精密机械设计基础

北京工业学院精密机械教研室　编

国防工业出版社

精密机械设计基础

北京工业学院精密机械教研室　编

国防工业出版社

内容简介

本书内容共分两部分，即精密机械结构设计的基础知识和光学精密机械仪器、光电仪器以及机电仪器、电子仪器中常用的精密机械零、部件的选择、设计、计算的基本方法。

第一部分主要内容包括：物体受力分析与平衡，常用金属材料及其工程性质，构件受力变形及其应力分析，机械运动学结构设计基础，精密机械中的误差分析与精度，精密机械的结构工艺性。

第二部分主要内容包括：零件的联接，光学零件的固紧，弹簧，螺旋传动，齿轮传动，带传动，凸轮与间歇机构，轴与联轴器，轴承与轴系，直线导轨，微动装置，限动器，示数装置，减振器。

本书附有部分设计、计算例题和有关设计参考数据以及常见结构图例。可作为工科院校光学精密机械仪器、光电仪器、机电仪器、电子仪器等非结构专业的教学用书，教学时数可为100学时左右；也可作为有关专业工人、技术人员的自学参考书。

精密机械设计基础

北京工业学院精密机械教研室 编

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/16　印张20 3/8　473千字

1981年1月第一版　1981年1月第一次印刷　印数：00,001—11,200册

统一书号：15034·2151　定价：2.10元

前 言

现代仪器发展的重要特点之一是光学系统（包括光电转换系统）、电路系统和精密机械结构三者密切联系、互相配合，共同保证仪器技术性能的实现。最近年代，电子技术、光电技术得到迅速发展，但目前情况下，无论是光学精密机械仪器、光电仪器还是机电仪器、电子仪器仍然不能脱离精密机械结构而具有实用价值。精密机械结构在仪器中的主要作用是组成具有确定运动规律的相对活动系统，来传递、变换、控制运动和传递数值，指示工作，以及调整、固定和稳定光学部件、光电器件、电气元件和机械构件的相对位置。精密机械结构部分不仅在质量上对保证仪器技术性能的实现有着极为重要的作用，而且在仪器构件的数量上，也往往占有相当大的比例。

为了适应国内部分工科院校光学设计与检验专业、光电器件与技术专业以及机电仪器、电子仪器等非机械结构专业的教学需要，提供有关精密机械结构设计方面的基本知识，编者根据有关专业教学计划的要求及其机械类课程的基础情况，在教学实践的基础上，对教学内容进行了多次修改、调整、充实，编写了《精密机械设计基础》这部基础通用教材。初步形成了一个适用于上述各专业的《精密机械设计基础》教材体系。在广度上和深度上主要侧重于光学精密机械仪器、光电仪器以及机电仪器、电子仪器中最常用的精密机械通用零、部件的类型与结构的选择和设计、计算的一般方法，以及为此所需要的最常用的基础知识。并适当地介绍了一些近年来发展较快、应用较多的新型精密机械零、部件。

本书常用计量单位采用了国际单位制，并引入了适用于仪器及精密机械的有关国家标准及其常用数据。为了适应上述不同专业的特点和教学计划的要求，本书编写内容所需的教学时数稍多于教学计划规定的教学时数。在使用本书进行教学过程中，应根据不同专业教学计划的要求和具体情况，对内容适当选择，加以删减和补充。并与《光学仪器设计手册》或《精密机械设计手册》等有关设计资料和技术标准配合使用。注意引导学员通过教学实践环节，掌握使用手册和设计资料的能力。

本书由北京工业学院精密机械教研室部分同志合编。盛鸿亮主编，郭在德、丁伯瑜、王惠敏、裴先惠四同志参加编写。樊大钧、何献忠两同志主审。初稿完成后，又委托华东工程学院郑祖炳同志进行了审阅。并召开了由上海机械学院、天津大学、长春光学精密机械学院、北京工业大学、华东工程学院、华中工学院、西北电讯工程学院、浙江大学、清华大学等院校代表参加的《精密机械设计基础》教材审稿会。与会的各院校的代表对教材书稿进行了全面、细致的审查，肯定了教材的适用性，推荐出版发行。并提出了许多宝贵意见和建议。在此，仅向参加教材审稿会的各院校的代表，致以深切谢意。

根据教材审稿会议的希望和建议，参加编写和主审的同志又进行了认真地研究，并由盛鸿亮、郭在德两同志对教材书稿再次进行了修改和补充。在整个编写过程中，编者虽力图使本书能基本满足有关院校及专业的教学需要，但由于编者水平和时间所限，各方面工作不够细致，不够充分，难免存在错误和不妥之处，希望阅读和使用本书的同志批评指正。

编　者

目　录

第一章　物体受力分析与平衡

§1　基 本 概 念

一、力 的 概 念

任何两个物体相互作用时，这两个物体的运动状态（即它们的速度大小和方向，或是两者之一）都会发生变化。随着生产的发展，实践的丰富和人们对于这种作用的认识日益广泛和深化，逐步建立了力的概念。所谓力就是物体间相互的作用。这种作用的效果是使物体的运动状态发生变化。如果没有物体间相互的作用，力便不能存在。

