# 离散数学

（第二版）

耿素云 屈婉玲 张立昂 编著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

离散数学（第二版） 耿素云 屈婉玲 张立昂 编著

# 离散数学

（第二版）

耿素云　屈婉玲　张立昂　编著



清华大学出版社

（京）新登字 158 号

## 内 容 简 介

本书包括以下 6 个方面的内容：（1）数理逻辑；（2）集合论；（3）代数结构；（4）图论；（5）组合分析初步；（6）形式语言与自动机初步。

书中概念论述清楚，讲解详实，通俗易懂，并且着重于概念的应用，而不重于定理的证明。每章后均附有习题。

本书可以作为计算机专业本科的教材，也可以作为计算机软件专业水平考试的参考书。同时还可以供从事计算机软件、硬件研究开发和应用人员使用。另有配套教材《离散数学题解》。



书 名：离散数学
作 者：耿素云 屈婉玲 张立昂
出版者：清华大学出版社（北京清华大学校内，邮编 100084）
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：北京市昌平环球印刷厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开 本：787×1092 1/16 印张：15.25 字数：362 千字
版 次：1999 年 9 月第 2 版 1999 年 9 月第 1 次印刷
书 号：ISBN 7-302-03722-1/TP・2077
印 数：0001～6000
定 价：16.80 元

# 第一版前言

本书是根据“计算机专业技术资格和水平考试大纲”的要求编写的，是“全国计算机软件专业技术资格和水平考试系列教材”之一，它是高级程序员级和系统分析员级的离散数学教材。离散数学是现代数学的重要分支，是计算机科学理论的基础。本书共含六个方面的内容：(1) 数理逻辑；(2) 集合论；(3) 代数结构；(4) 图论；(5) 组合分析初步；(6) 形式语言与自动机初步。

数理逻辑与图论（第一、二、七、八、九章）由耿素云编写；集合论、代数结构、组合分析初步（第三、四、五、六、十章）由屈婉玲编写；形式语言与自动机初步（第十一章）由张立昂编写。

根据资格和水平考试的特点，本书着重于基本概念的论述和应用，而不着重于定理的证明。每章均给出了典型的题例分析，并配置了相当数量的习题，书后给出了大部分习题的提示或解答。本书不仅是函授的教材，便于考生复习与自学，而且也可供计算机软件人员学习与参考。

由于作者水平所限，书中难免有不妥或错误之处，恳请读者指正。

编　者

1991 年 4 月于北京大学计算机系

# 第二版前言

计算机的出现和蓬勃发展彻底改变了人类的生活，它必将作为20世纪最灿烂辉煌的成就之一载入史册。从科学计算到大型的信息管理系统，从人工智能直至进入家庭，计算机已成为人们生活中密不可分的一个组成部分。当前，人类社会经过农业经济、工业经济，正在进入到知识经济的时代。经济的增长将更多地依赖于知识和信息的生产、扩散和应用，人类社会正在成为名符其实的信息化社会。这既为计算机科学技术的发展提供了前所未有的机遇和动力，也提出了更多的问题和更高的要求。解决这些问题的关键就是知识和技术的创新。因此，作为计算机科学技术的支撑学科之一的离散数学正变得日益重要。离散数学是现代数学的重要分支，是研究离散量的结构及相互关系的学科，它在计算机理论研究及软、硬件开发的各个领域都有着广泛的应用。作为一门重要的专业基础课，通过离散数学的教学，不仅能为学生的专业课学习及将来从事的软、硬件开发和应用研究打下坚实的基础，同时也有助于培养他们的抽象思维、严格的逻辑推理和创新能力。

《离散数学》一书自从1992年2月由清华大学出版社作为"全国计算机软件专业技术资格(水平)考试系列教材"出版以来，已历经7年。由于它取材适度、概念清楚、讲解详实、通俗易读、既适合教学也便于自学的特点，也由于它"着重于基本概念的论述和应用，而不重于定理证明"的风格而受到读者的欢迎和好评。这本书不仅被广大参加软件水平考试培训的人员使用，同时也被许多高校选作计算机或相关专业本科的教材。

