}^{r-2}$，且

$$P_r(D)s(t)\equiv 0,\quad t\in\left(\frac{(j-1)\pi}{n},\ \frac{j\pi}{n}\right),\quad j=1,\cdots,2n,$$

则 $s(t)$ 称为以 $\{(j-1)\pi/n\}_{j=1}^{2n}$ 为节点组的由 $P_r(D)$ 确定的 $\mathscr{L}$-样条，并将其全体记为 $S_{r-1,2n}(P_r)$，其中 $\widetilde{C}_{2\pi}^{-1}$ 表示 2π 周期的有界函数类，其仅有的间断点含于 $\{(j-1)\pi/n\}_1^{2n}$ 内且均为第一类间断。

命题 7.1-1 设 $n=1,2,\cdots$，则

$$S_{r-1,2n}(P_r)=\begin{cases}\left\{f=c_\sigma+\sum_{j=1}^{2n}c_jG_r\left(\cdot-\frac{(j-1)\pi}{n}\right),\ \sum_{j=1}^{2n}c_j=0,\right.\\ \qquad\left.c_\sigma,\ c_j\in\boldsymbol{R},\ j=1,\cdots,2n,\ \text{如 } P_r(0)=0\right\},\\ \left\{f=\sum_{j=1}^{2n}c_jG_r\left(\cdot-\frac{(j-1)\pi}{n}\right),\ c_j\in\boldsymbol{R},\right.\\ \qquad\left.j=1,\cdots,2n,\ \text{如 } P_r(0)\neq 0\right\}.\end{cases}$$

证 充分性是显然的，只证必要性．首先考虑 $P_r(D)$ 的特征多项式有实根的情况．记 $\lambda_j=\mu$，特别当 $P_r(0)=0$ 时取 $\mu=0$，这里 λ_j 是 $P_r(\lambda)$ 的某一实零点．令

$$P_r(D)=P_{r-1}(D)(D-\mu)$$

则对于一切 $f\in\widetilde{L}_{q,2\pi}^{(r-1)}$ 成立

$$f(x)=c_\sigma+\int_0^{2\pi}G_{r-1}(x-t)P_{r-1}(D)f(t)dt,\qquad(7.5)$$

其中当 $P_{r-1}(0)=0$ 时，$c_\sigma=\int_0^{2\pi}f(t)dt$，$P_{r-1}(0)\neq 0$ 时，$c_\sigma=0$，

$$G_{r-1}(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{e^{i\nu t}}{P_{r-1}(i\nu)},\quad i=\sqrt{-1},\qquad(7.6)$$

$G_{r-1}(t)$ 是由算子 $P_{r-1}(D)$ 确定的广义 Bernoulli 多项式，Σ' 表示 $P_{r-1}(0)=0$ 时，求和号中不包含 $\nu=0$ 的项．

任取 $s(t)\in S_{r-1,2n}(P_r)$，则

$$P_{r-1}(D)s(t)=b_je^{\mu t},\quad t\in\left(\frac{(j-1)\pi}{n},\ \frac{j\pi}{n}\right),\qquad(7.7)$$

其中 $b_j(j=1,\cdots,2n)$ 为实数．根据 (7.5) 及 (7.7) 得

$$s(t)=c_\sigma+\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{e^{i\nu t}}{P_r(i\nu)}\sum_{j=1}^{2n}b_j(a_{j-1,\nu}-a_{j,\nu})$$

$$a_{j,\nu}=e^{i\pi(\mu-i\nu)/n},\ j=1,\cdots,2n.$$

令 $c_1=b_1-b_{2n}e^{2\pi\mu}$，$c_{j+1}=(b_{j+1}-b_j)e^{j\pi\mu/n}$ $(j=1,\cdots,2n-1)$，显然 $c_j(j=1,\cdots,2n)$ 为实数且当 $\mu=0$ 时，$\sum_{j=1}^{2n}c_j=0$，于是

$$\begin{aligned}s(t)&=c_\sigma+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{2n}c_j\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{e^{i\nu(t-j\pi/n)}}{P_r(i\nu)}\\&=c_\sigma+\sum_{j=1}^{2n}c_jG_r\left(t-\frac{j\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

再考虑特征多项式 $P_r(\lambda)$ 没有实根的情况．取定实数 $\mu\neq 0$，任取 $s(t)\in S_{r-1,2n}(P_r)$，令

$$s_1(t)=\int_0^{2\pi}G_1(t-\tau)s(\tau)d\tau,$$

$$G_1(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\nu t}}{(i\nu-\mu)},\quad i=\sqrt{-1},$$

