应力分析

徐宏文编著

科学出版社

內 容 簡 介

本书分六編，共二十五章．第一編对应力和应变的基本理論作了扼要的敍述．第二編介紹了解表面应力和应变的两种常用的方法(电阻栅和漆层法)．第三編是光測弹性力学的平面部分，其中包括一般的分析方法和一些补助实驗的方法．第四編是柱杆扭轉問題的薄膜比拟．第五編是近似解法．第六編是光測弹性力学的三向部分．书末还有附录．

应 力 分 析

徐宏文 編著

*

科学出版社 出版 (北京朝阳門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

*

1962 年 9 月第 一 版　书号：2585　字数：614,000

1962 年 9 月第一次印刷　开本：787×1092 1/18

(京) 0001—4,500　印张：26 1/9　插頁：4

定价：4.00 元

序

目前用实驗方法解决弹性体內部和表面上的应力分布問題，在机件或結构的設計、校核、检查和改进工作中已經是相当普遍的事了．用这种方法得到的結果，不但是直接而可靠，并且还补充了理論分析方面的不足，在充分利用材料方面也起了决定性的作用．

应力的实驗分析方法很多，所涉及的范围也相当广泛，并且目前仍在継續发展着，因此很难作全面的、系統的介紹．本书主要內容只包括电阻柵的使用、漆层法、光測弹性力学的一些基本方法、柱杆扭弯問題的薄膜比拟以及与此相对应的一些近似解法等．这些都是比較常用，同时也是应力分析中最基本的方法．在編写时，考虑了由浅入深的原則，同时也照顧了这些方法之間的联系．在叙述方面力求簡明，但也保持了理論的完整性和包括了相当数量的实例，希望能对初学同志有所帮助．

本书的基本对象是学过高等数学、物理和材料力学的工科大学生或实驗室的工作者．第一編弹性力学中的几个基本問題，就是在这样的基础上加进去的．

本书是根据一些有关书籍、論文，結合过去自己的学习笔記和心得編写的．主要根据的資料是：S. Timoshenko and J. N. Goodier, "Theory of Elasticity"; M. M. Frocht, "Photoelasticity", vol. I, II; 以及 R. V. Southwell, "Relaxation Methods in Engineering Science" 和 "Relaxation Methods in Theoretical Physics" 等书籍，另外参考了 Frocht, Shortlay 和 Weller 等人的一些論文．本书在內容及組織系統上都难免有不当之处，敬希讀者指教．

徐 宏 文

1959 年 3 月

目　录

(ZK569/33)

第三編 光測弹性学(平面部分)

第四編 柱杆的扭轉和弯曲

第五編 平面問題中主应力和(等厚度綫)及柱杆扭轉弯曲問題中两种剪应力的近似解法

第六編 三向光測弹性力学的簡单介紹

第一編　弹性理論基础

第一章　应　变

§1. 均　匀　变　形

均匀的弹性体在外力的作用下，或由于所处环境中其他条件的改变往往要产生变形. 这里所說的变形，包括物体在固定坐标系内，所处地位的改变和物体本身的形状改变. 为了系統地研究这一問題，現在由物体内的任意一点 P 来說起（图 1-1）.

設 x, y, z 是发生变形以前，P 点在固定的右手坐标系 O-XYZ 內的坐标；x', y', z' 是經过变形后而 P 点被移到 P' 的新坐标，則在此坐标系內位移 PP' 的分量

$$\left.\begin{aligned} U &= x' - x, \\ V &= y' - y, \\ W &= z' - z \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

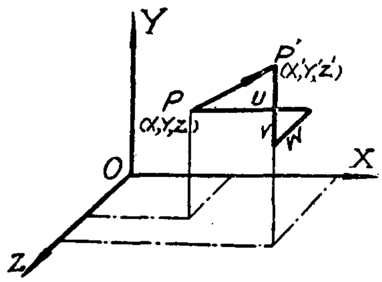

图 1-1

称为 P 点的位移分量.