作为第二版，本书保留了原书的体系、风格和6个部分的基本内容，即(1)数理逻辑；(2)集合论；(3)代数结构；(4)图论；(5)组合分析初步；(6)形式语言与自动机初步，同时为了适应专科教育的要求，与第1版相比，除了对原书中的错误和疏漏之处进行订正以外，还在以下几个方面进行了修订：

1. 对原书的习题进行了调整和充实。个别章节更新了某些习题，而对大部分章节补充了难度适当、风格多样、覆盖面较广的习题。

2. 删去了原书中关于习题的提示或解答的内容。为了更好地帮助初学者、特别是自学者掌握离散数学的主要概念及解题方法与技巧，与本书配套出版一本《离散数学题解》。在题解中按章给出内容提要、解题要求、习题和解答，并结合习题针对一些普遍性的分析方法、解题技巧、求解步骤和规范，以及应该避免的错误进行了详尽的论述。

在以上的修订工作中，数理逻辑与图论(第1,2,7,8,9章)由耿素云完成；集合论、代数结构与组合分析初步(第3,4,5,6,10章)由屈婉玲完成；形式语言与自动机初步(第11章)由张立昂完成。

本书既可以作为计算机专业本科教材，也可以作为计算机软件专业水平考试的参考教材，同时适合于从事计算机软、硬件开发和应用的科学技术人员使用。根据多年的教学

经验，作为本科教材，本书可在 120 学时内讲授完毕。

最后，我们诚恳欢迎广大读者对本书批评和指正。

作　者<br>1999 年 2 月

# 目　录

# 第1章　命题逻辑

数理逻辑是用数学方法来研究推理的形式结构和推理规律的数学学科. 它与数学的其他分支、计算机科学、人工智能、语言学等学科均有密切的联系，并且日益显示出它的重要作用和更加广泛的应用前景. 数理逻辑的内容相当丰富，大体可分为 5 部分，即：逻辑演算、证明论、公理集合论、递归论和模型论. 在本书中，只介绍命题逻辑和一阶逻辑（谓词逻辑）的逻辑演算. 对数理逻辑感兴趣的读者，可参阅有关专著.

## 1.1　命题符号化及联结词

数理逻辑研究的中心问题是推理，而推理的前提和结论都是表达判断的陈述句. 因而，表达判断的陈述句构成了推理的基本单位. 于是，称能判断真假的陈述句为**命题**. 这种陈述句的判断只有两种可能，一种是正确的判断，一种是错误的判断. 称判断为正确的命题的**真值**（或**值**）为真，称判断为错误的命题的真值为假，因而又可以称命题是具有唯一真值的陈述句.

**例 1.1**　判断下列句子中哪些是命题.

(1) 2 是素数.

(2) 雪是黑色的.

(3) $2+3=5$.

(4) 明年十月一日是晴天.

(5) 3 能被 2 整除.

(6) 这朵花多好看呀!

(7) 明天下午有会吗?

(8) 请关上门!

(9) $x+y>5$.

(10) 地球外的星球上也有人.

**解**　在 10 个句子中，(6)是感叹句，(7)是疑问句，(8)是祈使句，这 3 句话都不是陈述句，当然它们都不是命题. 其余的 7 个句子都是陈述句，但(9)不是命题，因为它没有确定的真值. 当 $x=6, y=7$ 时，$6+7>5$ 正确，而当 $x=1, y=2$ 时，$1+2>5$ 不正确. 其余的陈述句都是命题. 其中(1)，(3)是真命题；(2)，(5)为假命题；(4)的真值虽然现在还不知道，但到明年十月一日就知道了，因而是命题，它的真值是唯一的. 句子(10)的真值也是唯一的，只是我们还不知道而已，随着科学技术的发展，其真值会知道的，因而它也是命题.