则 $s_1(t)\in S_{r,2n}((D-\mu)P_r(D))$，由前面的证明知

$$s_1(t)=\sum_{j=1}^{2n}c_jG_{r+1}\left(t-\frac{j\pi}{n}\right),$$

其中 $G_{r+1}(t)$ 是由算子 $(D-\mu)P_r(D)$ 确定的广义 Bernoulli 多项式．考虑到 $(D-\mu)G_{r+1}(t)=G_r(t)$，即得

$$s(t)=(D-\mu)s_1(t)=\sum_{j=1}^{2n}c_jG_r\left(t-\frac{j\pi}{n}\right).\ \square$$

评注 7.1-1 当 $P_r(D)=D^r$ 时，$S_{r-1,2n}(P_r)$ 就是以 $x=\{0,$

$\frac{\pi}{n},\cdots,\frac{(2n-1)\pi}{n}\Big\}$ 为单节点的 2π 周期的 $r-1$ 次多项式样条子空间 $\tilde{S}_{r-1}(x)$（参见第十章 §0）.

命题 7.1-2 设 $n=1,2,\cdots$，则*

$$\dim S_{r-1,2n}(P_r)=2n.$$

证 (i) 设 $P_r(0)\neq 0$，根据命题 7.1-1，只需证 $\left\{G_r\left(t-\frac{(j-1)\pi}{n}\right)\right\}_{j=1}^{2n}$ 线性无关. 令

$$g(t)=\sum_{j=1}^{2n}a_jG_r\left(t-\frac{(j-1)\pi}{n}\right)\equiv 0,$$

则 $g(t)$ 的 Fourier 级数是

$$g(t)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{a_1+a_2e^{i\nu\pi/n}+\cdots+a_{2n}e^{i\nu(2n-1)\pi/n}}{P_r(\nu i)}e^{i\nu t}.$$

因为 $g(t)\equiv 0$，且 $G_r(t)$ 在 $(0,2\pi)$ 上绝对连续，所以

$$\sum_{j=1}^{2n}a_je^{i\nu(j-1)\pi}=0,\quad \nu=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

特别取 $\nu=0,1,\cdots,2n-1$ 即得 $2n$ 阶的关于 $\{a_j\}_1^{2n}$ 的线性方程组

$$\sum_{j=1}^{2n}a_je^{i\nu(j-1)\pi}=0,\quad \nu=0,1,\cdots,2n-1 \tag{7.8}$$

此线性方程组的系数行列式

$$\Delta=\prod_{0\leqslant s<l\leqslant 2n-1}(e^{is\pi/n}-e^{il\pi/n})\neq 0.$$

因此 $a_j=0(j=1,\cdots,2n)$，故 $\left\{G_r\left(t-\frac{j\pi}{n}\right)\right\}_{j=0}^{2n-1}$ 线性无关.

---

* 这里用到了 $P_r(i\nu)\neq 0(\nu=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 这一假定. 如果 $P_r(\lambda)$有纯虚根，命题 7.1-2 对 $n>2\beta$ 成立. 见 [7].)

(ii) $P_r(0)=0$，不妨设 $P_r(\lambda)\neq\lambda^r$（这种情况见 [1]），令 $P_r(\lambda)=P_{r-j}(\lambda)P_j(\lambda)$，$P_j(0)\neq 0$，$j\geqslant 1$。设

$$s(t)=a_0+\sum_{j=1}^{2n}a_jG_r\left(t-\frac{(j-1)\pi}{n}\right)\equiv 0, \qquad (7.9)$$

考虑到 $\sum_{j=1}^{2n}a_j=0$，立即得

$$P_{r-j}(D)s(t)=\sum_{j=1}^{2n}a_jG_j\left(t-\frac{(j-1)\pi}{n}\right)\equiv 0,$$

其中 $G_j(t)$ 是由算子 $P_j(D)$ 确定的广义 Bernoulli 多项式

$$G_j(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\nu t}}{P_j(i\nu)},\quad i=\sqrt{-1}.$$

根据 (i) 所证即得 $a_j=0(j=1,\cdots,2n)$，再由 (7.9) 得 $a_0=0$。因此函数系 $\left\{1,G_r\left(t-\frac{j\pi}{n}\right)-G_r(t),\ j=1,\cdots,2n-1\right\}$ 线性无关. □

设 $\Phi_{r,n}(t)$ 是由算子 $P_r(D)$ 定义的 $\mathscr{K}_q(P_r)$ 上的标准函数（见 (6.9)）.