物体的相互作用，可以是物体间的直接接触，由此产生的力称为接触力；也可以是不相互接触，由此产生的力称为超距力。例如万有引力、磁力等。接触力的作用分布于接触表面；超距力的作用分布于物体的全部。

力作用于物体时，使物体的运动状态（包括平衡）发生变化。力对于物体作用的这种结果，称为力的外效应，即力的运动效应。力对于物体的作用不仅产生运动效应，同时还会使物体的形状和大小发生变化，即发生变形。力对于物体作用的这种结果，称为力的内效应，即力的变形效应。

实践表明，力对于物体的外效应决定于力的下列三个因素：（1）力的作用点；（2）力的方向（包括方位和指向）；（3）力的大小。

力的作用点是物体直接承受力的作用的那一点。力的方向就是原来静止的物体在这个力的作用下的运动方向。对于接触力，如其作用表面与物体的全表面比较极为微小，则此接触面可视为一接触点，即力的作用点。接触力可视为一集中力，其方向经过此力的作用点。通过力的作用点，沿力的方向的一条直线，称为该力的作用线。要表明力的大小，必须选择一个标准力作为单位力，来说明某一力是单位力的若干倍。在工程单位制中，取北纬45°的海平面上，地球吸引质量为1公斤的标准法码所产生的力，作为力的单位，这个力的单位称为“公斤力”或“千克力”。在国际单位制中取这样的力作为力的单位。在这个力的作用下，质量为1千克的物体得到1米/秒^{2}的加速度。力的这种单位称为“牛顿”。力的工程制单位与国际制单位的换算关系为1公斤力＝9.8牛顿。

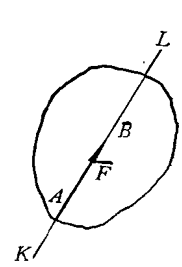


图1-1　力的矢量表示法

力的三要素中任一要素如有改变，则力的外效应亦随之改变。力的三要素可以用一个矢量表示出来（见图1-1）。矢量的起点或终点代表力的作用点，矢量的方位和箭头的指向代表力的方向，矢量的长度按照选定的比例尺代表力的大小，例如1厘米代表98(牛)。当用符号表示力矢量时，应在字母上加一短划，例如$\overline{F}$或$\overline{AB}$。而不带短划时（如F或AB）只代表模。

二、刚体的概念

研究力的外效应问题时，均将所考察的物体作为刚体看待。所谓刚体，就是在任何力的作用下，体内任意两点间的距离都保持不变的物体，也就是形状和大小都保持不变的物体。实际上，任何物体受力以后都将或多或少改变它的形状和大小，即发生所谓变形，绝对不变形的物体是不存在的。但是在一般情况下，物体的这种变形非常微小，在研究力的外效应问题时，这种变形是次要因素，它对所研究问题的影响可以忽略不计。因而可以将其近似地作为刚体看待。故刚体概念的建立是人们对实际物体的一种理想化结果。刚体的概念能够更深刻、更正确地反映物体在力学问题中的本质属性。力作用于刚体，只发生外效应；如作用于非刚体或弹性物体，将同时发生内效应。

三、力系的概念

在工程实际中，一个物体常常同时受到几个力的作用。力学中将作用在物体上的几个力或一组力称为力系。力系用记号（$\overline{F}_1$，$\overline{F}_2$……，$\overline{F}_n$）表示。

各力作用线在同一平面内的力系称为平面力系；不在同一平面内的力系称为空间力系。各力作用线相交于同一点的力系称为汇交力系（或共点力系）；各力作用线相互平行的力系称为平行力系。

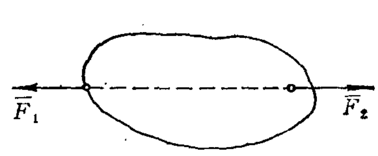
如果两个不同的力系作用于同一物体产生的效果相同，就称这两个力系为等效力系。可见，将作用在物体上的一个力系，用另一个同它等效的力系来代替，对物体作用的效果不变。

如果物体在某一力系的作用下，其运动状态不变，则此力系称为平衡力系。显然，将平衡力系加到静止的物体上时，物体仍将保持静止，即平衡力系对物体的外效应等于零。

四、二力平衡定律

实践证明，最简单的平衡力系可以由两个力组成。例如图 1-2 中（a）所示连杆的两端，受到力 $\overline{F}_1$ 和 $\overline{F}_2$ 的作用，当 $\overline{F}_1$ 与 $\overline{F}_2$ 大小相等、方向相反、沿同一作用线作用时，连杆就处于平衡，并且只有满足这样的条件，连杆才能平衡。

(a)



(b)

图1-2　二力平衡状态

上述平衡情况，不仅适用于连杆，同样也适用于其它形状的刚体，如图 1-2 中(b)所示。由此可以得到一个明显的基本结论：作用于同一刚体上的两个力使刚体处于平衡状态的必要与充分条件是：这两个力大小相等，沿同一作用线而方向相反（简称为等量、共线、反向）。这个结论称为二力平衡定律。