从以上的分析可以看出，判断一个句子是否为命题，首先要看它是否为陈述句，然后再看它的真值是否是唯一的. 当然真值是否唯一与我们是否知道它的真值是两回事.

在例 1.1 中给出的 6 个命题都是简单的陈述句，都不能分解成更简单的句子了，称这

样的命题为**简单命题**或**原子命题**. 本书中用小写的英文字母 $p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots$ 表示简单命题,将表示命题的符号放在该命题的前面,称为命题符号化. 例如,

$p$: 2 是素数.

$q$: 雪是黑色的.

此时,$p$ 是真命题,$q$ 是假命题.

对于简单命题来说,它的真值是确定的,因而又称为**命题常项**或**命题常元**. 上面的 $p$、$q$ 都是命题常项.

在例 1.1 中,(9)不是命题,但当给定 $x$ 与 $y$ 确定的值后,它的真值也就定下来了. 这种真值可以变化的简单陈述句称为**命题变项**或**命题变元**,也用 $p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots$ 表示之. 一个符号,例如 $p$,它表示的是命题常项还是命题变项,一般由上下文来确定. 注意,命题变项不是命题.

在数理逻辑中,将命题的真值也符号化. 一般用 1(或 T)表示"真"(本书中将用 1 表示真);用 0(或 F)表示"假"(本书中用 0 表示假). 有时也用 1 表示真命题;用 0 表示假命题.

以上讨论的是简单命题. 在命题逻辑中,主要是研究由简单命题用联结词联结而成的命题,这样的命题称为**复合命题**. 下例给出的命题均是复合命题.

**例 1.2** 将下列命题符号化.

(1) 3 不是偶数.

(2) 2 是素数和偶数.

(3) 林芳学过英语或日语.

(4) 如果角 $A$ 和角 $B$ 是对顶角,则角 $A$ 等于角 $B$.

**解** 上面 4 个句子都是具有唯一真值的陈述句,因而它们都是命题,且都是由简单命题经过联结词的联结而形成的复合命题. (1)中命题也可说成"并非 3 是偶数",使用了联结词"并非". (2)中命题也可说成"2 是素数并且 2 是偶数",使用了联结词"并且". (3)中使用了联结词"或". (4)中使用了联结词"如果,则". 除了以上 4 个联结词外,常用的,特别是在数学中常用的联结词还有"当且仅当". 以上 5 种联结词也是自然语言中常用的联结词,不过在自然语言中有的联结词具有不精确性. 例如,联结词"或",有时表示相容性析取,有时表示排斥性的析取. 可是在数理逻辑中不允许这种二义性的存在,因而对联结词必须给出精确的定义. 另外,为了书写和推演的方便,必须将联结词符号化. 下面给出 5 种常用联结词的符号表示及相应复合命题的严格定义.

**定义 1.1** 设 $p$ 为任一命题. 复合命题"非 $p$"(或"$p$ 的否定")称为 $p$ 的**否定式**,记作 $\neg p$. $\neg$为**否定联结词**. $\neg p$ 为真当且仅当 $p$ 为假.

在例 1.2(1)中,设 $p$ 表示"3 是偶数",则$\neg p$ 表示"3 不是偶数". 显然,当 $p$ 的真值为 0 时,$\neg p$ 的真值为 1.

**定义 1.2** 设 $p,q$ 为两命题. 复合命题"$p$ 并且 $q$"(或"$p$ 和 $q$")称作 $p$ 与 $q$ 的**合取式**,记作 $p\wedge p$. $\wedge$ 为**合取联结词**. $p\wedge q$ 为真当且仅当 $p$ 与 $q$ 同时为真.

在例 1.2(2)中,用 $p$ 表示"2 是素数",$q$ 表示"2 是偶数",则 $p\wedge q$ 表示"2 是素数和偶数",由于 $p,q$ 的真值均为 1,所以 $p\wedge q$ 的真值也为 1.

