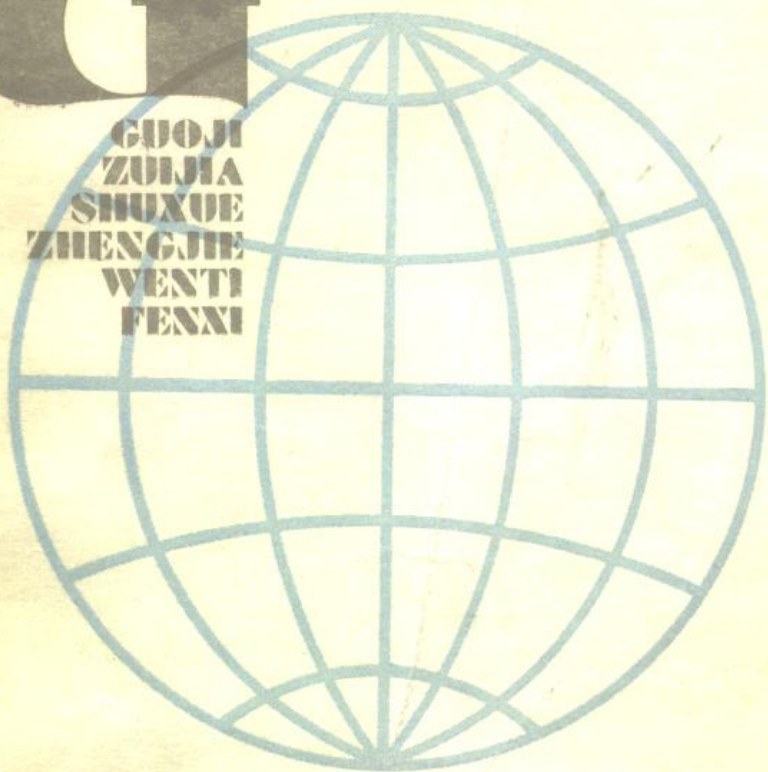




GUOJI
ZUIJIA
SHUXUE
ZHENGJIE
WENTI
FENXI



**国际最佳
数学征解问题分析**

湖南科学技术出版社

国际最佳数学征解 问题分析

译者：陈湘能 黄汉侠 钱祥征
郭 忠 许 康 罗金云
陈 强 何灿芝
审校者：彭肇藩

湖南科学技术出版社

国际最佳数学征解问题分析

陈湘能 黄汉侠 钱祥征 郭忠 编译
许康 罗金云 陈强 何灿芝

彭肇藩 审校

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版

(长沙市展览馆路14号)

湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1983年8月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：15.25 字数：348,000

印数：1—25,200

统一书号：13204·82 定价：2.00元

译者前言

对于数学中的各种问题，数学家哈尔莫斯 (P. R. Halmos, 现任《美国数学月刊》主编) 有这样的看法: “问题是数学的核心”, “任何人有意义的生活的主要部份是解决问题; 技术员、工程师、科学家等专业人员的生活中有相当一部份是解数学问题”, “我希望作为教师……越来越多地强调它们, 同时, 我们将把学生训练成比我们更好的问题提出者和问题解答者。”

本书的题目译自《四百个最佳问题》(The Four Hundred “Best” Problems), 是由《美国数学月刊》约请二十四位数学家, 从它的“问题征解栏”三十三年间(自第二十七卷至五十九卷)所载数千道耐人寻味的题目中, 仔细遴选投票评定。堪称“广征博采, 荟萃精华”。原文载该月刊第六十四卷第八一九月号增刊, 主编者为Howard Eves与E. P. Starke. 而解法则由译者从上述几百本月刊中查找译出。

美国数学协会主办的《美国数学月刊》, 其“问题征解栏”始于一八九四年, 早已声播遐迩。该栏问题的提出者及解答者来自各国(据一九五四年统计达九十八个国家和地区), 因而有较广泛的基础与影响。这些问题往往是数学工作者或爱好者在教学科研等工作中妙手偶得, 因此不落一般陈题的窠臼; 而不少解答也出自名家手笔, 因此构思奇巧不同凡响(如著名数学家和数学教育家G. Polya, P. Erdős等都是积极供稿者)。这些问题涉及代数、几何、分析三大类各分支的基础部份(详本书“分类索引”), 还有一些饶有趣味的应用题。琳琅满目风格

