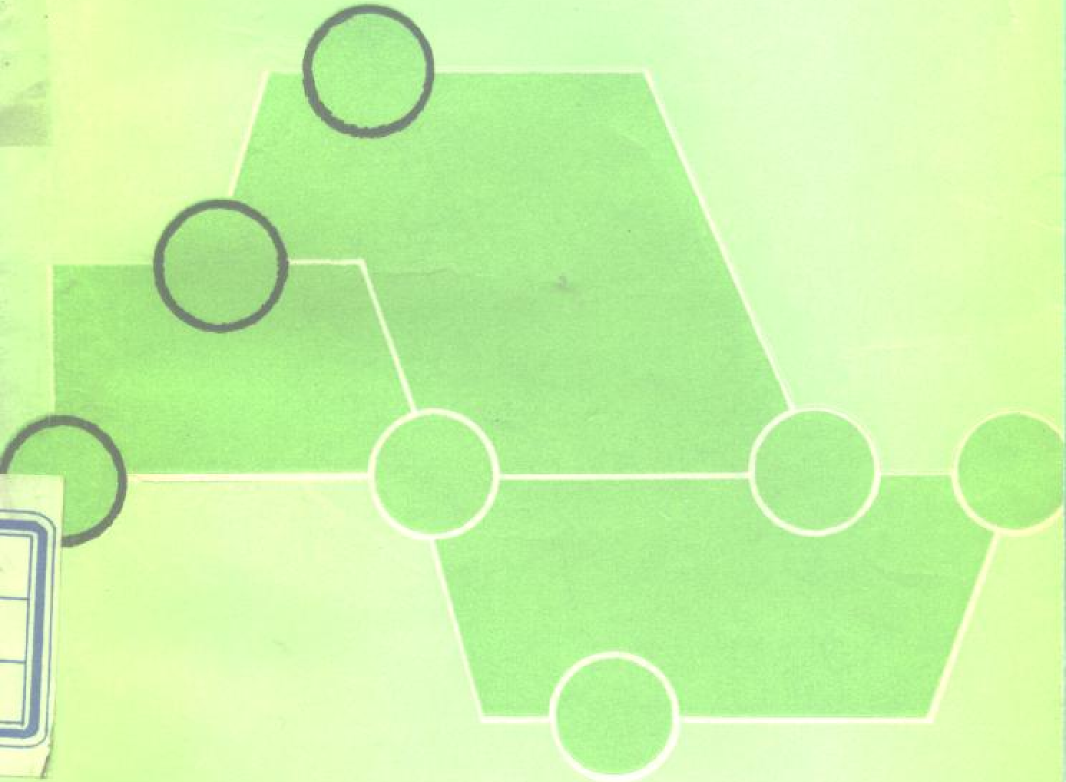
管理运筹学基础

谭家华 编



上海交通大学出版社

管理运筹学基础

谭家华编

上海交通大学出版社

内 容 摘 要

本书扼要地叙述了管理运筹学的基本内容，能使读者掌握企业管理中应用的一些数学方法。全书共分十章、分别叙述了线性规划、动态规划、网络计划法、排队论、库存管理、对策论、模拟等九种运筹学模型的基本概念和基本思想，并介绍了一些容易掌握的求解模型方法，每章都有较多的算例和实例，还附有习题。

本书通俗易读，可作为大专院校非管理专业的教材，也可供希望了解运筹学基本内容的工程技术人员和管理人员参考。

管 理 运 筹 学 基 础

出　版：上海交通大学出版社
　　　　（淮海中路1984弄19号）
发　行：新华书店上海发行所
印　刷：上海交通大学印刷厂
开　本：787×1092（毫米）1/32
印　张：8
字　数：179000
版　次：1991年2月　　第一版
印　次：1991年3月　　第一次
印　数：1—3800
科　目：241—261
ISBN7—313—00817—1/C·93
定 价：2.05元