$p$ 与 $q$ 的合取表达的逻辑关系是 $p$ 与 $q$ 两个命题同时成立,因而,自然语言中常用的联结词"既……又……","不仅……而且……","虽然……但是……"等,都可以符号化为 $\wedge$,请看下例.

**例 1.3** 将下列命题符号化.

(1) 李平既聪明又用功.

(2) 李平虽然聪明,但不用功.

(3) 李平不但聪明,而且用功.

(4) 李平不是不聪明,而是不用功.

**解** 用 $p$ 表示"李平聪明",$q$ 表示"李平用功",则(1)、(2)、(3)、(4)分别符号化为 $p\wedge q$,$p\wedge\neg q$,$p\wedge q$ 和 $\neg(\neg p)\wedge\neg q$. 可见以上 4 个复合命题全用联结词 $\wedge$ 联结. 但不能见到"和"、"与"就用"$\wedge$". 例如,"李文与李武是兄弟","王芳和陈兰是好朋友". 这两个命题中分别有"和"及"与"字,可是它们都是简单命题而不是复合命题,因而,分别符号化为 $p$,$q$ 即可.

**定义 1.3** 设 $p$,$q$ 为两命题. 复合命题"$p$ 或 $q$"称作 $p$ 与 $q$ 的**析取式**,记作 $p\vee q$. $\vee$ 为**析取联结词**. $p\vee q$ 为真当且仅当 $p$ 与 $q$ 中至少一个为真.

由定义不难看出,析取式 $p\vee q$ 表示的是一种相容性或,即允许 $p$ 与 $q$ 同时为真. 例如,"王燕学过英语或法语",可符号化为 $p\vee q$,其中 $p$ 为"王燕学过英语",$q$ 为"王燕学过法语",当仅 $p$ 为真,仅 $q$ 为真,$p$ 与 $q$ 同时为真时,$p\vee q$ 均为真.

可是在自然语言中的"或"具有二义性,有时表示的是相容性或,有时表示的是不相容性或(即排斥或). 例如,"派小王或小李中的一人去开会"不能符号化为 $p\vee q$ 的形式. 因为这里的"或"表达的是排斥或. 但可以借助于联结词 $\neg$,$\wedge$,$\vee$ 共同来表达这种排斥或. 即符号化为 $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$ 的形式,或 $(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$ 的形式,在 1.4 节中,将给出排斥或严格的定义.

**定义 1.4** 设 $p$,$q$ 为两命题. 复合命题"如果 $p$,则 $q$"称作 $p$ 与 $q$ 的**蕴涵式**,记作 $p\rightarrow q$,称 $p$ 为蕴涵式的**前件**,$q$ 为蕴涵式的**后件**. $\rightarrow$ 称作**蕴涵联结词**. $p\rightarrow q$ 为假当且仅当 $p$ 为真且 $q$ 为假.

$p\rightarrow q$ 表示的基本逻辑关系是,$q$ 是 $p$ 的必要条件,或 $p$ 是 $q$ 的充分条件. 因此,复合命题"只要 $p$ 就 $q$","$p$ 仅当 $q$","只有 $q$ 才 $p$"等,都可以符号化为 $p\rightarrow q$ 的形式.

在使用蕴涵联结词时,除了注意其表示的基本逻辑关系外,还应注意两点:其一,在自然语言中,"如果 $p$,则 $q$"中的 $p$ 与 $q$ 往往有某种内在的联系,但在数理逻辑中"$p\rightarrow q$"中的 $p$ 与 $q$ 不一定有什么内在联系. 其二,在数学中,"如果 $p$,则 $q$"往往表示前件 $p$ 为真,后件 $q$ 为真的推理关系,但在数理逻辑中,当前件 $p$ 为假时,$p\rightarrow q$ 为真.

为了掌握蕴涵联结词的逻辑关系及应用中应注意的事项,请看下例.

**例 1.4** 将下列命题符号化.

(1) 只要不下雨,我就骑自行车上班.

(2) 只有不下雨,我才骑自行车上班.

(3) 若 $2+2=4$,则太阳从东方升起.