迥异的解题方法与技巧，从中闪现着电光火石般璀璨的数学思维奇葩，给人以耳目一新的启迪。同时，这些题目并非高不可攀，有些解法就是由青年学生提供的。随着近几十年数学的飞速发展与普及，当年的雄关如今已不复成为险隘，读者不妨一试。

本书可供数学系科和理工科学生，大、中学数学教师，数学工作者及爱好者参考。作为检验自己基础知识的深广程度、基本技能的熟练水平或用以磨砺数学思维的锋芒都是有益的。对于准备研究生考试、编写教材、组织课外活动、各种竞赛考试的命题也是有用的资料。内有部分题目是高中学生能够掌握的。

本书编排体例为：第一部份 征解问题；第二部份 分析讲解。原刊每题都有提出者及解答者的姓名身份国籍，为节省篇幅已一概略去，并删去二十一道题目。

翻译工作由陈湘能、黄汉侠、钱祥征、郭忠、许康、罗金云、陈强、柯灿芝分担。初稿由黄汉侠校阅。

全书承彭肇藩先生审校，部分问题还得到杨必中博士、周叔子同志的指教，在此谨向他们表示诚挚的谢意！

限于我们的学识水平，译文不当之处敬请读者指正。

译者 一九八二年十月

分 类 索 引

〔凡例：按代数、几何、分析三大类，每类又分若干条目，
例如

二项式系数 50(3399; 37, 6-7)

其中数字含义为：本书第50题，为原刊第3399题；题解载于该刊第37卷，第6-7月号。〕

代 数

初等代数 88 (3673; 42, 10) 53 (3418; 38, 1) 36 (3207;
34, 8-9) 97 (3703; 43, 5) 99 (E190; 43, 8-9) 290 (3731;
46, 1) 254 (E736; 54, 4) 67 (3528; 40, 3) 331 (4321;
57, 5)

高等代数 **二项式系数** 50 (3399; 37, 6-7) 51(3414; 37, 12)
79 (3625; 41, 8-9) 89 (3674; 42, 10) 236 (4152; 53, 6-7)
244 (E706; 53, 11) **连分数** 55 (3430; 38, 3) 321(4296; 57,
2) **有限级数** 66 (3536; 40, 3) 130 (3792; 45, 6-7) 198
(4050; 50, 12) 199 (4051; 50, 12) 223 (4118; 52, 8-9)
361 (4365; 58, 5) 117 (E230; 44, 4) 141 (E332; 46, 3)
240 (E670; 53, 1) 300 (E827; 56, 4) **多项式** 90 (3678; 42,
11) 183 (3980, 49, 5) **二次型** 107 (3705; 43, 4) **联立方程**
252 (4389; 58, 11) **其它** 37 (3242; 35, 1)
行列式 **计算** 4 (2774; 27, 5) 27 (3118; 32, 12) 61(3468;

38, 6-7) 69 (3552; 40, 4) 82 (3645; 42) 87 (3667; 42, 6-7) 92 (3687; 43, 1) 119 (3747; 43, 6-7) 128 (3783; 45, 4) 129 (3784; 45, 5) 165 (3919; 48, 4) 195 (4023; 50, 2) 220 (4101; 52, 3) 272 (4222; 55, 2) 278 (4235; 55, 4) 373 (4418; 59, 5) 241 (E680; 53, 4) 255 (E756; 54, 10) 304 (E834; 56, 6-7) 229 (E625; 52, 2) 10 (2908; 30, 1) 187 (4009; 49, 12) 38 (3249; 35, 2) 31 (2938; 33, 5) 64 (3514; 39, 10) 133 (E481; 49, 4)

方程论 三次 24 (3092; 32, 5) 140 (E323; 46, 3) **根与系数** 29 (3032; 33, 3) 48 (3034; 37, 6-7) 187 (4009; 49, 12) **联立方程** 63 (3506; 39, 8-9) **解法** 78 (3621; 41, 6-7) 161 (3907; 48, 1) **四次** 33 (3173; 34, 1)