五、力的可传原理

设图 1-3 所示的刚体在 A 点受一个力 F，今在 F 的作用线上任一点 B 加上沿 AB 线作

用而方向相反的两个力F'与F''，并令$F'=F''=F$，因F'与F''是一个平衡力系，所以F，F'，F''三个力对于该刚体的效应与F单独作用时的效应相同。又因力F与F''大小相等，方向相反，而且共线，故可以互相抵消。于是，只剩下在B点的力F'，其效应与力F，F'，F''的效应相同，因而也与力F的效应相同。但力F'与F大小相等，方向相同，并沿同一直线作用，这就如同将力F沿其作用线从A点移至B点一样。由此得到力的可传原理：作用于刚体的力，如其方向、大小和作用点均为一定，则力可在其作用的刚体上沿其作用线任意移动而不改变其对于刚体的效应，即力的作用线上的任一点都可作为力的作用点。这一性质被称为力的可传性。

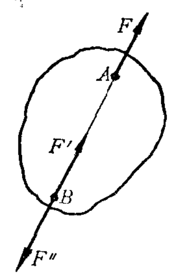


图1-3　力的可传原理

六、作用与反作用定律

实践表明，当一个物体给另一个物体一个作用力时，受力的物体也同时给施力的物体一个作用力。前者称之为作用力，后者称之为反作用力。作用力与反作用力总是成对地出现，互为依存条件，没有作用力也就不存在反作用力。大量实验证明，作用力与反作用力大小相等，方向相反，作用在同一条直线上。如图1-4所示的齿轮啮合。当齿轮A驱动齿轮B转动时，轮A必须给轮B以作用力$\overline{P}_A$，同时轮B也必须给轮A以反作用力$\overline{P}_B$。则$\overline{P}_A$与$\overline{P}_B$大小相等，方向相反，并作用在一条直线上。

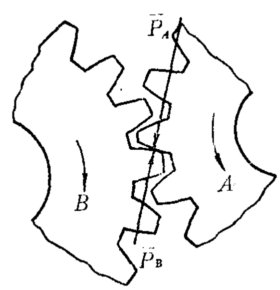


图1-4　作用与反作用

必须指出，作用力与反作用力是分别作用在两个不同物体上的力，绝不能把它们当作是作用在同一物体上相互平衡的两个力。

本章仅讨论力的外效应问题中的物体受力分析和物体运动的特殊形式，即物体在力的作用下平衡等某些基本问题，亦即刚体静力学问题。至于力的内效应问题中的变形体平衡的某些基本问题，将在第三章中进行讨论。由于变形体的平衡理论也要以刚体的平衡理论为基础，故只有在研究了刚体的平衡问题以后，才可能进一步研究变形体的平衡问题。

§2　力的合成与分解

工程实际中经常遇到一个物体同时受到几个力的作用。因此，需要研究几个力对物体同时作用的总效应，就是所谓力的合成。当一个物体同时受到几个力的作用，可以用一个力代替几个力的共同作用。如果这个力对物体所产生的外效应与原来几个力共同作用时所产生的外效应相同，这个力就是原来那几个力的合力。工程实际中也经常遇到用几个力代替一个力的作用，即需要研究一个力对物体产生的几个分效应，就是所谓力的分解。将一个力的作用分成两个或两个以上的力时，如果这些力对物体所产生的外效应与原来一个力产生的外效应完全相同，这几个力就是原来那个力的分力。

一、共线力的合成与分解

在力的合成与分解问题中，最简单的是共线力的合成与分解。当一个物体同时受到位

于同一直线上的两个力 F_1 与 F_2 作用时，如两个力的方向相同，则合力 $R=F_1+F_2$，合力的方向与 F_1、F_2 相同。如两个力的方向相反（$F_1 \neq F_2$），则合力 $R=F_1-F_2$，合力的方向与其中较大的一个力的方向相同。当一个物体同时受到位于同一直线上两个以上的力作用时，其合力等于各力的代数和。即 $R=\Sigma F_i$，i 为正整数。R 的指向则由 ΣF_i 的正负号决定。

两个力或两个以上力的合成只有一个合力，而一个力在其原来作用线上可分解为任意个分力，但这些分力的代数和必须与原来的力相等。

二、平行四边形定律

作用在刚体上同一点的两个力，可合成为一个力，此合力作用于同一点，其大小和方向可用这两个力矢为邻边作出的平行四边形的对角线表示。

如图 1-5 所示，矢量 $\overline{OA}$ 和 $\overline{OB}$ 分别代表两个已知力 F_1 与 F_2，相交于 O 点。以 $\overline{OA}$ 和 $\overline{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$，其对角线 $\overline{OC}$ 即代表 F_1 与 F_2 的合力 R。其大小可按作图的同一比例尺量取，其方向由 $\overline{OC}$ 与 $\overline{OA}$ 的夹角 α 表示，并用量角器量取。OC 即代表合力作用线的位置。

