

应力分析

徐宏文編著

科学出版社

內 容 簡 介

本书分六編，共二十五章。第一編对应力和应变的基本理論作了扼要的敘述。第二編介紹了解表面应力和应变的两种常用的方法(电阻栅和漆层法)。第三編是光測彈性力学的平面部分，其中包括一般的分析方法和一些補助实验的方法。第四編是柱杆扭轉問題的薄膜比拟。第五編是近似解法。第六編是光測彈性力学的三向部分。书末还有附录。

应 力 分 析

徐宏文 編著

*

科学出版社出版 (北京朝阳門大街 117 号)
北京市书刊出版业营业登记证出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1962 年 9 月第 一 版 书号：2585 字数：614,000
1962 年 9 月第一次印刷 开本：787 × 1092 1/18
(京) 0001—4,500 印张：26 1/9 插頁：4

定价：4.00 元

序

目前用实验方法解决弹性体内部和表面上的应力分布问题，在机件或结构的设计、校核、检查和改进工作中已经是相当普遍的事了。用这种方法得到的结果，不但是直接而可靠，并且还补充了理论分析方面的不足，在充分利用材料方面也起了决定性的作用。

应力的实验分析方法很多，所涉及的范围也相当广泛，并且目前仍在继续发展着，因此很难作全面的、系统的介绍。本书主要内容只包括电阻栅的使用、漆层法、光测弹性力学的一些基本方法、柱杆扭弯问题的薄膜比拟以及与此相对应的一些近似解法等。这些都是比较常用，同时也是应力分析中最基本的方法。在编写时，考虑了由浅入深的原则，同时也照顾了这些方法之间的联系。在叙述方面力求简明，但也保持了理论的完整性和包括了相当数量的实例，希望能对初学同志有所帮助。

本书的基本对象是学过高等数学、物理和材料力学的工科大学生或实验室的工作人员。第一编弹性力学中的几个基本问题，就是在这样的基础上加进去的。

本书是根据一些有关书籍、论文，结合过去自己的学习笔记和心得编写的。主要根据的资料是：S. Timoshenko and J. N. Goodier, "Theory of Elasticity"; M. M. Frocht, "Photoelasticity", vol. I, II; 以及 R. V. Southwell, "Relaxation Methods in Engineering Science" 和 "Relaxation Methods in Theoretical Physics" 等书籍，另外参考了 Frocht, Shortlay 和 Weller 等人的一些论文。本书在内容及组织系统上都难免有不当之处，敬希读者指教。

徐 宏 文

1959年3月

目 录

(2k569/33)

序 ix

第一編 弹性理論基础

2k509/32

第一章 应变	1
§ 1. 均匀变形	1
§ 2. 微細的均匀变形	4
§ 3. 綫应变和角应变	6
§ 4. 主应变及主軸方向的求法	9
§ 5. 一般的变形	11
§ 6. 相容方程	15
第二章 应力	19
§ 7. 应力及其表示法	19
§ 8. 平衡方程	21
§ 9. 表面条件	23
§ 10. 一点受力状况的分析	24
§ 11. 最大剪应力	27
§ 12. 拉梅 (G. Lamé) 应力椭球——总应力	29
§ 13. 莫尔 (O. Mohr) 应力平面	31
第三章 应力和应变的关系	36
§ 14. 各向同性材料的弹性系数	36
§ 15. 一般的解題方法	40
§ 16. 弹性力学的基本公式	44
§ 17. 解答的唯一性	46
第四章 平面問題	48
§ 18. 平面应力問題	48
§ 19. 平面应变問題	52
§ 20. 平面問題的小結	55

第二編 用电阻柵解表面上的应力問題

第五章 应变花	56
§ 21. 引言	56
§ 22. 莫尔应力圓和应变圓	56
§ 23. 应变的量法	59
§ 24. 常用的应变花	61

§ 25. 由应变求应力的图解法	65
第六章 电阻栅	67
§ 26. 引言	67
§ 27. 应变仪中的电阻絲	69
§ 28. 平繞式单向阻栅	70
§ 29. 旋繞式单向阻栅	74
§ 30. 其他形式的单向阻栅	75
§ 31. 阻栅花	76
§ 32. 直角阻栅花	77
§ 33. 等角阻栅花	83
§ 34. 应力阻栅	88
第七章 电阻栅在使用方面的几个問題	91
§ 35. 惠斯登电桥	91
§ 36. 温差补偿法	92
§ 37. 阻栅的粘法	95
§ 38. 防潮問題	97
§ 39. 电路中的接触电阻	98
第八章 电阻栅的簡單应用	102
§ 40. 引言	102
§ 41. 柱杆截面內的軸向力、弯矩和扭力矩	103
§ 42. 由阻栅做成的测量力的工具和测量力矩或扭矩的工具	105
§ 43. 由阻栅做成的其他量具	108
第九章 脆漆层实验	112
§ 44. 引言	112
§ 45. 应力脆漆	113
§ 46. 脆漆实验的各种应用	118
§ 47. 小結	121

第三編 光测弹性学(平面部分)