抽象代数 群 320 (4295; 57, 2) 319 (4300; 57, 1) 332 (4317; 57, 5) **矩阵** 23 (2884; 32, 5) -98 (3700; 43, 6-7) 105 (3720; 43, 11) 143 (3824; 46, 5) 195 (5042; 50, 11) 224 (4124; 52, 10) 178 (E458; 48, 11) 245 (E710; 53, 11) 349 (E920; 58, 2) **杂题** 136 (3810; 46, 2) 250 (4174; 54, 2) 308 (4273; 56, 6-7) 346 (4345; 58, 1)

数论 **算术—几何** 126 (3776; 45, 3) 201 (E544; 50, 6-7) **同余** 58 (3445; 38, 4) 91 (3682; 42, 12) 116 (3707; 44, 6-7) 106 (3721; 43, 11) 125 (3771; 45, 2) 334 (4319; 57, 5) 336 (4322; 57, 5) 159 (E402; 47, 10) 173 (E435; 48, 4) 360 (E937; 58, 5) **数字问题** 208 (4054; 51, 1) 283 (4240; 55; 10) 377 (4385; 58, 10) 70 (E24; 40, 8-9) **刁藩图方程** 30 (2784; 33, 5) 40 (3231; 35, 4) 49 (3251; 37, 6-7) 60 (3459; 38, 6-7) 94 (3692; 43, 2) 207 (4047; 51, 2) 259 (4190; 54, 5) 322 (4299; 57, 3) 172 (E433; 48, 4) 286 (E806; 55, 11) **可除性** 71 (3582; 40, 11) 111 (3739; 44, 2) 150 (3885; 47, 8-9) 152 (3903; 47, 12) 232 (4137;

53, 1) 235 (4143, 53, 8-9) 271 (4220, 55, 1) 291 (4252,
 56, 1) 306 (4267, 56, 6-7) 323 (4302, 57, 3) 374 (4330,
 57, 8-9) 341 (4332, 57, 10) 370 (4387, 58, 11) 108 (4416,
 59, 4) 75 (E46, 41, 1) 80 (E83, 41, 10) 81 (E91, 41,
 11) 157 (E399, 47, 8-9) 202 (E546, 50, 8-9) 204 (E560,
 50, 11) 205 (E564, 50, 12) 230 (E628, 52, 2) 257 (E744,
 54, 5) 348 (E919, 58, 2) 欧拉 ϕ 函数 186 (4002, 49, 11)
 279 (4236, 55, 4) 328 (4311, 57, 4) 毕氏数与三角形
 76 (3594, 41, 1) 155 (E380, 47, 4) 288 (E812, 56, 1) 表
 示 226 (4133, 52, 12) 314 (4287, 56, 10) 100 (4413, 59,
 4) 其它 208 (4054, 51, 1) 191 (4012, 50, 1) 154 (E378,
 47, 3) 19 (3023, 31, 6) 43 (3305, 36, 2) 221 (4104, 52,
 3) 176 (E444, 48, 8-9) 175 (E438, 48, 6-7) 11 (2930, 30,
 2) 142 (3820, 46, 4) 231 (4399, 59, 1)
 概率 83 (3652, 42, 2) 219 (4093, 52, 1) 65 (3539, 40,
 1) 358 (E931, 58, 4) 149 (3872, 47, 3) 222 (4108, 52,
 5) 237 (4161, 53, 12) 267 (4202, 54, 10) 317 (4288, 57,
 1) 353 (4348, 58, 3) 73 (E36, 40, 12)
 某些特殊课题 算术还原 101 (E198, 43, 10) 262 (E751, 54,
 8-9) 枚举问题 28 (2688, 33, 2) 54 (3421, 38, 1) 151
 (38693, 47, 11) 169 (3954, 48, 10) 268 (4203, 54, 10) 375
 (4360, 58, 4) 260 (E750, 54, 6-7) 博奕 164 (3918, 48,
 3) 逻辑与理由 115 (3734, 44, 5) 113 (E231, 44, 4) 247
 (E712, 54, 1) 273 (E776, 55, 3) 幻方 282 (E791, 55,
 8-9) 289 (E813, 56, 1)