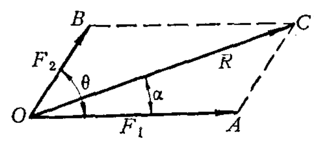


图1-5　力平行四边形定律

由图 1-5 可以看出：两个力的夹角 θ 在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 之间时，夹角越小，它们的合力就越大。当夹角为 0° 时，即两个力为方向相同的共线力，它们的合力最大。两个力的夹角 θ 在 $90^\circ \sim 180^\circ$ 之间时，夹角越大，它们的合力就越小。当夹角为 180° 时，即两个力为方向相反的共线力，它们的合力最小。

平行四边形定律是力的合成与分解所依据的基本定律，可普遍应用于力的合成与分解。

三、共点力的分解

如果没有其它条件的限制，根据平行四边形定律，以一个已知力为对角线的平行四边形可以作出任意个，即一个已知力可以在不同方向分解为任意对大小和方向都不相同的分力。每对分力均交于一点。除非对分力的大小或方向预先有一定的限制，例如：

（1）已知两分力的方位，求其大小；

（2）已知两分力的大小，求其方向；

（3）已知一分力的方向及大小，求另一分力的方向及大小；

（4）已知一分力的方向及另一分力的大小，求前者的大小及后者的方向。

实际应用中最常用到的是一种重要的特例，就是将一个力在给定的平面内分解为互相垂直的两个分力，如图 1-6 所示。

两个分力 F_x、F_y 与已知力 F 的关系为

$$F^2=F_x^2+F_y^2 \tag{1-1}$$

式中　$F_x=F\cos\alpha$；$F_y=F\sin\alpha$

F_x 与 F 之间夹角 α 的关系为

$$\mathrm{tg}\ \alpha=\frac{F_y}{F_x} \tag{1-2}$$

实际上两个分力 F_x、F_y 也可看作是力 F 分别在 X 轴和 Y 轴上的投影。即力在轴上的投影，等于该力的大小乘以该力与投影轴的夹角的余弦。力在轴上的投影与投影轴正向相同者，取为正号，反之，取为负号。

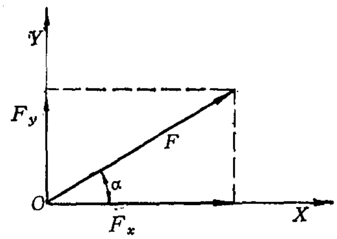


图1-6　力在 X、Y 轴上的投影

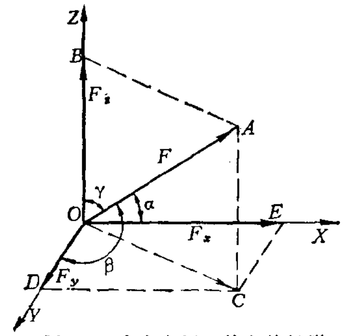


图1-7　力在空间三轴上的投影

不难看出，将平行四边形定律稍加引伸，或者利用力在三个互相垂直的坐标轴上投影的方法，即可将一个力分解为互相垂直的三个分力，如图 1-7 所示。

图中 $\overline{OA}$ 所代表的力 F，可先分解为两垂直分力 $\overline{OB}$ 与 $\overline{OC}$；将分力 $\overline{OC}$ 再分解为两垂直分力 $\overline{OD}$ 与 $\overline{OE}$。于是 X、Y、Z 三个轴向分力亦即力 F 在 X、Y、Z 三个轴上的投影分别为：

$$F_x = F\cos\alpha$$
$$F_y = F\cos\beta$$
$$F_z = F\cos\gamma$$

式中 α、β、γ 分别代表力 F 与 X、Y、Z 三轴正向所成的夹角。

四、共点力的合成

根据平行四边形定律，利用图解法可将两个共点力合成为一个力，已如前所述。此外，还可以根据平行四边形的性质，利用余弦定理计算出 F_1 与 F_2 之间成某一角度 θ 时的合力 R。

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta} \tag{1-3}$$

合力 R 的方向用 R 与 F_1 之间的夹角 α 表示

$$\alpha = \mathrm{tg}^{-1}\frac{F_2\sin\theta}{F_1 + F_2\cos\theta} \tag{1-4}$$

如 F_1 与 F_2 两力的作用线互相垂直（$\theta = 90^\circ$），如图 1-8 所示，则上述公式可写成

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \tag{1-5}$$

$$\alpha = \mathrm{tg}^{-1}\frac{F_2}{F_1} \quad 或 \quad \cos\alpha = \frac{F_1}{R}$$

对于两个以上的平面共点力的合成，可连续应用平行四边形定律，如图 1-9 所示。

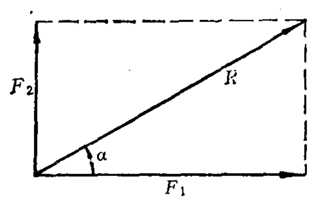


图1-8　互相垂直的两力的合成

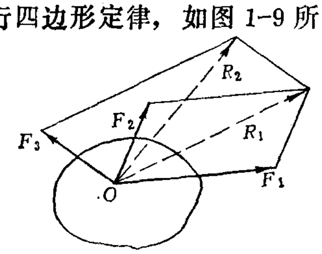


图1-9　平面共点力合成的图解法

作用于物体上的三个力 F_1，F_2 与 F_3 汇交于 O 点。利用平行四边形定律，可先求出其中两个力（例如 F_1 与 F_2）的合力 R_1，然后，再求出 R_1 与 F_3 的合力 R_2。依此类推，即可求出许多平面共点力的总合力。所得结果，与合成的先后顺序无关。