第十章 光测弹性学的基本理論	124
§ 48. 引言	124
§ 49. 光的反射和折射	126
§ 50. 全反射	129
§ 51. 光的偏振	130
§ 52. 双折射	135
§ 53. 起偏振鏡	139
§ 54. 頻率及波长	143
§ 55. 光波片	144
第十一章 等剪力綫图及等斜率綫图	151
§ 56. 单式偏振光鏡	151

§ 57. 复式偏振光鏡	155
§ 58. 等剪力綫图	160
§ 59. 白光的应用	169
§ 60. 等斜率綫图	170
§ 61. 模型材料	176
第十二章 应力的直接測量法	178
§ 62. 引言	178
§ 63. 补偿器	178
§ 64. 旋轉分析鏡法	183
§ 65. 側向应变仪	184
§ 66. 等厚度綫	189
第十三章 主应力迹綫	195
§ 67. 主应力迹綫及其画法	195
§ 68. 均衡点附近的力迹	196
§ 69. 沿力迹的平衡方程(拉梅-麦克斯威方程)	200
第十四章 应力的計算方法	205
§ 70. 引言	205
§ 71. 直綫內的剪应力	205
§ 72. 直綫內的法向应力 σ_x 及 σ_y	208
§ 73. 对称軸內的主应力	215
§ 74. 力迹內的主应力	221
§ 75. 等厚綫的图解法	226
第十五章 理論的力綫, 等斜綫, 力迹及等厚綫	232
§ 76. 引言	232
§ 77. 用极坐标解平面問題	232
§ 78. 集中外力对无穷直边的作用[弗拉芒(Flamant), 布希涅斯克(Boussinesq)問題]	235
§ 79. 圓盘中的应力[赫茲(Hertz)問題]	238

第四編 柱杆的扭轉和弯曲

§ 80. 引言	250
第十六章 柱杆的扭轉	253
§ 81. 扭轉問題的通解	253
§ 82. 有关实心軸的几个簡單例題	261
§ 83. 实心軸的薄膜比拟	265
§ 84. q/T 的測量及比例問題	267
§ 85. 型钢	271
§ 86. 超弹性的薄膜比拟	275
§ 87. 空心軸的薄膜比拟	281
§ 88. 決定平板高度的半試驗法	283
§ 89. 空心軸的砂堆比拟	286

§ 90. 薄壁軸	288
§ 91. 扭轉問題的自由薄膜比拟	291
第十七章 柱杆的弯曲	301
§ 92. 弯曲問題的通解	301
§ 93. 簡單例題	305
§ 94. 弯曲問題的薄膜比拟	307
§ 95. 輔助膜面	311
第十八章 薄膜比拟的實驗方法	313
§ 96. 皂泡實驗法	313
§ 97. 皮膜實驗法	318
§ 98. 利用互不相混的两种液体間的分界面法	319

第五編 平面問題中主应力和(等厚度綫)及柱杆 扭轉弯曲問題中两种剪应力的近似解法

§ 99. 引言	322
第十九章 近似解法中的几个基本問題	324
§ 100. 基本公式	324
§ 101. 不完整的內点(或結点)	328
§ 102. 导数表	330
§ 103. 用多元一次联立方程解方断面及正三角形断面軸的扭轉問題	337
第二十章 两种常用的近似解法	341
§ 104. 引言	341
第一部分 重复調整法	341
§ 105. 重复調整法中的几个基本問題	341
§ 106. 控制点	344
§ 107. 控制点的单向連續	346
§ 108. 中間控制值的求法	355
§ 109. 椭圆断面梁的弯曲問題	360
§ 110. 圓孔拉板的等厚度綫图	365
第二部分 网索比拟法	370
§ 111. 附加外力	370
§ 112. 网索比拟法的举例(正方断面軸的扭轉应力膜面)	372
§ 113. 初值(粗网及細网)	373
§ 114. 曲边調整, 区域調整及点組調整	376
§ 115. 空心椭圆軸的扭轉問題	379
§ 116. 結語	382

第六編 三向光測弹性力学的簡單介紹

第二十一章 冻结应力实验的基础	384
§ 117. 引言	384

§ 118. 次主应力	384
§ 119. 模型材料的光力效应	386
§ 120. 冻结应力	395
§ 121. Bt-61-893 型白氏塑胶	398
§ 122. 弗氏塑胶 (Fosterite)	400
第二十二章 简单冻结应力实验	405
§ 123. 引言	405
§ 124. 单向拉力实验	406
§ 125. 纯弯曲实验	410
§ 126. 次主轴的旋转作用	415
第二十三章 利用斜射偏振光解冻结应力	420
§ 127. 引言	420
§ 128. 柱杆的扭转问题	422
§ 129. 迴轉体的扭转问题	424
§ 130. 主平面内各点的应力	426
§ 131. 利用斜射解平面问题	431
§ 132. 一般情况	433
§ 133. 聚光法	436
第二十四章 利用偏振光的散射测量应力	441
§ 134. 散射光的可见性	441
§ 135. 均匀单向拉伸实验	442
§ 136. 几种简单的应用	445
第二十五章 光测弹性力学的总结	450
附录	455
§ 1. 引言	455
§ 2. 量纲理论基础	455
§ 3. 相似现象	458
§ 4. 弹性结构的模型实验	459