几 何

初等几何 平面几何 325 (E880, 57, 4) 256 (E740, 54, 5)

118 (3746; 44, 6-7) 284 (4254; 54, 8-9) 145 (E345; 46, 8-9) 215及251 (4086; 51, 10) 345 (4328; 58, 1) 57(3440; 38, 3) 132 (3780; 45, 11) 193 (4019; 50, 2) 209 (4065; 51, 3) 338 (4325; 57, 6-7) 356 (E929; 58, 4) **立体几何** 248 (3879; 54, 2) 362 (4366; 58, 5) 365 (E945; 58, 6-7) **欧氏作图** 52 (3417; 38, 1) 17 (2994; 31, 2) **只用直尺** 32 (3137; 33, 6-7) 285 (E793; 55, 11) **平面剖分** 12 (2933; 30, 3-4) 158 (E400; 47, 8-9) 188 (E468; 49, 2)

解析几何 **平面** 124 (E285; 45, 2) 303 (E832; 56, 6-7) 8 (2866; 29, 2) 9 (2892; 29, 9) 112 (3743; 44, 3) 135 (3805; 45, 12) 166 (3928; 48, 4) 193 (4019; 50, 2) 214 (4085; 51, 11) 35 (3179; 34, 4) 182 (3967; 49, 2) 275 (3990; 55, 3) 340 (E774; 57, 8-9) 190 (E419; 48, 1) **空间** 20 (3040; 31, 6) 42 (3296; 36, 1) 121 (E276; 45, 1) **高阶平面曲线** 160 (E413; 47, 12) 185 (3999; 49, 8-9) 263 (E753; 54, 8-9)

复数几何 85 (3658; 42, 4) 274 (3718; 43, 8-9) 276(4229; 55, 3) 281 (4239; 55, 6-7) 293 (4258; 56, 1)

n维几何 162 (3909; 48, 1) 256 (E740; 54, 5) **射影几何** 193 (4019; 50, 2) **微分几何** 218 (E610; 51, 11) 227 (E610; 52, 4)

拓扑 146 (3829; 46, 12) 359 (4361; 58, 4) 203 (E555; 50, 11) 246 (E711; 53, 12) 280 (E788; 55, 6-7)

分 析

三角学 18 (3011; 31, 5) 242 (E681; 53, 3) 378 (4136; 53, 2) 379 (4400; 59, 2) 357 (E930; 58, 4) 180 (3957; 49, 1) 258 (4185; 54, 5) 131 (E312; 45, 11) 114 (3740;

44, 4)

微分法 185 (3999; 49, 8-9) 294(E817; 56, 2) 310 (E846;
56, 8-9) 13 (2871; 30, 7-8) 14(2936; 30, 9-10) 174(E436;
48, 4) 243 (E687; 53, 6-7) 15 (2980; 30, 12)

积分法 239 (4172; 53, 12) 269 (4212; 54, 12) 324(4303;
57, 3) 72 (3586; 40, 11) 163 (3914; 48, 2) 84 (E124;
42, 4) 56 (3438; 38, 3) 120 (E275; 44, 12) 344 (4336;
57, 12)

高等微积分 **定积分** 2 (2758; 27, 11) 5 (2804; 28, 5)
123 (3766; 45, 1) 210 (4066; 51, 10) 249 (4173; 54, 2)
266 (4402; 59, 2) **欧拉常数** 197 (4045; 50, 11) 312 (4286;
56, 8-9) 295 (E819; 56, 2) **无穷序列** 34 (3177; 34, 3)
342 (4341; 57, 10) 367 (4363; 58, 8-9) **极限** 22 (3053; 31,
12) 77 (3612; 41, 5) 292 (4255; 56, 1) 364 (4372; 58, 5)
217 (E598; 51, 6-7) 313 (E853; 56, 10) 352 (E924; 58, 3)
杂题 270 (4216; 55, 1) 62 (3408; 39, 3) 21 (3043; 31, 9)
302 (4264; 56, 4) 363 (4371; 58, 5)