两个以上的平面共点力的合成，也可利用力在轴上投影的方法，例如图 1-10 所示的四个力，可先将每个力在 X 和 Y 轴上投影。力系中的各力在 X 轴上的投影组成一共线力系，其合力的大小为 ΣF_x，沿 X 轴方向作用。同理，各力在 Y 轴上的投影组成另一共线力系，其合力的大小为 ΣF_y，沿 Y 轴方向作用。这样，原有四力的力系，可合并为互相垂直的二力，此二力的合力即为原力系的合力，其大小与方向为

$$R=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2} \tag{1-6}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} \quad 或 \quad \cos\alpha=\frac{\Sigma F_x}{R}$$

上述方法稍加引伸，即可用于解决两个以上的空间共点力的合成问题。也同样先将每个力分别在直角坐标系的 X、Y、Z 轴上进行投影，然后求出各力在各轴上投影的代数和 ΣF_x，ΣF_y，ΣF_z。最后即可求得合力 R，如图 1-11 所示。合力 R 的大小为

$$R=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2+(\Sigma F_z)^2} \tag{1-7}$$

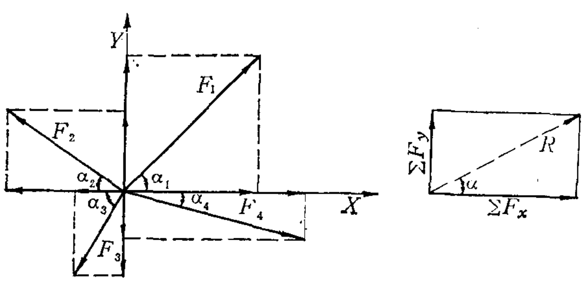


图1-10 平面共点力合成的解析法

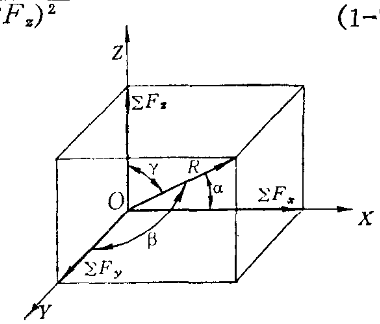


图1-11 空间共点力合成的解析法

合力 R 的作用线与 X、Y、Z 轴所夹的角度的余弦，名为方向余弦。

$$\cos\alpha=\frac{\Sigma F_x}{R} \tag{1-8}$$

$$\cos\beta=\frac{\Sigma F_y}{R} \tag{1-9}$$

$$\cos\gamma=\frac{\Sigma F_z}{R} \tag{1-10}$$

例题：图 1-12(*a*) 中，P 与 Q 代表作用于刚体的两力，$P=30$(牛)，$Q=120$(牛)，试求其合力。

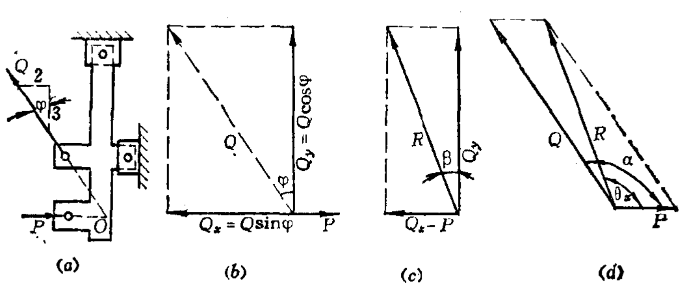


图1-12 求平面二共点力的合力

解：先将力Q分解为经过O点的水平与垂直两分力。由图 1-12（b）可知：

$$Q_x = -Q\sin\varphi = -120\times\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}} \approx -66.6(\text{牛})$$

$$Q_y = Q\cos\varphi = 120\times\frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}} \approx 99.8(\text{牛})$$

力P与Q_x的合力为　　$30-66.6=-36.6(\text{牛})$

由图 1-12（c）可得到合力

$$R=\sqrt{(-36.6)^2+(99.8)^2}\approx 106(\text{牛})$$

$$\theta_x = 90^\circ+\beta = 90^\circ+\mathrm{tg}^{-1}\frac{Q_x-P}{Q_y} = 110^\circ 10'$$