第一編 弹性理論基础

第一章 应 变

§ 1. 均 匀 变 形

均匀的弹性体在外力的作用下，或由于所处环境中其他条件的改变往往要产生变形。这里所說的变形，包括物体在固定坐标系内，所处地位的改变和物体本身的形状改变。为了系統地研究这一問題，現在由物体内的任意一点 P 來說起(图 1-1)。

設 x, y, z 是发生变形以前, P 点在固定的右手坐标系 $O-XYZ$ 內的坐标; x', y', z' 是經過变形后而 P 点被移到 P' 的新坐标, 則在此坐标系內位移 PP' 的分量

$$\left. \begin{aligned} U &= x' - x, \\ V &= y' - y, \\ W &= z' - z \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

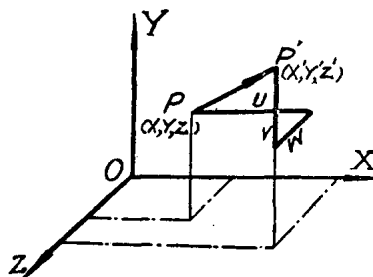


图 1-1

称为 P 点的位移分量。

以上只就弹性体内的任意一点 P 而言。必須注意,除了把整个物体在空間作剛体的平移移动外,弹性体内每个点的位移分量 U, V, W 都不会是常量,而是因各点所在地位的不同而改变的。一般地說,位移分量應該是 P 点原有坐标 x, y, z 的函数,即

$$\left. \begin{aligned} U &= f_1(x, y, z), \\ V &= f_2(x, y, z), \\ W &= f_3(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

将上式代入(1.1),則可得到 P 点位移前后的坐标关系:

$$\left. \begin{aligned} x' &= f_1(x, y, z) + x, \\ y' &= f_2(x, y, z) + y, \\ z' &= f_3(x, y, z) + z. \end{aligned} \right\} \quad (1.2a)$$

如果位移分量 U, V, W 都是坐标的一次函数时,我們称这种变形为均匀变形。由于均匀变形在以后的討論中还要应用,所以有必要在这里比較仔細地研究一下。按照上述定义,可以把位移函数 f_1, f_2, f_3 写成

$$\begin{aligned} U &= a_{10} + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ V &= a_{20} + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ W &= a_{30} + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

将此关系代入(1.2a)式,則

$$\left. \begin{aligned} x' = U + x &= a_{10} + (1 + a_{11})x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' = V + y &= a_{20} + a_{21}x + (1 + a_{22})y + a_{23}z, \\ z' = W + z &= a_{30} + a_{31}x + a_{32}y + (1 + a_{33})z, \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

式中 $a_{10}, \dots, a_{13}; a_{20}, \dots, a_{23}; a_{30}, \dots, a_{33}$ 都是常数。在这里可以看到,对于一个指定的点在变形发生后只能有一个固定的位置;反之,变形后的任意一点,也只有变形前的一点与它相对应,这就是說,我們可以把(1.3)式反过来用 x', y', z' 表示 x, y, z 。解(1.3)式,我們得

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} (x' - a_{10}) & a_{12} & a_{13} \\ (y' - a_{20}) & (1 + a_{22}) & a_{23} \\ (z' - a_{30}) & a_{32} & (1 + a_{33}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 + a_{11}) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (1 + a_{22}) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (1 + a_{33}) \end{vmatrix}}, \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} (1 + a_{11}) & (x' - a_{10}) & a_{13} \\ a_{21} & (y' - a_{20}) & a_{23} \\ a_{31} & (z' - a_{30}) & (1 + a_{33}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 + a_{11}) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (1 + a_{22}) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (1 + a_{33}) \end{vmatrix}}, \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} (1 + a_{11}) & a_{12} & (x' - a_{10}) \\ a_{21} & (1 + a_{22}) & (y' - a_{20}) \\ a_{31} & a_{32} & (z' - a_{30}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 + a_{11}) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (1 + a_{22}) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (1 + a_{33}) \end{vmatrix}}. \end{aligned}$$

为了便于叙述,把上式改写成

$$\left. \begin{aligned} x &= b_{10} + b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z', \\ y &= b_{20} + b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z', \\ z &= b_{30} + b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}z'. \end{aligned} \right\} \quad (1.3a)$$

根据此式,我們把均匀变形的基本特点說明如下:

(1) 如果 $Ax + By + Cz + D = 0$ 表示变形前的弹性体内的某一平面。为了求此平面在变形后的形状,只須将(1.3a)式代入,即

$$\begin{aligned} A(b_{10} + b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z') + B(b_{20} + b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z') + \\ + C(b_{30} + b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}z') + D = A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0. \end{aligned}$$

所以这平面經過变形后仍然是平面,只是傾斜情况及与原点 O 的垂直距离有所改变而已。

(2) 将上述結論推广可得到另一結論, 即原有的两个平行平面 P 和 Q 在变形后仍然是互相平行的. 因为, 如果变形前平面 P 的方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

平面 Q 的方程为

$$Ax + By + Cz + E = 0,$$

則产生变形后, 平面 P 变为 P' 的方程为

$$A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0,$$

平面 Q 变为 Q' 的方程为

$$A'x' + B'y' + C'z' + E' = 0,$$

这里只有常数項不同, 所以变形后 $P' \parallel Q'$.