前　言

运筹学是管理专业的基础课程。但它的基本原理却和计算机技术一样，可广泛地用于解决工程技术问题。因此，非管理专业的本科生和很多工程技术人员对运筹学产生了极大的兴趣。

近几年来，为了拓宽非管理专业本科生的知识面，让学生了解在企业管理中应用的一些数学方法，开设了《管理运筹学基础》这门课程。本书就是根据讲授这门课的讲义编写而成的。

本书编写中，力求通俗，省略了较深的数学证明；并努力适应非管理专业学生的知识结构。因此，对于希望了解管理运筹学基本思想的工程技术人员不失其参考价值。

本书讲述了线性规划、动态规划、网络计划法、排队论、库存管理、对策论、模拟等9种运筹学模型的基本概念和基本思想，并扼要地介绍了一些容易掌握的求解模型方法。教学时数约为30～40学时。

本书在编写过程中，参考了兄弟院校的教材及许多专著，谨向有关作者表示衷心感谢。

本书承蒙上海交通大学秦士元教授审阅，并提出了宝贵的修改意见，在此表示诚挚的谢意。

编者

一九九〇年九月

目　录

第一章　数学模型

§1.1　运筹学与数学模型

如果概括成一句话，运筹学可以说是建立数学模型并求解，然后对解作切合实际解释的一种科学手段。运筹学的这三个阶段——建立数学模型，数学求解和对解进行解释，都是不容易掌握的。本章将通过实例说明这三个阶段所包含的内容。

运筹学的上述三个阶段当然不是相互独立的。在建立数学模型的同时，要考虑到什么模型好解，什么模型不好解。而且，在对解进行解释时，也必须考虑到建立数学模型的过程，从而判断解值是否符合实际。

要想自如地建立各种数学模型，唯一的秘诀是反复练习。在建立数学模型时，首先是只考虑研究对象的几种主要性质，而不研究细节，这样列出的方程比较容易求解。然后，根据这个大致的解和结论，再考虑某些其他性质，重新修正模型，使它更为精确，这样一步一步地深入。建立数学模型正如画家作画，他既能洞察大自然的美，又能在画布上将它描绘出来。

人们常说，用数学公式是无法描绘复杂的社会现象的。其实，这只强调了矛盾的特殊性，而忽略了矛盾的普遍性。的确，社会科学就象语言学的文法一样，不存在没有例外的法则。但是，如果只强调个别的例外，就找不出一般的法则和公式。我们应当先不管这些例外，在找到一般法则以后，再考虑应当怎样解释这些例外。

其次，要想在数学求解方面得心应手，无疑要有很好的数

学基础，但还必须掌握计算方法。没有计算机，大多数运筹学模型的求解是不能实现的。运筹学和计算方法是并行发展的。有人预计，在下一个 10 年，运筹学和计算方法的分界线将会消失。

对解进行解释时，应注意讨论如果引进在建立数学模型时已舍弃的条件会产生什么结果。要把这一阶段工作做好，重要的是积累“常识”。所谓常识。就是以往的经验在无意识中的呈现。例如在设计一个拉杆时，小数点搞错一位，就可能制造出比原要求粗了九倍或细了 9/10 的杆。这时，如果感到不对，就是有常识。常识是人们作判断的一个重要标准。

§1.2 运筹学模型的类型与结构

一、模型是简化的现实系统

一个运筹学的模型是一个现实系统的理想表达形式。这个系统可以是已经存在的,也可以是一种还在等待实行的计划。在前一种情况下，模型的目的是分析系统的特性以便改进它的工作效能，在后一种情况下，则是指出未来系统的最佳结构形式。

图 1.1 描绘了从一个现实系统产生一个模型的抽象过程。通过把控制现实系统特性的主要变量加以集中的方法，从现实系统中抽象出“假定的现实系统”。模型则是假定的现实系统的一个抽象，它把这些变量之间的相互关系确定下来，并简化为一个适合于分析的形式。

下面举一个例子。

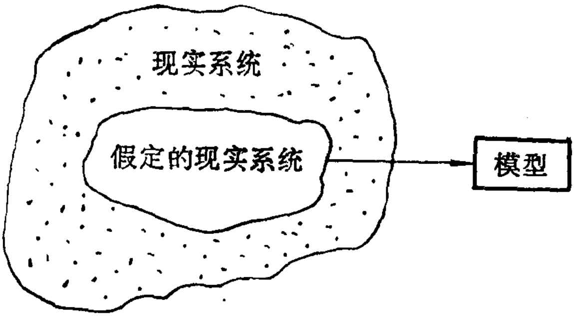


图 1.1

例 1　最佳场址选择问题

要确定一个新仓库的位置 P，使它向处于不同地点 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的车间供应材料。从新仓库到各车间的运输费用近似等于货重与运输距离的乘积。已知各车间的需求量为 $W_i(i=1,2,\cdots)$，问应如何选 P 的位置，见图 1.2。使总运输费用 C 达到最小（假设没有现有道路可以利用）。