以上只就弹性体內的任意一点 P 而言. 必須注意，除了把整个物体在空間作刚体的平移移动外，弹性体內每个点的位移分量 U, V, W 都不会是常量，而是因各点所在地位的不同而改变的. 一般地說，位移分量应該是 P 点原有坐标 x, y, z 的函数，即

$$\left.\begin{aligned} U &= f_1(x, y, z), \\ V &= f_2(x, y, z), \\ W &= f_3(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

将上式代入(1.1)，則可得到 P 点位移前后的坐标关系：

$$\left.\begin{aligned} x' &= f_1(x, y, z) + x, \\ y' &= f_2(x, y, z) + y, \\ z' &= f_3(x, y, z) + z. \end{aligned}\right\} \tag{1.2a}$$

如果位移分量 U, V, W 都是坐标的一次函数时，我們称这种变形为均匀变形. 由于均匀变形在以后的討論中还要应用，所以有必要在这里比較仔細地研究一下. 按照上述定义，可以把位移函数 f_1, f_2, f_3 写成

$$\begin{aligned} U &= a_{10} + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ V &= a_{20} + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ W &= a_{30} + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

将此关系代入(1.2a)式，則

$$\left.\begin{aligned}x' &= U + x = a_{10} + (1 + a_{11})x + a_{12}y + a_{13}z,\\ y' &= V + y = a_{20} + a_{21}x + (1 + a_{22})y + a_{23}z,\\ z' &= W + z = a_{30} + a_{31}x + a_{32}y + (1 + a_{33})z,\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

式中 $a_{10}, \cdots, a_{13}; a_{20}, \cdots, a_{23}; a_{30}, \cdots, a_{33}$ 都是常数．在这里可以看到，对于一个指定的点在变形发生后只能有一个固定的位置；反之，变形后的任意一点，也只有变形前的一点与它相对应，这就是說，我們可以把(1.3)式反过来用 x', y', z' 表示 x, y, z. 解(1.3)式，我們得

$$x = \frac{\begin{vmatrix}(x' - a_{10}) & a_{12} & a_{13}\\ (y' - a_{20}) & (1 + a_{22}) & a_{23}\\ (z' - a_{30}) & a_{32} & (1 + a_{33})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(1 + a_{11}) & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & (1 + a_{22}) & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & (1 + a_{33})\end{vmatrix}},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix}(1 + a_{11}) & (x' - a_{10}) & a_{13}\\ a_{21} & (y' - a_{20}) & a_{23}\\ a_{31} & (z' - a_{30}) & (1 + a_{33})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(1 + a_{11}) & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & (1 + a_{22}) & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & (1 + a_{33})\end{vmatrix}},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix}(1 + a_{11}) & a_{12} & (x' - a_{10})\\ a_{21} & (1 + a_{22}) & (y' - a_{20})\\ a_{31} & a_{32} & (z' - a_{30})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(1 + a_{11}) & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & (1 + a_{22}) & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & (1 + a_{33})\end{vmatrix}}.$$

为了便于叙述，把上式改写成

$$\left.\begin{aligned}x &= b_{10} + b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z',\\ y &= b_{20} + b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z',\\ z &= b_{30} + b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}z'.\end{aligned}\right\} \tag{1.3a}$$

根据此式，我們把均匀变形的基本特点說明如下：

(1) 如果 $Ax + By + Cz + D = 0$ 表示变形前的弹性体内的某一平面．为了求此平面在变形后的形状，只須将(1.3a)式代入，即

$$\begin{gathered}A(b_{10} + b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z') + B(b_{20} + b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z') + \\ + C(b_{30}+b_{31}x'+b_{32}y'+b_{33}z')+D = A'x'+B'y'+C'z'+D' = 0.\end{gathered}$$

所以这平面經过变形后仍然是平面，只是傾斜情况及与原点 O 的垂直距离有所改变而已．

（2）将上述結論推广可得到另一結論，即原有的两个平行平面 P 和 Q 在变形后仍然是互相平行的．因为，如果变形前平面 P 的方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

平面 Q 的方程为

$$Ax + By + Cz + E = 0,$$

則产生变形后，平面 P 变为 P' 的方程为

$$A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0,$$

平面 Q 变为 Q' 的方程为

$$A'x' + B'y' + C'z' + E' = 0,$$

这里只有常数項不同，所以变形后 $P' \| Q'$．

（3）由（1）还能导出这样的結論，即弹性体内的直綫經变形后仍然是直綫，仅方位有所改变而已．因为直綫 L 是可以当作两个平面 P 和 Q 的公有部分（交綫）来看待的．既然 P 經过变形后仍是一个平面 P'，而 L 又是 P 中的一部分，因此 L' 必定是 P' 内的一条平面曲綫．同理，L' 也应該是 Q' 内的一条平面曲綫，因此可以断定 L' 一定是 P' 和 Q' 的公有部分——它們的交綫（直綫）．