$$\Phi_{r,n}(t)=\int_0^{2\pi}G_r(t-\tau)\operatorname{sign}\sin n\tau d\tau.$$

引理 7.1-2 设 $n>\Lambda$，$h(t)\in\widetilde{L}_{\infty,2\pi}^{(r)}$，$s(t)\in S_{r-1,2n}(P_r)$，令 $u(t)=h(t)-s(t)$，$\delta(t)=u(t)-\Phi_{r,n}(t)$，$\delta(t)$ 在 $[0,2\pi]$ 内有 l 个不同零点 $0\leqslant t_1<\cdots<t_l<2\pi$ 且满足条件 $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant l}\{|t_j-t_{j+1}|\}\leqslant\pi/n$，其中 $t_{l+1}=t_1+2\pi$，如果以下两个条件之一成立

(i) $h(t)\equiv 0$，(ii) $|P_r(D)u(t)|<1$，

则 $l\leqslant 2n$。

证 如不然，则 $l\geqslant 2n+1$。首先考虑 $P_r(D)$ 至少有一对

共轭复根的情况。令

$$P_r(D)=P_{r-2}(D)P_2(D),$$
$$P_2(D)=D^2-2\alpha D+\alpha^2+\beta^2.$$

根据广义罗尔定理(定理 6.1-2)，$P_{r-2}(D)\delta(t)$ 在 $[0,2\pi]$ 内至少有 $2n+1$ 个不同的零点。因为 $P_r(D)\Phi_{r,n}(t)=\operatorname{sign}\sin nt$，所以当条件 (i) 或 (ii) 成立时对一切 $[0,2\pi)\backslash\{(j-1)\pi/n\}_{j=1}^{2n}$ 中 $h^{(r)}(t)$ 存在的点成立

$$\operatorname{sign}P_r(D)\delta(t)=-\operatorname{sign}\sin nt, \tag{7.10}$$

即(7.10) 几乎处处成立。因此

$$\operatorname{sign}P_r(D)\delta(t)=(-1)^j,\quad t\in\left(\frac{(j-1)\pi}{n},\ \frac{j\pi}{n}\right),\quad j=1,\cdots,2n, \tag{7.11}$$

几乎处处成立。令 $g(t)=P_{r-2}(D)\delta(t)$，则 $g(t)$ 有以下性质

(1) $g'(t)$ 在 $((j-1)\pi/n,j\pi/n)$ 上绝对连续，

(2) $g(t)\in\widetilde{C}_{2\pi}$，且在 $[0,2\pi)$ 上至少有 $2n+1$ 个不同的零点，

(3) 若 $h^{(r)}(t_0)$ 存在，$t_0\in((j-1)\pi/n,j\pi/n)$，则

$$\operatorname{sign}P_2(D)g(t_0)=(-1)^j.$$

分两种情况进行讨论。

(i) $g(t)$ 在 $[0,2\pi)$ 上至少有 $2n+2$ 个不同的零点，此时以下三种情况至少有一发生。

(a) 存在 $j_0\in\{1,\cdots,2n\}$，使得 $g(t)$ 在 $\Delta_{j_0}=:[(j_0-1)\pi/n,j_0\pi/n)$ 上至少有三个零点。

此时根据引理 6.1-3，$P_2(D)g(t)$ 在 Δ_{j_0} 上至少有一个变号点，矛盾于 (7.11)。

(b) 存在两个相邻的区间 $\Delta_{j_0}=:[(j_0-1)\pi/n,j_0\pi/n)$，$\Delta_{j_0+1}=:[j_0\pi/n,(j_0+1)\pi/n)$ 上，使得 $g(t)$ 在其中的每一个上至少有两个不同的零点。

此时首先注意到成立恒等式

$$e^{-\alpha(t-t_0)}\sin\beta(t-t_0)P_2(D)g(t)$$
$$=D\left(\sin^2\beta(t-t_0)D\left(\frac{e^{-\alpha(t-t_0)}}{\sin\beta(t-t_0)}g(t)\right)\right),\quad (7.12)$$

其中 t_0 是参数. 记 $\varphi_1(t)=e^{-\alpha(t-t_0)}\sin\beta(t-t_0)$, $\varphi_2(t)=\sin^2\beta(t-t_0)$, $\varphi_3(t)=e^{-\alpha(t-t_0)}/\sin\beta(t-t_0)$, 则 (7.12) 可写成

$$\varphi_1(t)P_2(D)g(t)=D(\varphi_2(t)D(\varphi_3(t)g(t))).\quad (7.13)$$

当 $n>2\beta$ 时，适当选样 t_0，可以使得 $\varphi_1(t)$、$\varphi_2(t)$ 及 $\varphi_3(t)$ 在 $((j-1)\pi/n,\ (j+1)\pi/n)$ 同时为恒正.