这时我们可利用分析方法构造数学模型，求 $P(x,y)$ 使总运输费用 C 达到最小，即

$$\min C(x,y)=\sum_{i=1}^{n} W_i\sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2}, \qquad (1.1)$$

我们也可以构造如下的物理模型来模拟它（见图1.3）。

做一个板面上带有坐标刻度的桌子，在相应车间所在的坐标位置处钻洞。通过每一个洞穿过一条细绳，一端垂在板下吊着一个砝码，其重量 w_i 与车间用料需求量 W_i 相应（取一个比例数即可），另一端都在板面上，且与同一个小环相连，最后小环停留下来的平衡位置，就是使总运输费用最小的那个位置。这是一个很好的近似（参看图1.3），说它近似。因为在

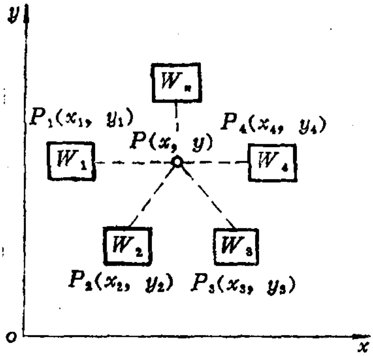


图 1.2

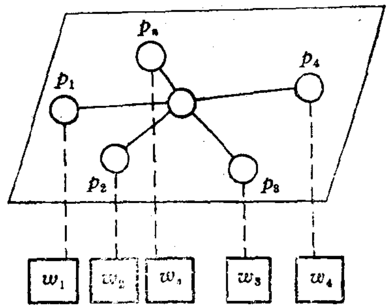


图 1.3

制作这样的平板模型时由于绳子与板之间的摩擦，可能会增加一些阻力，使平衡位置 p 不可能正好停在理想位置上。

二、运筹学模型的类型

运筹学模型中最重要的类型是符号模型或数学模型。在形成这种模型时，我们假定所有有关的变量都是可计量的。因此，用数学符号来表示变量，再采用适当的数学函数来描绘系统特性，从而把这些变量联系起来，最后用以后各章所说明的各种数学计算方法得到模型的解。

大多数运筹学家认为运筹学这个名词主要内容是指数学模型。其理由就是这种模型适合于数学分析，而这种分析常常可用简便的数学工具求出模型的"最好"解。因此在运筹学中应把注意力集中在制定数学模型上。

在利用数学模型寻找最好（最优）解的时候，有时会遇到数学表达式太复杂以致不能得到一个精确解的情况，或即使最后能得到一个最优解，所需要的计算可能长得无法进行。在这

种情况下，可用试探法来确定好的（近似）解。解的试探法依赖于直观的和经验的规则，即给出模型一个目前的解，再确定一个有改进的解。实际上，试探是一种寻找，它以对解进行改进为目的，巧妙地从一个解点，转移到另一个解点，当不能再进一步改进时，所得到的最好的解就是模型的近似解。

除数学模型外，也利用模拟和试验模型来“摹仿”整个时期内系统的特性。这是通过若干次模拟试验来完成的，因为模拟模型不需要明显的数学函数来联系各个变量，所以常常可模拟那些不能模型化或者在数学上不能求解的复杂系统。这种灵活性允许系统有一个比较准确的表达。模拟的主要缺点是它的分析相当于进行试验，因而受实验误差的约束。这样产生了设计试验、收集观察资料以及采用统计推断检验的一般困难。当然，模拟模型不象数学模型那样能得到问题的一般解。

三、数学模型的结构

模拟模型没有固定的结构，但数学模型一般包含三个基本要素：

1. 决策变量和参数　决策变量是由模型的解所确定的未知数，参数表示系统的控制变量。例如，在例1.2.1中，场址$P(x,y)$是一个决策变量。这个例子中参数包括$P_i(x_i, y_i)$和$W_i(i=1,2\cdots,n)$，一般说，模型的参数可以是确定性的，也可以是随机性的。