合力R的作用线必定经过O点。

除上述方法外，也可利用余弦定律求得。由图 1-12（a）可知　$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}(2/3)=33^\circ 40'$

$$\alpha = 90^\circ+\varphi = 90^\circ+33^\circ 40' = 123^\circ 40'$$

而

$$\cos\alpha = -\sin\varphi = -\sin 33^\circ 40' = -0.554$$

$$\sin\alpha = \cos\varphi = \cos 33^\circ 40' = 0.832$$

于是合力

$$R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}=\sqrt{120^2+30^2-2\times120\times30\times0.554}=106(\text{牛})$$

$$\mathrm{tg}\,\theta_x=\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}=\frac{120\times0.832}{30-120\times0.554}=-2.73$$

$$\theta_x = 110^\circ 10'\ \text{（见图 1-12}\,d\text{）}$$

例题：图 1-13（a）所示的平面共点力系，$F_1=20(\text{牛})$，$F_2=30(\text{牛})$，$F_3=10(\text{牛})$，$F_4=25(\text{牛})$，求此力系的合力。

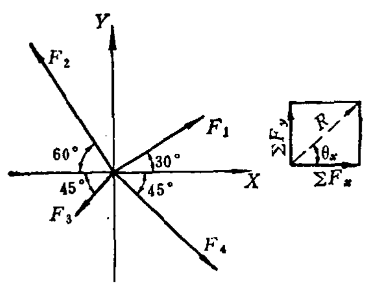


图1-13　求平面四共点力的合力

解：将各力分别在X、Y轴上进行投影

$$\Sigma F_x = F_1\cos30^\circ - F_2\cos60^\circ - F_3\cos45^\circ + F_4\cos45^\circ$$
$$=17.32-15-7.07+17.67=12.92(\text{牛})$$

$$\Sigma F_y = F_1\cos60^\circ + F_2\cos30^\circ - F_3\cos45^\circ - F_4\cos45^\circ$$
$$=10+25.98-7.07-17.67=11.24(\text{牛})$$

合力　　$R=\sqrt{(12.92)^2+(11.24)^2}=17.1(\text{牛})$

由图 1-13(b) 可知

$$\theta_x=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}=\frac{11.24}{12.92}=41^\circ$$

§3 平面力偶系

一、力对于一点（或轴）的矩

力对于物体的作用，并不仅限于产生直线运动，也有使物体绕某一点（或轴）转动的效应。实践表明，力使物体绕一点（或轴）转动的效应，不仅与力的大小有关，还与物体转动所绕的点（或轴）到力的作用线之间的垂直距离有关。亦即与这两者的乘积有关。所以，衡量力使物体绕一点（或轴）转动的作用，就不能仅仅用力来表示，而是用力与物体转动所绕的点（或轴）到力的作用线之间的垂直距离的乘积表示。这个乘积就称为力矩，如图 1-14 所示。设力 F 的作用线至物体（未画出）转动所绕的点 O 之间的垂直距离为 d，则力的大小与距离 d 的乘积 Fd 称为力 F 对于 O 点的矩，简称为力矩。O 点称为矩心，而垂直距离 d 称为力臂。通常用 $m_o(\overline{F})$ 表示力 F 对于 O 点的矩，根据定义

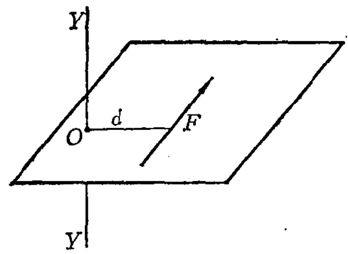


图1-14 力对于一点(或轴)的矩

$$m_o(\overline{F})=Fd \tag{1-11}$$

从上式可以看出，如力 F 大小不变，力矩 $m_o(\overline{F})$ 将随力臂 d 的变化而变化。如 $d=0$，则力矩 $m_o(\overline{F})=0$。这时物体不能产生转动，所以物体绕一点（或轴）转动的效果，由力矩决定。

力矩的单位，工程制中常用“公斤·米”或“公斤·厘米”，国际制中常用“牛·米”。

力矩不仅有大小，还有方向。力的指向不同，或力在矩心的另一侧，将使物体按不同方向绕矩心转动。当作用在物体上的力在同一平面内，各力对于平面内任一点的矩的转向，不外是逆时针的或顺时针的。为了便于区别，通常在力矩前加上正负号。习惯规定向力系所在平面看去，使物体绕矩心逆时针转动的力矩取正号，反之，则取负号。因此，

$$m_o(\overline{F})=\pm Fd$$

力矩的大小、方向、矩心的位置这三者称为力矩三要素。

对于空间力，例如图 1-15 所示的力 F，欲求其对 X、Y、Z 三轴的力矩，可先将此力分解为互相垂直的两个分力，一个与 Y 轴平行为 F_y，另一个与 Z 轴平行为 F_z。且 F_y、F_z 均与 X 轴垂直相交。与轴平行的力并无使物体绕该轴转动的趋势，其力矩为零。故力 F 对于 OZ 轴的力矩为 $m_{oz}(\overline{F})=F_yOA$；对于 OY 轴的力矩为 $m_{oy}(\overline{F})=-F_zOA$；对于 OX 轴因其力臂 d 为零，故力矩 $m_{ox}(\overline{F})=0$。