(4) 若 $2+2\neq4$,则太阳从东方升起.

(5) 若 $2+2=4$,则太阳从西方升起.

(6) 若 $2+2\neq 4$,则太阳从西方升起.

**解** 先分析(1),(2). 令 $p$: 天下雨;$q$: 我骑自行车上班.

(1)中,$\neg p$ 是 $q$ 的充分条件,因而符号化为 $\neg p\rightarrow q$. 在(2)中,$\neg p$ 是 $q$ 的必要条件,因而应符号化为 $q\rightarrow\neg p$. 在使用蕴涵联结词时,一定要认真分析蕴涵式的前件与后件,然后组成蕴涵式. 另外还应注意同一命题的各种等价说法. 例如,"除非下雨,否则我就骑自行车上班"与(1)是等价的."如果下雨,我就不骑自行车上班"与(2)是等价的.

再分析(3)~(6). 设 $p$: $2+2=4$. $q$: 太阳从东方升起. $r$: 太阳从西方升起. 则(3),(4),(5),(6)分别符号化为 $p\rightarrow q$, $\neg p\rightarrow q$, $p\rightarrow r$, $\neg p\rightarrow r$. 在这些蕴涵式中,前件与后件之间无内在联系. 由于 $p,q,r$ 的真值均知道,由定义可知,上面 4 个蕴涵式的真值分别为 1,1,0,1.

**定义 1.5** 设 $p,q$ 为两命题. 复合命题"$p$ 当且仅当 $q$"称作 $p$ 与 $q$ 的**等价式**,记作 $p\leftrightarrow q$. $\leftrightarrow$ 称作**等价联结词**. $p\leftrightarrow q$ 真当且仅当 $p,q$ 真值相同.

等价式 $p\leftrightarrow q$ 所表达的逻辑关系是,$p$ 与 $q$ 互为充分必要条件. 只要 $p$ 与 $q$ 的真值同为真或同为假,$p\leftrightarrow q$ 的真值就为真,否则 $p\leftrightarrow q$ 的真值为假,请看下例.

**例 1.5** 分析下列各命题的真值.

(1) $2+2=4$ 当且仅当 3 是奇数.

(2) $2+2=4$ 当且仅当 3 不是奇数.

(3) $2+2\neq 4$ 当且仅当 3 是奇数.

(4) $2+2\neq 4$ 当且仅当 3 不是奇数.

(5) 两圆的面积相等当且仅当它们的半径相等.

(6) 两角相等当且仅当它们是对顶角.

**解** 设 $p$: $2+2=4$,$q$: 3 是奇数,则 $p,q$ 都是真命题. (1),(2),(3),(4)分别符号化为 $p\leftrightarrow q$, $p\leftrightarrow\neg q$, $\neg p\leftrightarrow q$, $\neg p\leftrightarrow\neg q$. 由定义可知,$p\leftrightarrow q$ 和 $\neg p\leftrightarrow\neg q$ 的真值为 1,而 $p\leftrightarrow\neg q$ 和 $\neg p\leftrightarrow q$ 的真值为 0.

在(5)中,由于两圆的面积相等与它们的半径相等同为真或同为假,所以该命题为真.

在(6)中,由于相等的两角不一定是对顶角,所以该命题为假. 其实,(5),(6)中的命题要在一阶逻辑(谓词逻辑)中才能刻画得更精确.

以上介绍的 5 种常用联结词也称**真值联结词**或**逻辑联结词**. 在命题逻辑中,可用这些联结词将各种各样的复合命题符号化. 基本步骤如下:

(1) 分析出各简单命题,将它们符号化;

(2) 使用合适的联结词,把简单命题逐个联结起来,组成复合命题的符号化表示.

**例 1.6** 将下列命题符号化.

(1) 小王是游泳冠军或百米赛跑冠军.

(2) 小王现在在宿舍或在图书馆里.

(3) 选小王或小李中的一人当班长.

(4) 如果我上街,我就去书店看看,除非我很累.