无穷级数 收敛与发散 1 (2752; 27, 11) 59 (3448; 38, 4)
234 (4142; 53, 5) 287 (4250; 55, 11) 309 (4278; 56, 6-7)
253 (4391; 58, 12) 183 (4415; 59, 6-7) 255 (E737; 54, 4)
299 (E824; 56, 4) **函数展开** 47 (3045; 37, 2) 211 (4067;
51, 6-7) **求和** 16 (2991; 31, 1) 26 (3051; 32, 8-9) 44
(3343; 36, 10) 46 (3348; 36, 11) 110 (3737; 44, 2) 134
(3801; 45, 11) 184 (3996; 49, 8-9) 206 (4046; 51, 2)
233 (4138; 53, 5) 318 (4293; 57, 1) 326 (4305; 57, 4)
333 (4318; 57, 5) 335 (4321; 57, 5) 347 (4346; 58, 1)
351 (4353; 58, 2) 368 (4382; 58, 8-9) 315 (E854; 56, 11)
杂题 213 (4072; 51, 8-9) 216 (4091; 51, 12) 297 (4259; 56,
3) 337(4314; 57, 6-7) 153(E364; 47, 1) 179(E460; 48, 12)

微分方程 127 (3778; 45, 4) 329 (4315; 57, 4) 133(3802;
45, 11) 144 (3826; 46, 6-7) 95 (3696; 43, 2) 194(4021;
50, 1) 277 (E785; 55, 4)

向量分析 238 (4171; 53, 12) 147 (3863; 47, 3)

力学 45 (3345; 36, 10) 6 (3838; 28, 10) 225 (4132; 52,
12) 296 (4249; 56, 2) 343 (4342; 57, 11) 376 (E943; 58,
6-7) 369 (4381; 58, 10)

不等式 192 (4014; 50, 1) 212 (4070; 51, 4) 25 (3104;
32, 6-7) 122 (3764; 45, 1) 138 (3815; 46, 2) 148(3868,
47, 4) 181 (3965; 49, 1) 261 (4198; 54, 6-7) 307(4270;
56, 6-7) 316 (4290; 56, 11)

差分 74 (3591; 40, 12) 228 (E624; 52, 2)

复变函数 311 (4283; 56, 8-9) 339 (4329; 57, 6-7) 350
(4337; 58, 2) 372 (4392; 58, 12) 137 (3814; 46, 2) 139
(3816; 46, 2) 200 (4051; 50, 12) 371 (4388; 58, 11) 41
(3276; 35, 11) 327 (4310; 57, 4) 190 (E491; 49, 6-7)

实变函数 86 (3666; 42, 6-7) 301 (4263; 56, 4) 298(4268;
56, 3) 355 (4351; 58, 3) 167 (3939; 48, 6-7) 104(3716;
43, 11) 366 (4375; 58, 6-7)

某些特殊课题 **函数方程** 3 (2759; 27, 11) 7 (2845; 29,1)
305 (3649; 56, 6-7) 93 (3690; 43, 1) **递推式** 96 (E182;
43, 5) **变分** 39 (3252; 35, 2) 354 (4349; 58, 3)

第一部分 问 题

- 1 检验级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性, 其中

$$a_n = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \right]^2.$$

- 2 如果 r 是正整数, 试证

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2r+1)\psi}{\sin\psi} d\psi = \frac{\pi}{2},$$

及
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2r\psi}{\sin\psi} d\psi = 2 \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{r-1}}{2r-1} \right\}.$$

- 3 解联立函数方程

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \frac{\phi(y) \cdot \psi(x)}{1 - \phi(x)\phi(y)},$$

$$\psi(x+y) = \frac{\psi(x)\psi(y)}{1 - \phi(x)\phi(y)}.$$

- 4 计算循环行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}, \text{ 和 } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{vmatrix}$$

的值, 其中后者的 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成一个算术级数。

- 5 证明: 当 $|x| < 1$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = x + \sum_1^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdots (4n-5)(4n-1)}{5 \cdot 9 \cdots (4n-3)(4n+1)} x^{4n+1},$$

$$\left(\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \right)^2 = x^2 + \sum_1^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdots (4n-5)(4n-1)}{5 \cdot 9 \cdots (4n-3)(4n+1)} \frac{x^{4n+2}}{2n+1}.$$

6 设一绳子挂在一个固定于建筑物楼顶的滑轮上,绳的一端悬一重物,它正好与紧抓在绳子另一端的猴子相平衡。假设这猴子开始向上爬,将有什么结果?