(3) 由 (1) 还能导出这样的結論, 即弹性体内的直綫經变形后仍然是直綫, 仅方位有所改变而已. 因为直綫 L 是可以当作两个平面 P 和 Q 的公有部分(交綫)来看待的. 既然 P 經過变形后仍是一个平面 P' , 而 L 又是 P 中的一部分, 因此 L' 必定是 P' 内的一条平面曲綫. 同理, L' 也應該是 Q' 内的一条平面曲綫, 因此可以断定 L' 一定是 P' 和 Q' 的公有部分——它們的交綫(直綫).

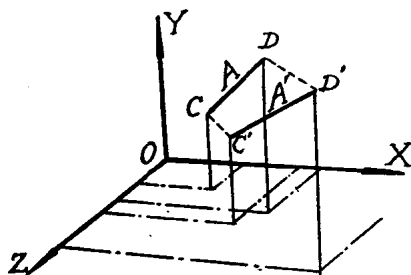


图 1-2

(4) 既然直綫經過均匀变形后仍为直綫, 因此就为以下关于綫段在均匀变形中的改变提供了前提. 如图 1-2 所示, 設 A 为綫段 CD 的原始长度; x_c, y_c, z_c 及 x_d, y_d, z_d 为 C, D 两点的坐标, A_x, A_y, A_z 代表綫段 A 的三个分量, 則經過变形后, 按照(1.3)式, 我們有

C' 点的坐标:

$$x'_c = a_{10} + (1 + a_{11})x_c + a_{12}y_c + a_{13}z_c,$$

$$y'_c = a_{20} + a_{21}x_c + (1 + a_{22})y_c + a_{23}z_c,$$

$$z'_c = a_{30} + a_{31}x_c + a_{32}y_c + (1 + a_{33})z_c;$$

D' 点的坐标:

$$x'_d = a_{10} + (1 + a_{11})x_d + a_{12}y_d + a_{13}z_d,$$

$$y'_d = a_{20} + a_{21}x_d + (1 + a_{22})y_d + a_{23}z_d,$$

$$z'_d = a_{30} + a_{31}x_d + a_{32}y_d + (1 + a_{33})z_d;$$

A' 的分量:

$$A'_x = x'_d - x'_c = (x_d - x_c) + a_{11}(x_d - x_c) + a_{12}(y_d - y_c) + a_{13}(z_d - z_c) =$$

$$= A_x + a_{11}A_x + a_{12}A_y + a_{13}A_z$$

或

同理,

$$\left. \begin{aligned} \delta A_x &= A'_x - A_x = a_{11}A_x + a_{12}A_y + a_{13}A_z, \\ \delta A_y &= A'_y - A_y = a_{21}A_x + a_{22}A_y + a_{23}A_z, \\ \delta A_z &= A'_z - A_z = a_{31}A_x + a_{32}A_y + a_{33}A_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

上式說明,当两平行且相等的綫段 A 及 B ($A_x = B_x, A_y = B_y, A_z = B_z$) 处于同一个均匀变形的区域(系数 a_{10}, \dots, a_{33} 均为常数)内时,则在变形后,两綫段仍維持原来的平行和相等,只是它們的长度和方位有些改变而已。

(5) 将上述結果推广,便能得到这样的結論,即均匀变形区域内的任何两个全同的几何形体,无论它們所处的位置如何,只要它們的方位和傾斜情况一致,則变形后必定仍能維持全同的形状和傾斜情况的一致。

总之,从綫段問題开始就已經証明,在均匀变形中,各分量的增減仅与原始的分量有关,而不受綫段所处地位的局限[(1.4)式]。所以上面各条結論可适用于变形区域内的任何部分。这就是我們称这种变形为均匀变形的理由。为了簡便起見,以后在討論綫段問題时,我們只談經過原点的綫段,因为它可以概括整个均匀变形区域内的全部情况。

§ 2. 微細的均匀变形

这里所謂的“微細”是指变形中各点的三个位移分量 U, V, W 而言的。也就是說,在均匀变形区内,各点在变形后的坐标 (x', y', z') 与其原始坐标 (x, y, z) 之間仅有很小的差別。在此前提下[參看(1.3)式],为了达到这种要求,就必須使 $a_{10}, a_{11}, \dots, a_{33}$ 所有系数的絕對值都远小于 1, 因此在后面的討論中,这些系数的二次項都可以忽略不計。

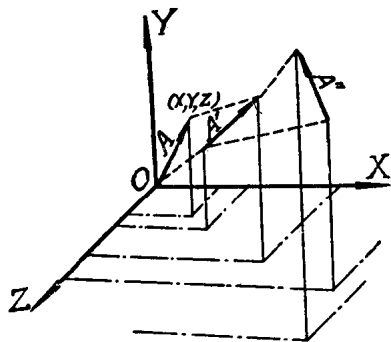


图 1-3

現在首先証明微細均匀变形的迭加性。假定 A 是由原点开始的一个綫段(图 1-3), 它的原始分量 $A_x = x, A_y = y, A_z = z$ 。如果 A 受到一种系数为 $a_{10}, a_{11}, \dots, a_{33}$ 的均匀变形被移到 A' 后, 則由(1.4)式, A' 的三个分量是

$$\begin{aligned} A'_x &= A_x + \delta A_x = x + [a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z], \\ A'_y &= A_y + \delta A_y = y + [a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z], \\ A'_z &= A_z + \delta A_z = z + [a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z]. \end{aligned}$$