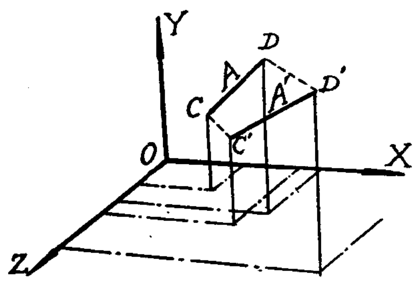

图 1-2

（4）既然直綫經过均匀变形后仍为直綫，因此就为以下关于綫段在均匀变形中的改变提供了前提．如图 1-2 所示，設 A 为綫段 CD 的原始长度；x_c, y_c, z_c 及 x_d, y_d, z_d 为 C, D 两点的坐标，A_x, A_y, A_z 代表綫段 A 的三个分量，則經过变形后，按照(1.3)式，我們有

C' 点的坐标：

$$\begin{aligned} x_c' &= a_{10} + (1 + a_{11})x_c + a_{12}y_c + a_{13}z_c, \\ y_c' &= a_{20} + a_{21}x_c + (1 + a_{22})y_c + a_{23}z_c, \\ z_c' &= a_{30} + a_{31}x_c + a_{32}y_c + (1 + a_{33})z_c; \end{aligned}$$

D' 点的坐标：

$$\begin{aligned} x_d' &= a_{10} + (1 + a_{11})x_d + a_{12}y_d + a_{13}z_d, \\ y_d' &= a_{20} + a_{21}x_d + (1 + a_{22})y_d + a_{23}z_d, \\ z_d' &= a_{30} + a_{31}x_d + a_{32}y_d + (1 + a_{33})z_d; \end{aligned}$$

A' 的分量：

$$\begin{aligned} A_x' = x_d' - x_c' &= (x_d - x_c) + a_{11}(x_d - x_c) + a_{12}(y_d - y_c) + a_{13}(z_d - z_c) = \\ &= A_x + a_{11}A_x + a_{12}A_y + a_{13}A_z \end{aligned}$$

或

同理，

$$\left.\begin{aligned} \delta A_x &= A_x' - A_x = a_{11}A_x + a_{12}A_y + a_{13}A_z, \\ \delta A_y &= A_y' - A_y = a_{21}A_x + a_{22}A_y + a_{23}A_z, \\ \delta A_z &= A_z' - A_z = a_{31}A_x + a_{32}A_y + a_{33}A_z. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

上式說明，当两平行且相等的綫段A及B（$A_x=B_x$，$A_y=B_y$，$A_z=B_z$）处于同一个均匀变形的区域（系数a_{10}，$\cdots$，a_{33}均为常数）内时，則在变形后，两綫段仍維持原来的平行和相等，只是它們的长度和方位有些改变而已.

（5）将上述結果推广，便能得到这样的結論，即均匀变形区域內的任何两个全同的几何形体，无論它們所处的位置如何，只要它們的方位和傾斜情况一致，則变形后必定仍能維持全同的形状和傾斜情况的一致.

总之，从綫段問題开始就已經証明，在均匀变形中，各分量的增减仅与原始的分量有关，而不受綫段所处地位的局限[(1.4)式]. 所以上面各条結論可适用于变形区域內的任何部分. 这就是我們称这种变形为均匀变形的理由. 为了簡便起見，以后在討論綫段問題时，我們只談經过原点的綫段，因为它可以概括整个均匀变形区域內的全部情况.

§2. 微細的均匀变形

这里所謂的“微細”是指变形中各点的三个位移分量U，V，W而言的. 也就是說，在均匀变形区內，各点在变形后的坐标（x'，y'，z'）与其原始坐标（x，y，z）之間仅有很小的差別. 在此前提下[参看(1.3)式]，为了达到这种要求，就必須使a_{10}，a_{11}，$\cdots$，a_{33}所有系数的絕对值都远小于1，因此在后面的討論中，这些系数的二次項都可以忽略不計.