下面首先证明在每一个半闭区间 $\Delta_j=[(j-1)\pi/n,\ j\pi/n)$ $(j=1,\cdots,2n)$ 上 $(g(t)\varphi_3(t))'$ 至多有一个零点. 如不然，则 $\varphi_2(t)(g(t)\varphi_3(t))'$ 在 $((j-1)\pi/n,\ j\pi/n)$ 上至少有二个不同的零点,因而根据 (7.13), $P_2(D)g(t)$ 在 $((j-1)\pi/n,\ j\pi/n)$ 上至少有一个变号点. 即 $P_r(D)\delta(t)$ 在 $((j-1)\pi/n,\ j\pi/n)$ 上至少有一个变号点,这和(7.11) 矛盾.

因为 $\varphi_3(t)$ 在 $[(j_0-1)\pi/n,\ j_0\pi/n)$ 上恒正，所以根据罗尔定理 $(g(t)\varphi_3(t))'$ 在 $((j_0-1)\pi/n,(j_0+1)\pi/n)$ 上有三个变号点. 由前面所证即知 $(g(t)\varphi_3(t))'$ 在 $((j_0-1)\pi/n,\ j_0\pi/n)$ 及 $(j_0\pi/n,(j_0+1)\pi/n)$ 上各有一个变号点且 $j_0\pi/n$ 是 $(g(t)\varphi_3(t))'$ 的变号点. 将这三个变号点记为 $t_1<t_2<t_3$, 令 $t_0=(j_0-1)\cdot\pi/n$, $t_4=(j_0+1)\pi/n$. 不失一般性,设

$$\operatorname{sign}(\varphi_3(t)g(t))'=(-1)^j, t\in(t_{j-1},t_j),\ j=1,2,3,4.$$

在 $((j_0-1)\pi/n,\ (j_0+1)\pi/n)$ 上几乎处处成立. 因为 $\varphi_2(t)$ 在 $[(j_0-1)\pi/n,\ (j_0+1)\pi/n)$ 上恒正. 所以

$$\operatorname{sign}(\varphi_2(t)(\varphi_3(t)g(t))')=(-1)^j,\ t\in(t_{j-1},t_j),\ j=1,2,3,4.\quad (7.14)$$

在 $((j_0-1)\pi/n,(j_0+1)\pi/n)$ 上几乎处处成立.

根据 (7.11), $P_2(D)g(t)$ 在 $((j_0-1)\pi/n,j_0\pi/n)$ 上不变号,

所以由 (7.13) 及 (7.14) 得

$$\operatorname{sign}(\varphi_1(t)P_2(D)g(t))$$
$$=\begin{cases}+1, & \text{对 a. e 的 } t\in((j_0-1)\pi/n,\ j_0\pi/n)\\ +1, & \text{对 a. e 的 } t\in((j_0\pi/n,(j_0+1)\pi/n)\end{cases}$$

因为 $\varphi_1(t)$ 在 $[(j_0-1)\pi/n,\ (j_0+1)\pi/n)$ 上恒正，所以

$$\operatorname{sign}(P_2(D)g(t))$$
$$=\begin{cases}+1, & \text{对 a. e 的 } t\in((j_0-1)\pi/n,\ j_0\pi/n)\\ +1, & \text{对 a. e 的 } t\in(j_0\pi/n,(j_0+1)\pi/n)\end{cases} \tag{7.15}$$

(7.15) 和 (7.11) 矛盾.

(*c*) 设 $g(t)$ 在两个不相邻的区间 $[(j-1)\pi/n,\ j\pi/n)$，$[(j+k)\pi/n,(j+k+1)\pi/n)$ $(k\geqslant 1)$ 上各有两个零点且 $g(t)$ 在 $((j+s-1)\pi/n,\ (j+s)\pi/n)(s=1,\cdots,k)$ 上各有一个零点.