当 A 被移到 A' 后,如果再接受另外一种系数为 $b_{10}, b_{11}, \dots, b_{33}$ 的均匀变形,使 A' 再移到 A'' 时,則对 A' 来講, A'' 分量的相对增量应该是

$$\begin{aligned} \delta A'_x &= b_{11}[x + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z] + b_{12}[y + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z] + \\ &\quad + b_{13}[z + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z], \\ \delta A'_y &= b_{21}[x + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z] + b_{22}[y + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z] + \\ &\quad + b_{23}[z + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z], \\ \delta A'_z &= b_{31}[x + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z] + b_{32}[y + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z] + \\ &\quad + b_{33}[z + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z]. \end{aligned}$$

由于前后两次变形都是微細的均匀变形,它們的系数的乘积可以忽略不計。因此上式可簡化为

$$\delta A'_x = b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z,$$

$$\delta A'_y = b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z,$$

$$\delta A'_z = b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z.$$

如此經過两次变形以后,綫段 A 的总增量中:

$$\Delta A_x = \delta A_x + \delta A'_x = (a_{11} + b_{11})x + (a_{12} + b_{12})y + (a_{13} + b_{13})z,$$

$$\Delta A_y = \delta A_y + \delta A'_y = (a_{21} + b_{21})x + (a_{22} + b_{22})y + (a_{23} + b_{23})z,$$

$$\Delta A_z = \delta A_z + \delta A'_z = (a_{31} + b_{31})x + (a_{32} + b_{32})y + (a_{33} + b_{33})z.$$

將上述結果与(1.4)式比較,可以得到这样的結論:

如果不計系数的乘积項,系数分别为 $a_{10}, a_{11}, \dots, a_{33}$ 和 $b_{10}, b_{11}, \dots, b_{33}$ 的两种微細均匀变形,無論它們的作用次序如何,对于弹性体内任一綫段 A 的最后效果,都只相当于系数为 $(a_{10} + b_{10}), (a_{11} + b_{11}), \dots, (a_{33} + b_{33})$ 的均匀变形的单独作用. 这就是我們所要証明的迭加性.

在 § 1 里,我們已經講过变形中包括弹性体的整体移动(平移和旋轉)及其本身的形状改变,所以有必要分清,在(1.4)式中,分量的增加在 $\delta A_x, \delta A_y, \delta A_z$ 内究竟有多少是整体移动,又有多少是由于本身形状的改变. 为此,我們首先必須分清由单独平移或单独旋轉所产生的結果.

(1) 很明显,由单独平移作用的結果,按定义是絕不能使綫段 A 的分量增加或减少的. 它只能使物体内的所有各点都产生共同的位移,这位移可以由原点的位移来代表,其分量就是(1.3)式中的各常数項 a_{10}, a_{20} 及 a_{30} .

(2) 其次,我們談单独的整体旋轉作用. 如图 1-4 所示,当綫段 A 繞 OL 軸轉过一个 θ 角后,其末端 a 必定在过 a 点垂直于 OL 的平面内,沿着以 c 点为圆心, ac 为半径的圓弧移至 a' . 假定 θ 的数值很小(微細的均匀变形),以至 $\overline{aa'}$ 可以由圓弧切綫 $\overline{aa'_1}$ 来代替时,則

$$\mathbf{A} + \overline{aa'_1} = \overline{Oa'_1}.$$

但由 Oa 到 Oa'_1 綫段各分量的增量就是 $\overline{aa'_1}$ (相当于 δA) 在各坐标軸上的分量. 为了便于計算,我們用矢量积的办法. 設 $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ 分別代表指向 OX, OY, OZ 各軸正方的单位矢; $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 代表轉角 θ 的三个分量,則

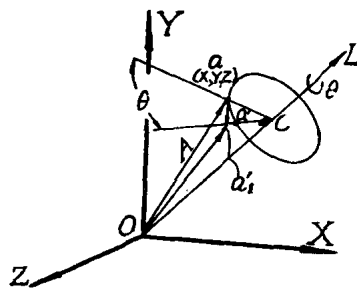


图 1-4

$$\overline{aa'_1} \doteq \overline{aa'_1} = \theta \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

但 $\overline{aa'_1} = \delta A_x \mathbf{I} + \delta A_y \mathbf{J} + \delta A_z \mathbf{K}$, 所以

$$\left. \begin{aligned} \delta A_x &= \begin{vmatrix} \theta_y & \theta_z \\ y & z \end{vmatrix} = -\theta_{zy} + \theta_{yz}, \\ \delta A_y &= \begin{vmatrix} \theta_x & \theta_z \\ z & x \end{vmatrix} = \theta_{zx} - \theta_{xz}, \\ \delta A_z &= \begin{vmatrix} \theta_x & \theta_y \\ x & y \end{vmatrix} = -\theta_{yx} + \theta_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