2. 约束或限制条件　为了考虑到系统的物质限制，模型必须包括把决策变量限制在它们可行（或允许）值之内的约束条件，这通常用有约束的数学函数形式来表示。

3. 目标函数　它是系统决策变量的一个数学函数，用它

可以衡量系统的效能。例如，例 1.2.1 中的目标就是要使运费C达到最小。那么目标函数就是根据决策变量 x 和 y 确定运费的式(1.1)。一般说，模型最优解是决策变量的一组值，它满足所有的约束条件，并使目标函数的值达到最佳。所以运筹学模型求解一般可看成是确定决策变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的值，它使

$$f=f(x_1,\cdots,x_n)\text{ 最优，且}$$

满足约束条件：

$$g_i(x_1,\ \cdots,\ x_n)\leqslant b_i,\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m\text{ 和}$$
$$x_j\geqslant 0,\ \ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

函数 f 是目标函数，而 $g_i<b_i$ 表示第 i 个约束条件，这里 b_i是一个已知的常数。约束条件 $x_j\geqslant 0$ 称为非负性约束条件，它限制变量只取零和正数。在大多数现实系统中、非负的约束条件可看成是一种自然的需要。

§1.3 建立数学模型的两个例子

例 1　电锅的销售问题

首先定义以下的符号：

t——时间；

$x(t)$——开始销售以来售出电锅的总数量：它是时间 t 的函数；

x_∞——某地区需要购头电锅的顾客数量（大体上可按每户一个计）。

研究方法如下：

(1) 电锅这一类家庭主妇购买的商品在利用电视和广播做广告的同时，实物广告的效果是很大的。比较已售出 10 个电

锅和 100 个电锅两种情况时，由于实物广告的作用，对应于后一种情况下的销售量的增加将是前者的 10 倍。也就是说，电锅的销售速度$\frac{dx}{dt}$是与 $x(t)$ 成比例的，即

$$\frac{dx}{dt} \propto x,$$

式中 $x=x(t)$。此式若取 k 为比例常数，可导出

$$\frac{dx}{dt}-kx=0。\qquad (1.2)$$

这个微分方程可按下述方法求解

$$\frac{dx}{dt}=kx \Longrightarrow \frac{dx}{x}=k\,dt,$$

$$\Longrightarrow \int \frac{1}{x}dx=\int k\,dt+c\,(c——积分常数)$$

$$\Longrightarrow \ln x=kt+c \Longrightarrow x=e^{kt+c},$$

$$\Longrightarrow x=c'e^{kt},\ (c'=e^{c})。$$

这个解的图形如图 1.4 所示，可见电锅的销售量会爆发式地增长。

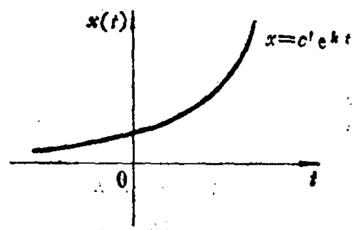


图 1.4

下面研究 c' 和 k 的实际数值。

令 $t=0$ 为开始销售的时刻，此时 $x(t)$ 也是 0，代入

$$x=c'e^{kt}, \qquad (1.3)$$

因为有

$$0=c'e^{0}=c',$$

所以，$c'=0$。再将 $c'=0$ 代入 (1.4) 式，就得到 $x=0$，结果得到一个电锅也没有卖出去的矛盾。这个矛盾是因只考虑了实物广告的力量缘故。开始一个没有售出，就是没有实物广告，

于是永远一个也卖不出去。这个缺点要在进一步分析中加以修正，若将报纸、电视等的广告作用也考虑进去，则使方程更为精确。

然而在这里，为回避这个矛盾，可假设 $t=0$ 时，通过某种努力已经卖出了 a 个。即当 $t=0$ 时，$x=a$（a 应当是很小的数）。代入(1.3)式，得

$$c'=a,$$

则(1.3)式成为

$$x=ae^{kt}。$$

下面求 k 值。这可从销售以来几个月内所记录的销售量求出 $\frac{dx}{dt}$，再求出各 t 值的 $\left(\frac{dx}{dt}\right)\Big/x$，加以平均即可。