(5) 王一乐是计算机系的学生,他生于 1968 年或 1969 年,他是三好学生.

**解** 各命题符号化如下：

(1) $p \vee q$，其中，$p$：小王是游泳冠军. $q$：小王是百米赛跑冠军.

(2) 这里的"或"是排斥或，但因小王在宿舍与在图书馆不能同时发生，因而也可符号化为 $p \vee q$. 其中，$p$：小王在宿舍. $q$：小王在图书馆.

(3) 这里的"或"也为排斥或. 设 $p$：选小王当班长. $q$：选小李当班长. 因为 $p$ 与 $q$ 可同时为真，所以应符号化为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$；而不应符号化为 $p \vee q$.

在使用析取联结词时，首先应分析表达的是相容或还是排斥或. 若是相容或，以及 $p$，$q$ 不能同时为真的排斥或，均可直接符号化为 $p \vee q$ 的形式. 如果是排斥或，并且 $p$ 与 $q$ 可同时为真，就应符号化为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 的形式. 有的书上，在基本联结词集中就给出了排斥或联结词. 考虑到简洁性，本书在基本联结词集中没给出排斥或联结词. 在 1.4 节中给出了它的定义.

(4) $\neg r \rightarrow (p \rightarrow q)$. 其中，$p$：我上街. $q$：我去书店看看. $r$：我很累.

此句中的联结词"除非"相当于"如果不……"的意思，因而 $\neg r$ 可看成 $p \rightarrow q$ 的前件. 其实，此命题也可以叙述为"如果我不累并且我上街，则我就去书店看看"，因而也可以符号化为 $(\neg r \wedge p) \rightarrow q$.

(5) $p \wedge (q \vee r) \wedge s$. 其中，$p$：王一乐是计算机系学生. $q$：他生于 1968 年. $r$：他生于 1969 年. $s$：他是三好学生.

5 种联结词符也称为逻辑运算符. 它们与普通数的运算符一样，可以规定运算的优先级，本书中规定优先级的顺序为 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$. 如果出现的联结词相同，又无括号时，则按从左到右顺序运算. 若遇有括号时，先进行括号中的运算.

## 1.2 命题公式及分类

在上节中，介绍了 5 种常用的联结词及由它们组成的基本复合命题：$\neg p$，$p \wedge q$，$p \vee q$，$p \rightarrow q$，$p \leftrightarrow q$，其中 $p$，$q$ 为简单命题，即命题常项. 当然由这 5 种联结词和多个命题常项可以组成更复杂的复合命题. 若在复合命题中，$p$，$q$，$r$ 等不仅可以代表命题常项，还可以代表命题变项，这样组成的复合命题形式称为**命题公式**. 抽象地说，命题公式是由命题常项、命题变项、联结词、括号等组成的符号串. 但并不是由这些符号任意组成的符号串都是命题公式，因而，必须给出命题公式的严格定义. 首先给出由命题常项、变项、联结词、圆括号等组成的合式公式的定义，然后规定一个符号串是命题公式当且仅当它是合式公式.

**定义 1.6** (1)单个命题常项或变项 $p, q, r, \cdots, p_i, q_i, r_i, \cdots, 0, 1$ 是合式公式；

(2) 如果 $A$ 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式；

(3) 如果 $A$，$B$ 是合式公式，则 $(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式；

(4) 只有有限次地应用(1)～(3)组成的符号串才是**合式公式**.

今后我们将合式公式称为**命题公式**，或简称为**公式**.

为方便起见，规定 $(\neg A)$，$(A \wedge B)$ 等的外层括号可以省去. 在公式的定义中，引进了 $A$，$B$ 等符号，它们代表任意的命题公式，在以下的定义中均有类似的情况.

根据定义，$\neg(p \vee q)$，$p \rightarrow (q \rightarrow r)$，$(p \wedge q) \leftrightarrow r$ 等都是命题公式，但 $pq \rightarrow r$，$\neg p \vee q) \rightarrow r$

等都不是命题公式.