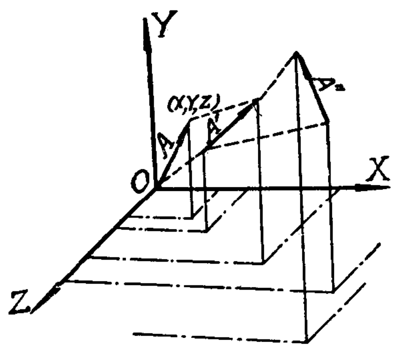

图 1-3

現在首先証明微細均匀变形的迭加性. 假定A是由原点开始的一个綫段（图 1-3），它的原始分量$A_x=x$，$A_y=y$，$A_z=z$. 如果A受到一种系数为a_{10}，a_{11}，$\cdots$，a_{33}的均匀变形被移到A'后，則由(1.4)式，A'的三个分量是

$$\begin{aligned}A'_x&=A_x+\delta A_x=x+[a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z],\\A'_y&=A_y+\delta A_y=y+[a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z],\\A'_z&=A_z+\delta A_z=z+[a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z].\end{aligned}$$

当A被移到A'后，如果再接受另外一种系数为b_{10}，b_{11}，$\cdots$，b_{33}的均匀变形，使A'再移到A''时，則对A'来講，A''分量的相对增量应該是

$$\begin{aligned}\delta A'_x=\;&b_{11}[x+a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z]+b_{12}[y+a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z]+\\&+b_{13}[z+a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z],\\\delta A'_y=\;&b_{21}[x+a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z]+b_{22}[y+a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z]+\\&+b_{23}[z+a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z],\\\delta A'_z=\;&b_{31}[x+a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z]+b_{32}[y+a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z]+\\&+b_{33}[z+a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z].\end{aligned}$$

由于前后两次变形都是微細的均匀变形，它們的系数的乘积可以忽略不計. 因此上式可簡化为

$$\delta A'_x = b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z,$$
$$\delta A'_y = b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z,$$
$$\delta A'_z = b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z.$$

如此經过两次变形以后，綫段A的总增量中：

$$\Delta A_x = \delta A_x + \delta A'_x = (a_{11} + b_{11})x + (a_{12} + b_{12})y + (a_{13} + b_{13})z,$$
$$\Delta A_y = \delta A_y + \delta A'_y = (a_{21} + b_{21})x + (a_{22} + b_{22})y + (a_{23} + b_{23})z,$$
$$\Delta A_z = \delta A_z + \delta A'_z = (a_{31} + b_{31})x + (a_{32} + b_{32})y + (a_{33} + b_{33})z.$$

将上述結果与(1.4)式比較，可以得到这样的結論：

如果不計系数的乘积項，系数分别为 $a_{10}, a_{11}, \cdots, a_{33}$ 和 $b_{10}, b_{11}, \cdots, b_{33}$ 的两种微細均匀变形，无論它們的作用次序如何，对于弹性体內任一綫段A的最后效果，都只相当于系数为$(a_{10} + b_{10}), (a_{11} + b_{11}), \cdots, (a_{33} + b_{33})$的均匀变形的单独作用. 这就是我們所要証明的迭加性.

在§1里，我們已經讲过变形中包括弹性体的整体移动（平移和旋轉）及其本身的形状改变，所以有必要分清，在(1.4)式中，分量的增加在δA_x, δA_y, δA_z內究竟有多少是整体移动，又有多少是由于本身形状的改变. 为此，我們首先必須分清由单独平移或单独旋轉所产生的結果.

(1) 很明显，由单独平移作用的結果，按定义是絕不能使綫段A的分量增加或减少的. 它只能使物体內的所有各点都产生共同的位移，这位移可以由原点的位移来代表，其分量就是(1.3)式中的各常数項 a_{10}, a_{20} 及 a_{30}.