上述分析的电锅销售问题，对于刚开始销售的初期，可认为是合适的。如果这种产品已经普及到该地区大多数家庭，那么，上述(1)的假设将不能成立。为研究这种情况，将 x_∞ 作为全部需要量，并采用下面的假设。

(2) 当产品相当普及时，销售速度 $\frac{dx}{dt}$ 与潜在的需要量 $(x_\infty-x)$ 成比例。从该产品销售的全过程来看，应该将这个性质与(1)的情况结合起来考虑，电锅的销售速度 $\frac{dx}{dt}$ 是与 $x(x_\infty-x)$ 成比例的。这是因为当 x 较小时，$x(x_\infty-x)$ 是与 x 成比例的函数；当 x 趋向于 x_∞（当然 $x<x_\infty$）时，$x(x_\infty-x)$ 是与 $(x_\infty-x)$ 成比例的函数。根据这个假设，得到微分方程

$$\frac{dx}{dt}=kx(x_\infty-x), \tag{1.4}$$

此式可用如下的计算求解

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(x_\infty-x)\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}x}{x(x_\infty-x)}=k\mathrm{d}t,$$

$$\Longrightarrow\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x_\infty-x)}=\int k\mathrm{d}t+c,$$

$$\Longrightarrow\int\frac{1}{x_\infty}\left(\frac{1}{x_\infty-x}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int k\mathrm{d}t+c,$$

$$\Longrightarrow\frac{1}{x_\infty}(-\ln(x_\infty-x)+\ln x)=kt+c$$

于是得

$$\frac{x(t)}{x_\infty}=\frac{1}{1+c'\mathrm{e}^{-x_\infty kt}}(c'\text{——积分常数})\qquad(1.5)$$

(1.5) 式也称为增长曲线。当$c'=1$时，对应于x_∞，$k=2$，1和1/2的增长曲线如图1.5所示。

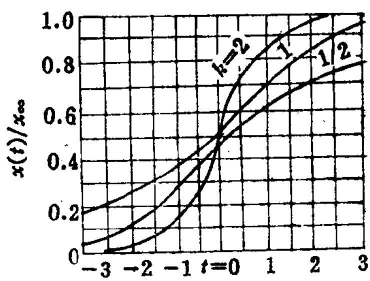


图 1.5

这时，虽然得到的解为 (1.5) 式，但用于实际的需求预测时，还必须根据过去的数据来确定 (1.5) 式中的待定常数 c' 和 k 的值。在推导 (1.5) 式的过程中，可得到

$$\ln\frac{x_\infty-x}{x}=-x_\infty kt-x_\infty c$$

在上式中取

$$Y=\ln\frac{x_\infty-x}{x},\ X=-x_\infty t,\ b=-x_\infty c,$$

于是，问题就变成了根据过去的数据（Y_i，X_i），按最小二乘法来求

$$Y=kX+b$$

的线性回归问题。这一模型就比较好地反映了实际，而且使用也方便。

例 2　沃尔特拉的生存竞争方程

第一次世界大战中，因为战争很少捕鱼，按理战后应能捕到最多的鱼才是。可是大战后，在地中海却捕不到鲨鱼，因而渔民困惑不解。最先对这种现象进行分析的是沃尔特拉。

根据统计，鲨鱼的捕获量占总捕鱼量的百分比如表 1.1 所示。

表 1.1　　　　（单位：%）

地点＼年份								
	1905、	1910、	1911、	1912、	1913、	1914、	1915、	1916、
	1917、	1918、	1919、	1920、	1921、	1922、	1923、	
的里雅斯德	—	5.7	8.8	9.5	15.7	14.6	17.6	16.2
	15.4	—	19.9	15.8	13.3	10.7	10.2	
里雅卡	—	—	—	—	—	11.9	21.4	22.1
	21.2	36.4	27.3	16.0	15.9	11.8	10.7	
威尼斯	21.8	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	30.9	25.3	25.9	26.8	26.6	

沃尔特拉按如下方法进行分析：

令 N_1 为鱼饵的数量；

N_2 为鲨鱼的数量；

t 为时间。