由定义可看出，命题公式的结构很复杂，为此需要给出命题公式层次的定义，以便于研究和演算.

**定义 1.7** (1) 若 $A$ 是单个命题(常项或变项)，$p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots,0,1$，则称 $A$ 是 0 层公式.

(2) 称 $A$ 是 $n+1(n\geqslant 0)$ 层公式是指 $A$ 符合下列情况之一：

① $A=\neg B$，$B$ 是 $n$ 层公式；

② $A=B\wedge C$，其中 $B$，$C$ 分别为 $i$ 层和 $j$ 层公式，且 $n=\max(i,j)$；

③ $A=B\vee C$，其中 $B$，$C$ 的层次同②；

④ $A=B\rightarrow C$，其中 $B$，$C$ 的层次同②；

⑤ $A=B\leftrightarrow C$，其中 $B$，$C$ 的层次同②.

(3) 若 $A$ 的最高层次为 $k$，则称 $A$ 是 $k$ 层公式.

定义中的符号"＝"为通常意义下的等号，以下再出现时意义相同.

由定义可看出，$\neg p\vee q$，$p\wedge q\wedge r$，$\neg(\neg p\wedge q)\rightarrow(r\vee s)$ 分别为 2 层、2 层、4 层命题公式.

一个含有命题变项的命题公式的真值是不确定的，只有对它的每个命题变项用指定的命题常项代替后，命题公式才变成命题，其真值也就唯一确定了. 例如，命题公式 $(p\wedge q)\rightarrow r$ 中，若指定 $p$ 为"2 是素数"，$q$ 为"3 是奇数"，$r$ 为"4 能被 2 整除"，则 $(p\wedge q)\rightarrow r$ 变成真命题. 若 $p$，$q$ 的指定同前，而 $r$ 为"3 能被 2 整除"，则 $(p\wedge q)\rightarrow r$ 就变成假命题了.

一般地，对一个命题公式的**解释**或**赋值**定义如下.

**定义 1.8** 设 $A$ 为一命题公式，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为出现在 $A$ 中的所有的命题变项. 给 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 指定一组真值，称为对 $A$ 的一个赋值或解释. 若指定的一组值使 $A$ 的值为真，则称这组值为 $A$ 的**成真赋值**，若使 $A$ 的值为假，则称这组值为 $A$ 的**成假赋值**.

若命题公式 $A$ 中含命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，给定一组赋值 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$($\alpha_i$ 为 0 或 1)，是指 $p_1=\alpha_1,p_2=\alpha_2,\cdots,p_n=\alpha_n$. 若命题变项为 $p,q,r,\cdots$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 指定给它们的顺序应按字典顺序. 例如，公式 $A=(p\wedge q)\rightarrow r$，110($p=1,q=1,r=0$) 为 $A$ 的成假赋值，111，011，010 等是 $A$ 的成真赋值.

含 $n(n\geqslant 1)$ 个命题变项的命题公式，共有 $2^n$ 组赋值. 将命题公式 $A$ 在所有赋值之下取值的情况列成表，称为 $A$ 的**真值表**. 构造真值表的具体步骤如下：

(1) 找出命题公式中所含的所有命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$(若无下角标就按字典顺序给出)，列出所有可能的赋值($2^n$ 个)；

(2) 按从低到高的顺序写出各层次；

(3) 对应每个赋值，计算命题公式各层次的值，直到最后计算出命题公式的值.

**例 1.7** 求下列命题公式的真值表.

(1) $p\wedge(q\vee\neg r)$；

(2) $(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$；

(3) $\neg(p\rightarrow q)\wedge q$.

**解**

表 1.1

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg r$ | $q \vee \neg r$ | $p \wedge (q \vee \neg r)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

表 1.2

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $p \wedge (p \to q)$ | $(p \wedge (p \to q)) \to q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

表 1.3

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $\neg(p \to q)$ | $\neg(p \to q) \wedge q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

表 1.1,表 1.2,表 1.3 分别为(1),(2),(3)的真值表. 由表 1.1 可知,100,110,111 是(1)的成真赋值,其余的都是成假赋值. 由表 1.2 可知,(2)无成假赋值. 由表 1.3 可知,(3)无成真赋值. 根据在各种赋值下的取值情况,可将命题公式分为 3 类,定义如下.