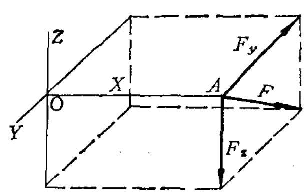


图1-15 空间力对于三轴的力矩

二、力偶与力偶矩

实践中可以经常看到方向相反的两个力使物体产生转动。大小相等、方向相反而不共

线的两个相互平行的力，称为力偶。例如，作用在汽车驾驶盘上的两个力（见图 1-16 中（a））和利用扳牙套螺纹时作用在绞杠上的两个力（见图 1-16 中（b）），都是力偶。力偶所在的平面称为力偶作用面。力偶是力学中基本的、重要的概念之一。一力偶不能化成更简单的力或力系，力偶的唯一外效应是使物体产生转动，或阻止物体的转动。经验证明，力偶使物体转动的效应不但与力偶的大小有关，还与力偶臂（即两力作用线之间的垂直距离 a）的长短有关。显然，如力偶的大小不变，力偶臂越长，物体的转动效应越大。如力偶臂不变，则力偶越大，物体的转动效应也越大。所以，力偶对物体的转动效应，必须用力

图1-16　力偶作用实例

偶中一个力的大小与力偶臂的乘积来衡量，这个乘积就称为力偶矩。用符号M表示，则

$$M=Fa=F'a \tag{1-12}$$

力偶矩的单位同力矩一样，在工程制中常采用"公斤·米"或"公斤·厘米"，在国际制中常采用"牛·米"。力偶矩不仅有大小，也有不同的旋向。力偶矩的旋向与力矩规定一样，向着力偶作用的平面看去，若力偶使物体逆时针方向转动，则力偶矩取正号，反之，则取负号。

经验表明，力偶的外效应决定于下列三个条件：（1）力偶矩的大小；（2）力偶矩的旋向；（3）力偶作用平面的方位。这三者称为力偶的三要素。因此，描述力偶对物体的转动效应时，必须同时说明这三个条件。

设力偶都作用在同一平面内，即组成所谓平面力偶系。

虽然力偶矩与力矩都能使物体产生转动效应，单位也完全相同，但区别它们之间的不同点是：力矩与矩心位置有关，而力偶矩与矩心无关。且力偶具有可作多种变换而不改变其对物体的外效应，即所谓等效力偶的特性。

如图 1-17 所示，设F、F'代表大小相等、方向相反的两平行力，组成一力偶，力偶臂为a，将力F分解为作用于A点互相垂直的两分力F_1与F_2，将力F'分解为作用于B点互相垂直的两分力F_1'与F_2'。如使分力F_1与F_1'均沿AB线作用，并使其大小相等、方向相反，则两力互相抵消。由相似三角形定理极易证明另外两个分力F_2与F_2'必定互相平行，且大小相等，方向相反。故F、F'组成的力偶变为F_2与F_2'组成的力偶，力偶臂为b，且$F_2b=Fa$。又根据力的可传原理，F_2与F_2'的作用点，可分别从A、B点移至A'、B'点。由此可以说明：（1）力偶可以在所作用的平面内任意移动或旋转；（2）如力偶矩的大小、旋向以及力偶矩所作用的平面的方位不

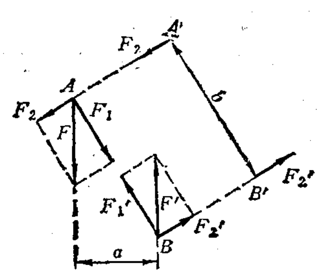


图1-17　力偶变换特性

变，则力偶的大小与两力间的距离可以任意变化、组合。其结果均不改变力偶对于物体的外效应。此外，力偶还可以由一平面移至任一平行平面而不改变其外效应。

三、平面力偶系的合成

设作用在刚体上同一平面内的三个力偶(F_1, F_1')、(F_2, F_2')、(F_3, F_3')，其臂分别为 a_1、a_2、a_3（见图 1-18 中（a））。以 M_1、M_2、M_3 分别代表三个力偶的矩，则

$$M_1 = F_1a_1;\quad M_2 = F_2a_2;\quad M_3 = -F_3a_3$$

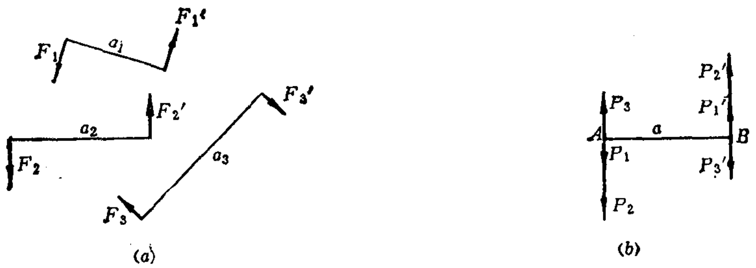


图1-18　平面力偶系的合成方法

取任一线段 AB，其长度等于 a，并将原有三个力偶分别用以 a 为臂的等效力偶 (P_1, P_1')、(P_2, P_2')、(P_3, P_3') 代替（见图 1-18 中（b））。于是，这些力偶的大小由下列各式决定：