(2) 其次，我們談单独的整体旋轉作用. 如图 1-4 所示，当綫段A繞 OL 軸轉过一个θ角后，其末端a必定在过 a 点垂直于 OL 的平面內，沿着以 c 点为圓心，ac 为半径的圓弧移至 a'. 假定θ的数值很小(微細的均匀变形)，以至 $\overset{\frown}{aa'}$ 可以由圓弧切綫 $\overline{aa'_1}$ 来代替时，则

$$\mathbf{A} + \overline{aa'_1} = \overline{Oa'}.$$

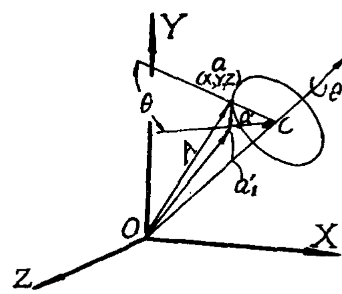

图 1-4

但由 $\overline{Oa}$ 到 $\overline{Oa'_1}$ 綫段各分量的增量就是 $\overline{aa'_1}$（相当于δA）在各坐标軸上的分量. 为了便于計算，我們用矢量积的办法. 設 $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ 分别代表指向 OX, OY, OZ 各軸正方的单位矢；θ_x, θ_y, θ_z 代表轉角$\boldsymbol{\theta}$的三个分量，则

$$\overline{aa'} \doteq \overline{aa'_1} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

但 $\overline{aa'} = \delta A_x\mathbf{I} + \delta A_y\mathbf{J} + \delta A_z\mathbf{K}$，所以

$$\left.\begin{aligned} \delta A_x &= \begin{vmatrix} \theta_y & \theta_z \\ y & z \end{vmatrix} = -\theta_z y + \theta_y z, \\ \delta A_y &= \begin{vmatrix} \theta_z & \theta_x \\ z & x \end{vmatrix} = \theta_z x - \theta_x z, \\ \delta A_z &= \begin{vmatrix} \theta_x & \theta_y \\ x & y \end{vmatrix} = -\theta_y x + \theta_x y. \end{aligned}\right\} \quad (1.5)$$

由以上結果可以看出，当轉角很小时，单独的旋轉作用正是均匀变形的一个个别情况．由于平移对(1.4)式不起作用，因此我們可把上面的結果說得广泛一些，即整体移动是微細均匀变形的一种．

(3) 根据微細均匀变形的迭加性及上述两种情况，我們可以从一般的微細均匀变形中，将弹性体本身改变(或称純变形)的部分区别出来．如由(1.4)式，

$$\delta A_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = \left[-\frac{a_{21} - a_{12}}{2} y + \frac{a_{13} - a_{31}}{2} z \right] + \\ + \left[a_{11}x + \frac{a_{12} + a_{21}}{2} y + \frac{a_{13} + a_{31}}{2} z \right],$$

$$\delta A_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = \left[\frac{a_{21} - a_{12}}{2} x - \frac{a_{32} - a_{23}}{2} z \right] + \\ + \left[\frac{a_{21} + a_{12}}{2} x + a_{22}y + \frac{a_{23} + a_{32}}{2} z \right],$$

$$\delta A_z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = \left[-\frac{a_{13} - a_{31}}{2} x + \frac{a_{32} - a_{23}}{2} y \right] + \\ + \left[\frac{a_{13} + a_{31}}{2} x + \frac{a_{32} + a_{23}}{2} y + a_{33}z \right].$$

設

$$\omega_x = \frac{a_{32} - a_{23}}{2}, \qquad \omega_y = \frac{a_{13} - a_{31}}{2}, \qquad \omega_z = \frac{a_{21} - a_{12}}{2},$$

$$e_x = a_{11}, \qquad e_y = a_{22}, \qquad e_z = a_{33},$$

$$e_{xy} = \frac{a_{12} + a_{21}}{2}, \qquad e_{yz} = \frac{a_{23} + a_{32}}{2}, \qquad e_{zx} = \frac{a_{31} + a_{13}}{2},$$

則上式可写成

$$\left.\begin{aligned} \delta A_x &= (-\omega_z y + \omega_y z) + [e_x x + e_{xy} y + e_{zx} z], \\ \delta A_y &= (\omega_z x - \omega_x z) + [e_{xy} x + e_y y + e_{yz} z], \\ \delta A_z &= (-\omega_y x + \omega_x y) + [e_{zx} x + e_{yz} y + e_z z]. \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