如果 k 为奇(偶)数，由(7.11) 知，$P_2(D)g(t)$ 在 $((j-1)\pi/n,\ j\pi/n)$ 及 $((j+k)\pi/n,\ (j+k+1)\pi/n)$ 上具有相同 (相反)的符号. 另一方面通过和情况 (*b*) 类似的论证证得 $P_2(D)g(t)$ 在 $((j-1)\pi/n,\ j\pi/n)$ 及 $((j+k)\pi/n,\ (j+k+1)\pi/n)$ 上具有相反(相同)的符号. 矛盾.

(ii) 设 $g(t)$ 在 $[0,\ 2\pi)$ 中恰 $2n+1$ 个不同零点，由于周期性知必定存在 $\tau\in[0,2\pi)$ 使得 $g(\tau)=g'(\tau)=0$. 不妨设 $\tau\in[(j_0-1)\pi/n,\ j_0\pi/n)$，$1\leqslant j_0\leqslant 2n$. 因为 $g(t)$ 有 $2n+1$ 个不同零点，因而必定存在 i_0，$1\leqslant i_0\leqslant 2n$，使得 $g(t)$ 在 $[(i_0-1)\pi/n,\ i_0\pi/n)$ 上有两个不同零点.

(*a*) 若 $i_0=j_0$，则根据引理 6.1-3 的注 3 知道 $P_2(D)g(t)$ 在 $((j_0-1)\pi/n,\ j_0\pi/n)$ 上至少有一个变号点，这和 (7.11) 矛盾.

(*b*) 若 $i_0\neq j_0$，则用和 (*i*) 中 (*b*) 及 (*c*) 类似的讨论可以

推出矛盾.

至此已经证得引理 7.1-1 当特征多项式 $P_r(\lambda)$ 至少有一对共轭复根时成立. 下证当 $P_r(\lambda)$ 仅有实根时也成立. 事实上,令

$$P_r(D)=P_{r-1}(D)(D-\lambda),\ \lambda\in \mathbf{R},$$

则由广义罗尔定理(见附注 6.1-1)知对一切 $n=1,2,\cdots P_{r-1}(D)\delta(t)$ 在 $[0,2\pi)$ 上至少有 $2n+1$ 个变号点. 另一方面因为

$$\operatorname{sign}P_r(D)\delta(t)=(-1)^j,\ t\in((j-1)\pi/n,\ j\pi/n),$$
$$j=1,\cdots,2n. \tag{7.16}$$

所以由恒等式

$$e^{-\lambda t}(D-\lambda)P_{r-1}(D)\delta(t)=D(e^{-\lambda t}P_{r-1}(D)\delta(t))$$

知 $e^{-\lambda t}P_{r-1}(D)\delta(t)$ 在 $((j-1)\pi/n,\ j\pi/n)$ 上严格单调, 从而 $P_{r-1}(D)\delta(t)$ 在 $((j-1)\pi/n,\ j\pi/n)$ 上严格单调且由 (7.16) 知 $P_{r-1}(D)\delta(t)$ 在 $((j-1)\pi/n, j\pi/n)$ 及 $(j\pi/n,\ (j+1)\pi/n)$ $(j=1,\cdots,2n)$ 上单调方向相反,所以 $P_{r-1}(D)\delta(t)$ 在 $((j-1)\pi/n,\ j\pi/n)(j=1,\ \cdots,2n)$ 至多有一个变号点, 且如果 $P_{r-1}(D)\delta(t)$ 在 $j\pi/n$ 处变号则必有 $P_{r-1}(D)\delta(t)$ 在 $((j-1)\pi/n,\ j\pi/n)$ 或 $(j\pi/n,\ (j+1)\pi/n)$ 上不变号. 因此 $P_{r-1}(D)\delta(t)$ 在一个周期内至多有 $2n$ 个变号点,矛盾. □

定理 7.1-1 设 $n>\Lambda,\ \alpha+\dfrac{j-1}{n}\pi$ $(j=1,\cdots,2n)$ 是 $\Phi_{r,n}(t)$ 在 $[0,2\pi)$ 内的 $2n$ 个等距分布的零点, 则对任何有界函数 $f(t)$, 存在唯一的 $Q_{2n}(f,t)\in S_{r-1,2n}(P_r)$, 使得

$$Q_{2n}\left(f,\alpha+\frac{(j-1)\pi}{n}\right)=f\left(\alpha+\frac{(j-1)\pi}{n}\right),\ j=1,\cdots,2n.$$

证 根据命题 7.1-1, 命题 7.1-2 及线性代数知识只需证明齐次方程

$$c_0+\sum_{j=1}^{2n}c_jG_r\left(\alpha+\frac{(i-1)\pi}{n}-\frac{(j-1)\pi}{n}\right)=0,$$