7 试证:若 y_x 是函数方程

$$y_x = \frac{y_{x+1}^2}{x} + y_{x+1}$$

关于 x 的正整值的解,且 $y_x > 0$,则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y_x \cdot \log x = 1.$$

8 边长为1, 3, 5, 7, ...的一些等边三角形,底边角顶靠角顶地依次放置在一直线上。试证:它们的顶点在一抛物线上,且各顶点到此抛物线的焦点之距离都是整数。

9 两个抛物线有平行的轴,试证:它们公共的弦平分公共的切线。

10 设 f 是 n 个变量的齐次多项式, H 是它的海赛(Hessian)行列式,试证: f^2 的海赛行列式是 CHf^n ,其中 C 是常数。

11 如果在化 q/p (p, q 是整数, $q > p$) 为小数时,余数总是 $p-q$,则这个分数给出一个循环小数,它的循环节中的位数,正好是已得商的位数的两倍,且其余各位数字可由一串9减去已求得的商得到,而不必再进行除法运算了。

12 只用直尺和圆规,分一个等边三角形为四个直边块,使它们可拼成一个正方形。

13 邮寄包裹时,只要它的长度与最大围长(依垂直于长

度的方向来量度)的和不超过72时时,则不管它的重量,均按小包邮件寄运。问寄小包的正方形窗口,至少应是多大,才可使一切合于上述规定的矩形小包裹箱能顺利通过。

14 一个人正从以不变角速度倾侧的一个圆锥形饮料杯中饮水。问在怎样的角度下供给量是最大的,在什么角度下水面是最小的?

15 确定一点,使它到 n 个已知点的距离之和为最小。

16 对无穷级数

$$S_2(x) = 1 + \frac{3x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} + \frac{6x^6}{6!} + \dots$$

求和,其中系数的分子构成一个数字级数,它的三阶差分等于2。

17 不用直尺,下面的作图能行吗?作一直线与四条给定的偏斜(两两不在一平面上的)直线相交。

18 某文中说:“容易证明,如果 $p > 0$ 是整数,关系式

$$a_1 \sin \frac{\pi}{2p} + a_2 \sin \frac{2\pi}{2p} + \dots + a_{p-1} \sin \frac{(p-1)\pi}{2p} + a_p = 0$$

中若一切 a 是整数,必需 $a_1 = a_2 = \dots = a_{p-1} = a_p = 0$ ”。试证之。

19 方程 $x^p + y^p + z^p = 0$ 有与奇素数 p 互素的整数 x, y, z 只要

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} N_2(p) - \frac{1}{3} N_3(p) + \frac{1}{4} N_4(p) - \dots + \frac{1}{p-1} N_{p-1}(p) \right] + 1$$

可被 p 整除,其中 $N_r(n)$ 为将 n 表示为 r 个使根 ≥ 0 的整数的平方和(次序是重要的)的表示法的个数。试证明之。

20 一个半径为 R 的球,由两相交的直线上滚下,两直线夹角为 2α 且等倾斜于水平面,试证球中心的轨迹是两半轴分别为

Resca, R 的椭圆。

21 设 T 表示 xy 平面的一个开连续统, 例如一个光滑的单闭曲线的内部。那么, 若 U 在 T 内连续, 且对一切具连续二阶导数而在 T 边界上变为零的函数 V , 使

$$(1) \quad \iint_T U \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) dx dy = 0,$$

则 U 是调和的, 即满足拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$. (若 U 在 T 的边界点的邻域内变为无穷大, 则应进一步限制 V 使积分有意义。)

22 令 $a_1 = a$, $a_2 = a^{a_1}$, $a_3 = a^{a_2}$, $\dots$, $a_{n+1} = a^{a_n}$, $\dots$, a_n 作为 a 的函数。讨论 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. (对某些 $a > 1$ 的值, 极限也存在。)

23 考虑数 a_{st} 的 $m \times n$ 矩阵 A 和数 b_{ts} 的 $m \times n$ 矩阵 B . 试证明 mn 个方程的方程组

$$\sum_{t,s} a_{st} b_{ts} a_{uv} = 0 \quad (sv)$$

蕴含方程

$$\sum_{t,s} a_{st} b_{ts} = 0.$$

下标 s, u 取值范围 $1, 2, \dots, n$, t, v 取值范围 $1, 2, \dots, m$.