将此式与(1.5)式比較，很明显 ω 相当于 θ．所以此式的第一个括号为整体移动(旋轉)的結果，第二个括号表示純变形，这就是我們的結論．

§ 3. 綫应变和角应变

按上节所述，如果将物体預先固定，使它不能发生整体移动，則在发生变形后，体内各点的位移只能是純变形作用的結果．綫段 A 經过这样的变形以后仍是直綫；并且将(1.6)式中的第一个括号去掉就能得到它的三个分量：

$$\left.\begin{aligned} \delta A_x &= e_x x + e_{xy} y + e_{zx} z, \\ \delta A_y &= e_{xy} x + e_y y + e_{yz} z, \\ \delta A_z &= e_{zx} x + e_{yz} y + e_z z. \end{aligned}\right\} \tag{1.6a}$$

如图 1-5 所示，在变形前，如果先把 A 分成任意等份，并把它們当作一些平行且相等的独立的綫段来分别考虑，則經过純变形当 A 变成 A' 后，显然各綫段的长度仍須相等．换言之，A' 对 A 来講，无論伸长或縮短，在整个綫段内的任何部分都是均匀一致的．习慣上我們常以单位长度内的伸縮量来說明这种情況，并称此伸縮量为綫应变．綫应变的单位是毫米/毫米（或吋/吋等），实际上它只是一个比值而不受所取单位的影响．伸长时用正号表示，縮短时用負号表示．

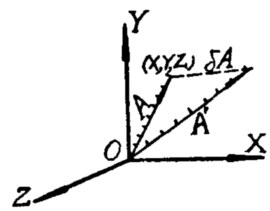

图 1-5

設 ΔA 为 A 变成 A' 时的总伸长量，則按以上定义，綫应变 ε 可写成

$$\varepsilon = \frac{A' - A}{A} = \frac{\Delta A}{A}.$$

但

$$A'^2 = (A + \Delta A)^2 = (x + \delta A_x)^2 + (y + \delta A_y)^2 + (z + \delta A_z)^2;$$

而

$$A^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

所以

$$2A(\Delta A) + (\Delta A)^2 = (2x\delta A_x + 2y\delta A_y + 2z\delta A_z) + \\ + (\delta A_x)^2 + (\delta A_y)^2 + (\delta A_z)^2.$$

对于微細的变形，前面已說过，微量的二次項可以忽略不計，因而上式可簡化为

$$A(\Delta A) = x\delta A_x + y\delta A_y + z\delta A_z.$$

将 (1.6a) 式代入，并考虑綫应变的定义，則

$$\varepsilon = \frac{\Delta A}{A} = \frac{A(\Delta A)}{A^2} = \frac{1}{A^2}\left[e_x x^2 + e_y y^2 + e_z z^2 + 2e_{xy}xy + 2e_{yz}yz + 2e_{zx}zx\right]. \quad (1.7)$$

对于原与 OX 軸平行的綫段，$A = A_x = x$，$y = z = 0$，所以

$$\varepsilon = x^{-2}(e_x x^2) = e_x.$$

因此在純变形中，系数 e_x 就是弹性体内原与 OX 軸平行的綫段的单位增长量（綫应变）．同理，e_y 或 e_z 就是原与 OY 軸或 OZ 軸平行的綫段的綫应变．

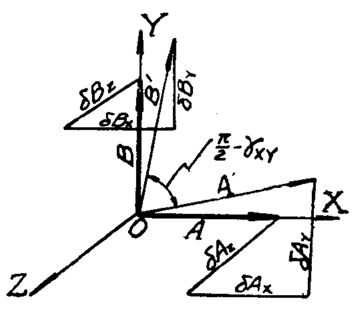

图 1-6

至于在 (1.7) 式中，其他三个系数 e_{xy}，e_{yz}，e_{zx} 的意义可用下面方式說明．例如为了解释 e_{xy}，設 A 和 B 是原与 OX 和 OY 軸平行的两个綫段（图 1-6），其中 $A = A_x$，$A_y = A_z = 0$；$B = B_y$，$B_x = B_z = 0$；A' 及 B' 是它們变形后的位置．如果用矢量表示，則

$$\mathbf{A}' = (A_x + \delta A_x)\mathbf{I} + (\delta A_y)\mathbf{J} + (\delta A_z)\mathbf{K},$$

$$\mathbf{B}' = (\delta B_x)\mathbf{I} + (B_y + \delta B_y)\mathbf{J} + (\delta B_z)\mathbf{K}.$$