由以上結果可以看出,当轉角很小时,单独的旋轉作用正是均匀变形的一个个别情况。由于平移对(1.4)式不起作用,因此我們可把上面的結果說得广泛一些,即整体移动是微細均匀变形的一种。

(3) 根据微細均匀变形的迭加性及上述两种情况,我們可以从一般的微細均匀变形中,将弹性体本身改变(或称純变形)的部分区别出来。如由(1.4)式,

$$\begin{aligned}\delta A_x &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = \left[-\frac{a_{21} - a_{12}}{2}y + \frac{a_{13} - a_{31}}{2}z \right] + \\ &\quad + \left[a_{11}x + \frac{a_{12} + a_{21}}{2}y + \frac{a_{13} + a_{31}}{2}z \right], \\ \delta A_y &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = \left[\frac{a_{21} - a_{12}}{2}x - \frac{a_{32} - a_{23}}{2}z \right] + \\ &\quad + \left[\frac{a_{21} + a_{12}}{2}x + a_{22}y + \frac{a_{23} + a_{32}}{2}z \right], \\ \delta A_z &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = \left[-\frac{a_{13} - a_{31}}{2}x + \frac{a_{32} - a_{23}}{2}y \right] + \\ &\quad + \left[\frac{a_{13} + a_{31}}{2}x + \frac{a_{32} + a_{23}}{2}y + a_{33}z \right].\end{aligned}$$

設

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{a_{32} - a_{23}}{2}, & \omega_y &= \frac{a_{13} - a_{31}}{2}, & \omega_z &= \frac{a_{21} - a_{12}}{2}, \\ e_x &= a_{11}, & e_y &= a_{22}, & e_z &= a_{33}, \\ e_{xy} &= \frac{a_{12} + a_{21}}{2}, & e_{yx} &= \frac{a_{23} + a_{32}}{2}, & e_{zx} &= \frac{a_{31} + a_{13}}{2},\end{aligned}$$

則上式可写成

$$\left. \begin{aligned}\delta A_x &= (-\omega_z y + \omega_y z) + [e_x x + e_{xy} y + e_{zx} z], \\ \delta A_y &= (\omega_x x - \omega_x z) + [e_{xy} x + e_y y + e_{yz} z], \\ \delta A_z &= (-\omega_y x + \omega_x y) + [e_{zx} x + e_{yz} y + e_z z].\end{aligned}\right\} \quad (1.6)$$

將此式与(1.5)式比較,很明显 ω 相当于 θ 。所以此式的第一个括号为整体移动(旋轉)的結果,第二个括号表示純变形,这就是我們的結論。

§ 3. 綫应变和角应变

按上节所述,如果將物体預先固定,使它不能发生整体移动,則在发生变形后,体内各点的位移只能是純变形作用的結果。綫段 A 經過这样的变形以后仍是直綫;并且將(1.6)式中的第一个括号去掉就能得到它的三个分量:

$$\left. \begin{aligned}\delta A_x &= e_x x + e_{xy} y + e_{zx} z, \\ \delta A_y &= e_{xy} x + e_y y + e_{yz} z, \\ \delta A_z &= e_{zx} x + e_{yz} y + e_z z.\end{aligned}\right\} \quad (1.6a)$$

如图 1-5 所示,在变形前,如果先把 A 分成任意等份,并把它們当作一些平行且相等的独立的綫段来分別考虑,則經過純变形当 A 变成 A' 后,显然各綫段的长度仍須相等。換言之, A' 对 A 来講,無論伸长或縮短,在整个綫段內的任何部分都是均匀一致的。习惯上我們常以单位长度內的伸縮量來說明这种情况,并称此伸縮量为綫应变。綫应变的单位是毫米/毫米(或吋/吋等),实际上它只是一个比值而不受所取单位的影响。伸长时用正号表示,縮短时用負号表示。

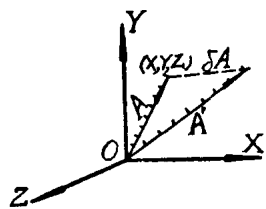


图 1-5

設 ΔA 为 A 变成 A' 时的总伸长量,則按以上定义,綫应变 ϵ 可写成

$$\epsilon = \frac{A' - A}{A} = \frac{\Delta A}{A}$$

但

$$A'^2 = (A + \Delta A)^2 = (x + \delta A_x)^2 + (y + \delta A_y)^2 + (z + \delta A_z)^2;$$

而

$$A^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

所以

$$2A(\Delta A) + (\Delta A)^2 = (2x\delta A_x + 2y\delta A_y + 2z\delta A_z) + (\delta A_x)^2 + (\delta A_y)^2 + (\delta A_z)^2.$$

对于微細的变形,前面已說过,微量的二次項可以忽略不計,因而上式可簡化为

$$A(\Delta A) = x\delta A_x + y\delta A_y + z\delta A_z.$$

将 (1.6a) 式代入,并考虑綫应变的定义,則

$$\epsilon = \frac{\Delta A}{A} = \frac{A(\Delta A)}{A^2} = \frac{1}{A^2} [e_x x^2 + e_y y^2 + e_z z^2 + 2e_{xy} xy + 2e_{yz} yz + 2e_{zx} zx]. \quad (1.7)$$