24 把一个三次方程的根看作长度, 它们形成一个三角形。问这方程系数间的关系应当是怎样的?

25 如果 $f(x)$ 是区间 $a \leq x \leq b$ 上 x 的单值连续函数, 它不恒等于零, 且满足不等式 $0 \leq f(x) \leq M$, 试证明

$$0 \leq \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 - \left[\int_a^b f(x) \cos x dx \right]^2 - \left[\int_a^b f(x) \sin x dx \right]^2 \leq \frac{M^2(b-a)^4}{12}.$$

26 给定序列: $u_1 = 2, u_2 = 8, u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} (n=3, 4, 5, \dots)$. 试证

$$\frac{\pi}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccot} u_n^2.$$

27 如果 $n > 2$ 及 ε 是 $\varepsilon^n = 1$ 的 n 次根, 试证

$$\begin{vmatrix} \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \dots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} \\ = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^{\frac{n-2}{2}}.$$

28 用四个量 a_1, a_2, a_3, a_4 , 不改变它们的次序, 我们可以形成下列的繁分数:

$$\frac{\frac{a_1}{a_2}}{\frac{a_3}{a_4}}, \quad \frac{\frac{a_1}{a_2}}{\frac{a_3}{a_4}}, \quad \frac{\frac{a_1}{a_2}}{\frac{a_3}{a_4}}, \quad \frac{\frac{a_1}{a_2}}{\frac{a_3}{a_4}}, \quad \frac{\frac{a_1}{a_2}}{\frac{a_3}{a_4}}$$

但这些值并非都互异, 第一个和第四个是相等的. 试确定以这种方式能得到多少个不同的关于 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的有理函数, 哪些能以不止一种方式表为上述类型的繁分数, 哪些仅有一种方式表为上述类型的繁分数.

29 如果 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是任何实的或复的量, 它们满足方程

$$x^n - na_1x^{n-1} + {}_nC_2a_2^2x^{n-2} + \dots + (-1)^i {}_nC_ia_i^ix^{n-i} + \dots + (-1)^na_n^n = 0,$$

其中 ${}_nC_i = n!/(n-i)!i!$, 试证 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

30 试证:

$$y^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

的一切整数解为

$$x = -1, 0, 3; y = \pm 1, \pm 1, \pm 11.$$

31 如果 $a, b, \dots, i$ 都是实数 ≥ 0 , 且对 r 的五个不等于零

的实值, 使 $\begin{vmatrix} a^r & b^r & c^r \\ d^r & e^r & f^r \\ g^r & h^r & i^r \end{vmatrix}$ 等于零, 试证行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ 要么有两

行或两列成比例。要么有一行或一列是零。

32 试述不借助于帕斯卡的六边形定理, 而只用直尺怎样过圆周(或圆上一弧)上一已知点作圆的切线。

33 在水平地面上有两堵平行直立的墙, 一架长为 a 的梯子其脚抵住第一堵墙的墙脚, 上端靠在第二堵墙上; 另一长为 b 的梯子, 其脚抵住第二堵墙的墙脚, 上端靠在第一堵墙上。问两墙相距多少, 能使该两梯在高度 h 上交叉? 什么时候可能有解?

34 如果 X 是一正无理数, 而 Y 是它的倒数。证明在每一对相邻的正整数间, 序列

$$(1+X), 2(1+X), 3(1+X), \dots$$

$$(1+Y), 2(1+Y), 3(1+Y), \dots$$

包含一个且仅一个数。

35 下面的叙述正确吗?

设两曲线方程用极坐标 (ρ, θ) 表示, 其交点可由解关于 ρ, θ 的联立方程得到。

36 证明: 设以满足 $a^3 + b^3 + c^3 = 3m^3$ 的 a, b, c 为边作三角形, 其面积之最大值为 $\frac{m^2}{4}\sqrt{3}$ 。

37 有一堆椰子, 一个人把一个给猴子之后, 剩下的正好