設 γ_{xy} 为經过純变形后的 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 之間夹角的縮小量（直角間的縮小量），則矢量的数性

积为

$$\mathbf{A}'\cdot\mathbf{B}'=A'B'\sin\gamma_{xy}=(A_x+\delta A_x)\delta B_x+\delta A_y(B_y+\delta B_y)+\delta A_z\delta B_z.$$

对于微細的变形,

$$\gamma_{xy}\doteq\sin\gamma_{xy}\doteq\frac{A_x\delta B_x+B_y\delta A_y}{A'B'}=$$

$$=\frac{A_x\delta B_x+B_y\delta A_y}{\sqrt{(A_x+\delta A_x)^2+(\delta A_y)^2+(\delta A_z)^2}\sqrt{(\delta B_x)^2+(B_y+\delta B_y)^2+(\delta B_z)^2}}\doteq$$

$$\doteq\frac{A_x\delta B_x+B_y\delta A_y}{(A_x+\delta A_x)(B_y+\delta B_y)}\doteq\frac{A_x\delta B_x+B_y\delta A_y}{A_xB_y}=\frac{\delta B_x}{B_y}+\frac{\delta A_y}{A_x}.$$

由(1.6a)式可知,

$$\delta A_y=e_{xy}A_x+e_yA_y+e_{yz}A_z,$$

而 $A_y=A_z=0$, 故

$$(\delta A_y)A_x^{-1}=e_{xy};$$

同理,

$$\delta B_x=e_xB_x+e_{xy}B_y+e_{zx}B_z,$$

而 $B_x=B_z=0$, 故

$$(\delta B_x)B_y^{-1}=e_{xy}.$$

将結果代回上式,則

$$\gamma_{xy}=2e_{xy},$$

同理,

$$\gamma_{yz}=2e_{yz},\qquad\gamma_{zx}=2e_{zx}.$$

我們称 $2e_{xy}$(或 γ_{xy})为角应变(或剪应变). 它表示弹性体内原与 OX 和 OY 两軸平行且彼此相交的两个綫段經过变形后在直角內所減少的角度(弧度). $2e_{yz}$ 及 $2e_{zx}$ 也可类推.

在上述証明中,我們曾略去了許多微量,并且 δA_x, δA_z, δB_y, δB_z 在这里根本也沒有起作用. 因此为了便于想象,把图 1-6 簡化成图 1-7 的形式,使以上結果在这里仍能講通.

由图 1-7 我們可以看到,

$$\angle a'oa\doteq\operatorname{tg}\angle a'oa=\frac{\delta A_y}{A}=\frac{\delta A_y}{A_x}=e_{xy},$$

$$\angle b'ob\doteq\operatorname{tg}\angle b'ob=\frac{\delta B_x}{B}=\frac{\delta B_x}{B_y}=e_{xy}.$$

这就說明,在弹性体內,A 与其最后位置 A' 之間的夹角等于 B 与其最后位置 B' 之間

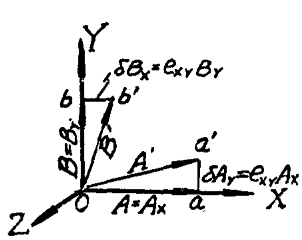

图 1-7

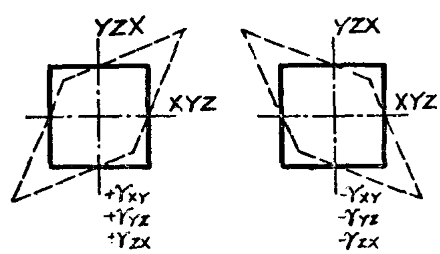

图 1-8

的夹角，并且与 A，B 的长度无关．必须注意，这里我們采用的是右手坐标系，而上述結果是在 δA_y 及 δB_x 均为正值时导出的，因此角应变的正負号可以按图 1-8 决定．

綜合上述，由原点开始的任意綫段的綫应变 ε 也可以該綫段終点的坐标及六种应变来表示，即

$$\varepsilon = \frac{1}{A^2}\left[e_x x^2 + e_y y^2 + e_z z^2 + \gamma_{xy} xy + \gamma_{yz} yz + \gamma_{zx} zx\right]. \tag{1.7a}$$