**定义 1.9** 设 $A$ 为一个命题公式.

(1) 若 $A$ 在它的各种赋值下取值均为真,则称 $A$ 为**重言式**或**永真式**;

(2) 若 $A$ 在它的各种赋值下取值均为假,则称 $A$ 为**矛盾式**或**永假式**;

(3) 若 $A$ 至少存在一组赋值是成真赋值,则 $A$ 是**可满足式**.

由定义可知,重言式一定是可满足式,但反之不真.

给定一个命题公式,判断其类型的一种方法是利用命题公式的真值表. 若真值表最后

一列全为 1，则对应的命题公式为重言式；若最后一列全为 0，则对应的命题公式为矛盾式；若最后一列既有 0 又有 1，则对应的命题公式为非重言式的可满足式. 在例 1.7 中，由真值表可知，(1)为可满足式；(2)为重言式；(3)为矛盾式. 下两节中，还将给出判断命题公式类型的其他方法.

## 1.3 等值演算

给定 $n(n\geqslant 1)$ 个命题变项，按合式公式的形成规则可以形成无数多个命题公式，但这些无穷尽的命题公式中，有些具有相同的真值表. 例如，$n=2$ 时，$p\rightarrow q$，$\neg p\vee q$，$\neg(p\wedge\neg q)$，…，表面看来是不同的命题形式，但它们在 4 个赋值 00，01，10，11 下均有相同的真值，也就是它们的真值表最后一列是相同的. 事实上，$n$ 个命题变项只能生成 $2^{2^n}$ 个真值不同的命题公式. 在 $n=2$ 时，只能生成 $2^{2^2}=16$ 个真值不同的命题公式. 这就存在着如何判断哪些命题公式具有相同真值的问题. 设 $A,B$ 是均含 $n$ 个命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的命题公式，由定义可知，若 $A,B$ 具有相同的真值，则 $A\leftrightarrow B$ 总取值为 1，即 $A\leftrightarrow B$ 是重言式. 下面给出 $A$ 与 $B$ 真值相同的严格定义.

**定义 1.10** 设 $A,B$ 为两命题公式，若等价式 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，则称 $A$ 与 $B$ 是**等值的**，记作 $A\Leftrightarrow B$.

注意，定义中引进的符号"$\Leftrightarrow$"不是联结词符，它只是当 $A$ 与 $B$ 等值时的一种简便记法. 千万不能将$\Leftrightarrow$与$\leftrightarrow$或$\Leftrightarrow$与$=$混为一谈.

另外，不难看出命题公式之间的等值关系是自反的、对称的和传递的，因而是等价关系.

根据定义判断两命题公式是否等值可用真值表法，但可将真值表简化. 设 $A,B$ 为两命题公式，由定义判断 $A$ 与 $B$ 是否等值应判断 $A\leftrightarrow B$ 是否为重言式，若 $A\leftrightarrow B$ 的真值表最后一列全为 1，则 $A\leftrightarrow B$ 为重言式，因而 $A\Leftrightarrow B$. 但最后一列全为 1 当且仅当在各赋值之下，$A$ 与 $B$ 的真值相同，因而判断 $A$ 与 $B$ 是否等值等价于判断 $A,B$ 的真值表是否相同.

**例 1.8** 判断下列命题公式是否等值.

(1) $\neg(p\vee q)$与$\neg p\vee\neg q$；

(2) $\neg(p\vee q)$与$\neg p\wedge\neg q$.

**解** (1)

**表 1.4**

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p\vee q$ | $\neg(p\vee q)$ | $\neg p\vee\neg q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

由表 1.4 可知，$\neg(p\vee q)$与$\neg p\vee\neg q$ 不等值.