对于原与 OX 軸平行的綫段, $A = A_x = x, y = z = 0$, 所以

$$\epsilon = x^{-2}(e_x x^2) = e_x.$$

因此在純变形中,系数 e_x 就是弹性体内原与 OX 軸平行的綫段的单位增长量(綫应变)。同理, e_y 或 e_z 就是原与 OY 軸或 OZ 軸平行的綫段的綫应变。

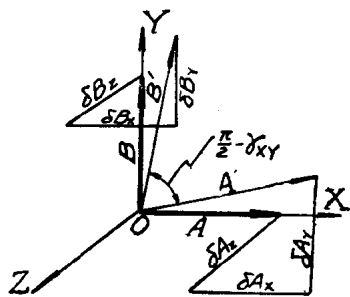


图 1-6

至于在 (1.7) 式中,其他三个系数 e_{xy}, e_{yz}, e_{zx} 的意义可用下面方式說明。例如为了解释 e_{xy} ,設 A 和 B 是原与 OX 和 OY 軸平行的两个綫段(图 1-6),其中 $A = A_x, A_y = A_z = 0; B = B_y, B_x = B_z = 0; A'$ 及 B' 是它們变形后的位置。如果用矢量表示,則

$$\mathbf{A}' = (A_x + \delta A_x)\mathbf{I} + (\delta A_y)\mathbf{J} + (\delta A_z)\mathbf{K},$$

$$\mathbf{B}' = (\delta B_x)\mathbf{I} + (B_y + \delta B_y)\mathbf{J} + (\delta B_z)\mathbf{K}.$$

設 γ_{xy} 为經過純变形后的 \mathbf{A}, \mathbf{B} 之間夾角的縮小量(直角間的縮小量),則矢量的数性

积为

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = A'B' \sin \gamma_{xy} = (A_x + \delta A_x)\delta B_x + \delta A_y(B_y + \delta B_y) + \delta A_z \delta B_z.$$

对于微細的变形,

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &\doteq \sin \gamma_{xy} \doteq \frac{A_x \delta B_x + B_y \delta A_y}{A'B'} = \\ &= \frac{A_x \delta B_x + B_y \delta A_y}{\sqrt{(A_x + \delta A_x)^2 + (\delta A_y)^2 + (\delta A_z)^2} \sqrt{(\delta B_x)^2 + (B_y + \delta B_y)^2 + (\delta B_z)^2}} \doteq \\ &\doteq \frac{A_x \delta B_x + B_y \delta A_y}{(A_x + \delta A_x)(B_y + \delta B_y)} \doteq \frac{A_x \delta B_x + B_y \delta A_y}{A_x B_y} = \frac{\delta B_x}{B_y} + \frac{\delta A_y}{A_x}. \end{aligned}$$

由(1.6a)式可知,

$$\delta A_y = e_{xy} A_x + e_y A_y + e_{yz} A_z,$$

而 $A_y = A_z = 0$, 故

$$(\delta A_y) A_x^{-1} = e_{xy};$$

同理,

$$\delta B_x = e_x B_x + e_{xy} B_y + e_{zx} B_z,$$

而 $B_x = B_z = 0$, 故

$$(\delta B_x) B_y^{-1} = e_{xy}.$$

将結果代回上式, 則

$$\gamma_{xy} = 2e_{xy},$$

同理,

$$\gamma_{yz} = 2e_{yz}, \quad \gamma_{zx} = 2e_{zx}.$$

我們称 $2e_{xy}$ (或 γ_{xy}) 为角应变(或剪应变). 它表示弹性体内原与 OX 和 OY 两轴平行且彼此相交的两个綫段經過变形后在直角内所减少的角度(弧度). $2e_{yz}$ 及 $2e_{zx}$ 也可类推.

在上述証明中, 我們曾略去了許多微量, 并且 $\delta A_x, \delta A_z, \delta B_y, \delta B_z$ 在这里根本也沒有起作用. 因此为了便于想象, 把图 1-6 簡化成图 1-7 的形式, 使以上結果在这里仍能講通.

由图 1-7 我們可以看到,

$$\angle a'oa \doteq \text{tg} \angle a'oa = \frac{\delta A_y}{A} = \frac{\delta A_y}{A_x} = e_{xy},$$

$$\angle b'ob \doteq \text{tg} \angle b'ob = \frac{\delta B_x}{B} = \frac{\delta B_x}{B_y} = e_{xy}.$$

这就說明, 在弹性体内, A 与其最后位置 A' 之間的夹角等于 B 与其最后位置 B' 之間

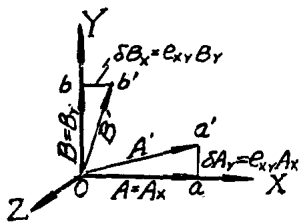


图 1-7

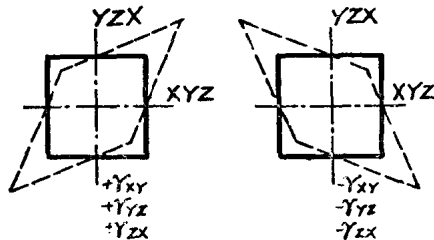


图 1-8

的夹角,并且与 A, B 的长度无关. 必须注意,这里我们采用的是右手坐标系,而上述结果是在 δA_y 及 δB_x 均为正值时导出的,因此角应变的正负号可以按图 1-8 决定.