$$M_1 = P_1a;\quad M_2 = P_2a;\quad M_3 = -P_3a$$

将作用于 A 点的三个共线力合成为一个合力 R，其大小为

$$R = P_1 + P_2 - P_3$$

同样，将作用于 B 点的三个共线力合成为一个力 R'，显然 R 与 R' 互相平行，并且大小相等，指向相反，组成一个新的力偶，即为原有三个力偶的合力偶。合力偶的矩为

$$M = Ra = (P_1 + P_2 - P_3)\,a = P_1a + P_2a - P_3a = M_1 + M_2 + M_3$$

若有更多的力偶，仍可用同样的方法合成。于是，得一结论：若干个共面力偶可以合成为一个合力偶，合力偶的矩等于所有的分力偶矩的代数和，即

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \Sigma M_i \tag{1-13}$$

四、力的平移定理

设 F 为作用在物体上 A 点的一个力，如在任一点 O 加上与力 F 平行的一对平衡力 F' 与 F''，其大小均与力 F 相等。使 F' 与 F 同向，F'' 与 F 反向，即 $F'' = -F' = F$，如图 1-19 所示。由于 F' 与 F'' 这一对平衡力对物体并无外效应，故 F，F'，F'' 三个力对于物体的外效应与原来一个力 F 的外效应完全相同。但这三个力可视为一经过 O 点的单独力 F' 和由 A 点的力 F 与 O 点的力 F'' 组成的力偶。力 F' 与原有的力 F 大小相等，指向相同，互相平行。其结果等于将作用在 A 点的力 F 平行移动到 O 点，但附加了一个力偶（F，F''），其作用面就是在 A 点的力 F 的作用线与 O 点所决定的平面，而附加力偶的矩的大小与原有力 F 对于 O 点的力矩相同，即 $M = Fa$。组成的附加力偶（F, F''）则可依照力偶变换方法任意转动或平

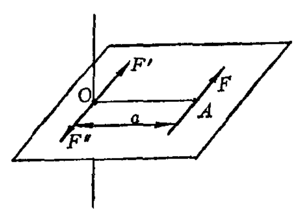


图1-19　力的平移定理

移，或变换为其它等效力偶。

如上所述，一力可以分解为同一作用平面内的一力偶与另一力。反之，作用于同一平面内的一力与一力偶，亦可合成为一个力。因力偶可以变换转移，故可使力偶中的一力与原来单独的力共线，并且大小相等，方向相反，而互相抵消。其结果仅剩余力偶中的另一力，其大小、方向均与原来单独的力相同。由此可见，一个力加上一力偶的唯一效果是使此力的作用线平行移动到物体上的任一指定点，力的大小与指向均不改变，即所谓力的平移定理。

五、力 矩 原 理

任何力系的合力对于任一点（或轴）的力矩，等于力系中各力对于同一点（或轴）的力矩的代数和。这一规律称为力矩原理。力矩原理在力学中极为重要，其应用非常广泛。

现以两共点力为例，证明两共点力的合力对于力系平面内任一点的力矩，等于两力对于同一点的力矩的代数和（见图1-20）。图中P与Q代表两共点力，相交于A。由平行四边形定律得P与Q的合力为R。设O为力系平面内的任一点，取为力矩中心。求证：

$$Rr = Pp + Qq$$

式中p、q与r分别为力P、Q与R对O点的力臂。过A点作互相垂直的AX与AY轴，并使AY轴经过力矩中心O。以α、β与θ分别代表P、Q与R的作用线与AX轴所成的角度。由图可知

$$AG = AF + FG$$

即

$$R\cos\theta = P\cos\alpha + Q\cos\beta$$

上式两边各乘以AO得

$$RAO\cos\theta = P\cdot AO\cos\alpha + Q\cdot AO\cos\beta$$

由相似三角形定理可得

$$AO\cos\theta = r;\quad AO\cos\alpha = p;\quad AO\cos\beta = q$$

故

$$Rr = Pp + Qq \tag{1-14}$$

由此可以推理，求一力对于平面内一点（或对于经过此点而与平面垂直的轴）的力矩的问题，可以经过力的作用线上任一点，将力分解为互相垂直的两分力，然后求此两分力对于同一点或同一轴的力矩的代数和。

力矩定理应用于两共点力的证明，可推广应用于任何力系，如系共面平行力系，则任一平面非共点平行力系其合力对于平面内任一点的力矩，等于全力系的各力对于同一点的力矩之和。因此，利用力矩原理求共面平行力系的合力极为简便。如图 1-21 所示，一共面

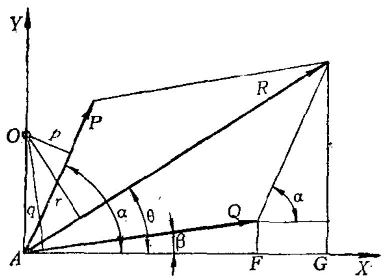


图1-20　力矩原理用于两共点力

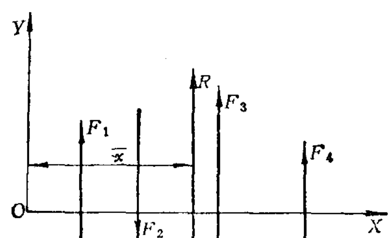


图1-21　力矩原理用于平行力系