上式中坐标 x，y，z 和系数（应变）e_x，e_y，$\cdots$，γ_{zx} 都是与 $O\text{-}XYZ$ 坐标系相对应的，但綫段 A 的綫应变是在弹性体内部产生的，它不受选取坐标系的限制．例如在图 1-9 中，我們同样地能用 A 之終点在坐标系 $O\text{-}X'Y'Z'$ 内的坐标 x'，y'，z' 和与 $O\text{-}X'Y'Z'$ 相对应的另一組系数（应变）来表示 ε．为此，我們設 OX' 对 $O\text{-}XYZ$ 坐标系的方向余弦为 l_1，m_1，n_1；OY' 的方向余弦为 l_2，m_2，n_2；OZ' 的方向余弦为 l_3，m_3，n_3，則綫段 A 終点的新旧坐标之間的关系如下：

$$x = x'l_1 + y'l_2 + z'l_3,$$
$$y = x'm_1 + y'm_2 + z'm_3,$$
$$z = x'n_1 + y'n_2 + z'n_3.$$

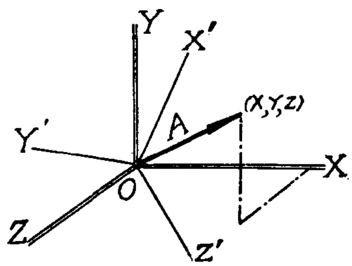

图 1-9

将此关系代入（1.7a）式，則

$$\begin{aligned}\varepsilon = A^{-2}[&e_x(x'l_1 + y'l_2 + z'l_3)^2 + e_y(x'm_1 + y'm_2 + z'm_3)^2 + \\ &+ e_z(x'n_1 + y'n_2 + z'n_3)^2 + \gamma_{xy}(x'l_1 + y'l_2 + z'l_3) \times \\ &\times (x'm_1 + y'm_2 + z'm_3) + \cdots],\end{aligned}$$

将此式展开，并設常数

$$\left.\begin{aligned}e'_x &= e_x l_1^2 + e_y m_1^2 + e_z n_1^2 + \gamma_{xy} l_1 m_1 + \gamma_{yz} m_1 n_1 + \gamma_{zx} n_1 l_1, \\ e'_y &= e_x l_2^2 + e_y m_2^2 + e_z n_2^2 + \gamma_{xy} l_2 m_2 + \gamma_{yz} m_2 n_2 + \gamma_{zx} n_2 l_2, \\ e'_z &= e_x l_3^2 + e_y m_3^2 + e_z n_3^2 + \gamma_{xy} l_3 m_3 + \gamma_{yz} m_3 n_3 + \gamma_{zx} n_3 l_3, \\ \gamma'_{xy} &= 2e_x l_1 l_2 + 2e_y m_1 m_2 + 2e_z n_1 n_2 + \gamma_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1) + \\ &\quad + \gamma_{yz}(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \gamma_{zx}(n_1 l_2 + n_2 l_1), \\ \gamma'_{yz} &= 2e_x l_2 l_3 + 2e_y m_2 m_3 + 2e_z n_2 n_3 + \gamma_{xy}(l_2 m_3 + l_3 m_2) + \\ &\quad + \gamma_{yz}(m_2 n_3 + m_3 n_2) + \gamma_{zx}(n_2 l_3 + n_3 l_2), \\ \gamma'_{zx} &= 2e_x l_3 l_1 + 2e_y m_3 m_1 + 2e_z n_3 n_1 + \gamma_{xy}(l_3 m_1 + l_1 m_3) + \\ &\quad + \gamma_{yz}(m_3 n_1 + m_1 n_3) + \gamma_{zx}(n_3 l_1 + n_1 l_3),\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

則

$$\varepsilon = A^{-2}[e'_x x'^2 + e'_y y'^2 + e'_z z'^2 + \gamma'_{xy} x'y' + \gamma'_{yz} y'z' + \gamma'_{zx} z'x'].$$

将此式与（1.7a）式比較，可見（1.8）式中的六个常数正是对应于 $O\text{-}X'Y'Z'$ 的三个綫应变和三个角应变．这是今后轉換坐标求取各种应变的主要公式．

§ 4. 主应变及主軸方向的求法

按上节所述，綫段 A 在已知应变条件 e_x，e_y，e_z，γ_{xy}，γ_{yz}，γ_{zx} 的作用区内，一般