综合上述,由原点开始的任意线段的线应变 ϵ 也可以该线段终点的坐标及六种应变来表示,即

$$\epsilon = \frac{1}{A^2} [e_x x^2 + e_y y^2 + e_z z^2 + \gamma_{xy} xy + \gamma_{yz} yz + \gamma_{zx} zx]. \quad (1.7a)$$

上式中坐标 x, y, z 和系数(应变) $e_x, e_y, \dots, \gamma_{zx}$ 都是与 $O-XYZ$ 坐标系相对应的,但线段 A 的线应变是在弹性体内部产生的,它不受选取坐标系的限制. 例如在图 1-9 中,我们同样地能用 A 之终点在坐标系 $O-X'Y'Z'$ 内的坐标 x', y', z' 和与 $O-X'Y'Z'$ 相对应的另一组系数(应变)来表示 ϵ . 为此,我们设 OX' 对 $O-XYZ$ 坐标系的方向余弦为 l_1, m_1, n_1 ; OY' 的方向余弦为 l_2, m_2, n_2 ; OZ' 的方向余弦为 l_3, m_3, n_3 , 则线段 A 终点的新旧坐标之间的关系如下:

$$\begin{aligned} x &= x'l_1 + y'l_2 + z'l_3, \\ y &= x'm_1 + y'm_2 + z'm_3, \\ z &= x'n_1 + y'n_2 + z'n_3. \end{aligned}$$

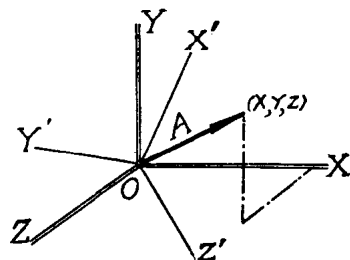


图 1-9

将此关系代入 (1.7a) 式, 则

$$\begin{aligned} \epsilon &= A^{-2} [e_x (x'l_1 + y'l_2 + z'l_3)^2 + e_y (x'm_1 + y'm_2 + z'm_3)^2 + \\ &\quad + e_z (x'n_1 + y'n_2 + z'n_3)^2 + \gamma_{xy} (x'l_1 + y'l_2 + z'l_3) \times \\ &\quad \times (x'm_1 + y'm_2 + z'm_3) + \dots], \end{aligned}$$

将此式展开, 并设常数

$$\left. \begin{aligned} e'_x &= e_x l_1^2 + e_y m_1^2 + e_z n_1^2 + \gamma_{xy} l_1 m_1 + \gamma_{yz} m_1 n_1 + \gamma_{zx} n_1 l_1, \\ e'_y &= e_x l_2^2 + e_y m_2^2 + e_z n_2^2 + \gamma_{xy} l_2 m_2 + \gamma_{yz} m_2 n_2 + \gamma_{zx} n_2 l_2, \\ e'_z &= e_x l_3^2 + e_y m_3^2 + e_z n_3^2 + \gamma_{xy} l_3 m_3 + \gamma_{yz} m_3 n_3 + \gamma_{zx} n_3 l_3, \\ \gamma'_{xy} &= 2e_x l_1 l_2 + 2e_y m_1 m_2 + 2e_z n_1 n_2 + \gamma_{xy} (l_1 m_2 + l_2 m_1) + \\ &\quad + \gamma_{yz} (n_1 n_2 + m_2 n_1) + \gamma_{zx} (n_1 l_2 + n_2 l_1), \\ \gamma'_{yz} &= 2e_x l_2 l_3 + 2e_y m_2 m_3 + 2e_z n_2 n_3 + \gamma_{xy} (l_2 m_3 + l_3 m_2) + \\ &\quad + \gamma_{yz} (m_2 n_3 + m_3 n_2) + \gamma_{zx} (n_2 l_3 + n_3 l_2), \\ \gamma'_{zx} &= 2e_x l_3 l_1 + 2e_y m_3 m_1 + 2e_z n_3 n_1 + \gamma_{xy} (l_3 m_1 + l_1 m_3) + \\ &\quad + \gamma_{yz} (m_3 n_1 + m_1 n_3) + \gamma_{zx} (n_3 l_1 + n_1 l_3), \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

则

$$\epsilon = A^{-2} [e'_x x'^2 + e'_y y'^2 + e'_z z'^2 + \gamma'_{xy} x'y' + \gamma'_{yz} y'z' + \gamma'_{zx} z'x'].$$

将此式与 (1.7a) 式比较, 可见 (1.8) 式中的六个常数正是对应于 $O-X'Y'Z'$ 的三个线应变和三个角应变. 这是今后转换坐标求取各种应变的主要公式.

§ 4. 主应变及主轴方向的求法

按上节所述, 线段 A 在已知应变条件 $e_x, e_y, e_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 的作用区内, 一般