弹性理論的接触问題

Л. А. 加 林

科 学 出 版 社

彈性理論的接觸問題

Л. А. 加林著
王君健譯
王　仁校

科学出版社

Л. А. ГАЛИН

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ГОСТЕХИЗДАТ

МОСКВА

1953

內 容 簡 介

本書是叙述彈性理論的平面接触和空間接触問題，也就是关于彈性体相接触的問題，全書共分为二部分：

第一部分中系統地叙述了平面接触問題，其中討論了各向同性和各向异性体的接触問題，以及压头在运动时的接触問題．最后还介紹了以模型法来解决彈塑性問題．

第二部分中叙述了空間接触問題，其中討論了圓形、橢圓压头在彈性半空間中的接触問題，梁、薄板在彈性半空間上的弯曲問題．

此外，本書还列举了許多有关实用的例子．

本書可供彈塑性力学研究工作者、机械、压力加工、土木工程师以及上述有关專業的大学教师作为参考．

彈性理論的接触問題

Л. А. 加林 著

王 君 健 譯

*

科 学 出 版 社 出 版（北京朝陽門大街117号）

北京市書刊出版業營業許可証出字第061号

科学出版社上海印刷厂印刷　新华書店总經售

*

1958年8月第 一 版　書号：1291　印張：6 11/16

1958年8月第一次印刷　开本：850×1168 1/32

（滬）0001—1,964　字数：181,000

定价：(11) 1.20元

前　言

本書是叙述彈性理論的平面接触問題和空間接触問題；也就是关于彈性体相接触的問題．在許多机械制造的問題中，須要去确定發生在机械零件相接触处的应力，此外，在計算基础时，也須要去解决某些接触問題，或是所謂的彈性理論的混合問題，因为只有在解决了这些問題后，才有可能来确定發生在它們下面的压力．在發展彈性理論的这一分支的过程中，俄国和苏維埃的学者有着巨大的功績，在本書开始談到接触問題的工作概况时，就可以肯定这一点．

書中所包括的內容，主要是由本書的作者得到的，至于其他作者的一些工作，仅仅是在涉及到这些研究时，才提到它們．本書的重点是关于压头（亦即剛体）在彈性体上的压力問題．在第一章中，叙述的是平面問題；第二章則叙述空間問題，其中指出了，可以用怎样的方法把所得到的結果推广到几个彈性体相接触的情形．

目　　录

緒　論

关于平面接触問題这方面工作的概述

在彈性理論接触問題的这一領域里，它的第一个結果是在上世紀末得到的．以后，在一段相当長的时期內，对这个問題所作的工作是較少的，直到最近的 15—20 年才有重大的进展．这里应該指出：大多数工作是在苏联完成的．近年来，在国外所發表的許多論文中，往往重复着苏联学者所获得的一些結果．首先，我們綜合地叙述一下平面問題的工作，然后 (§ 2) 再述及空間問題．

如果不計及發生在接触体之間的摩擦力，接触問題的解就会大大地簡化．在計算机械零件时所遇到的接触問題中，有很多場合略去这一因素是正确的．

众所周知，在互相接触的零件之間，存在着一層油膜，它会大大地降低摩擦力．如果一个零件对另一个零件运动的速度不大时，那末，在这个油膜中所發生的流体动力現象就可以略去不計．有滑油存在，就意味着物体間的摩擦力是很小的．因此，可以令它們等于零，而能够具有足够的准确度．

通常，接触面的值比接触物体的曲率半徑小得多，因此假定：其中的一个物体可用彈性半平面来替代．

1．不計及摩擦力的接触問題　在研究接触問題时，若不計及压头[1]与彈性体之間的摩擦力，則具有下面的边界条件：其一，在界面的法向，压头下面的位移值是已知的．正如在許多問題中所采用的，若彈性体占有半平面，則沿某一坐标軸方向的位移值是已知的．其二，由于摩擦力不存在，則外应力的切向分量在压头下面等于零．

通常我們假設：在压头外面，外力的法向和切向分量都等于零，

1) 在彈性体上产生压力的剛体，根据已有的术語，我們称之为压头．

就是說物体的界面上無外力作用．然而在某些論文中，也研究了所謂外載荷(即是作用在压头以外的彈性体界面上的压力)对于發生在压头下面压力分布的影响．已知外力的法向和切向分量的値，就能在压头外面的物体界面上得到兩个边界条件．

無摩擦力的接触問題，是归結到去求一个調和函数，并且基于狄里赫利問題的解来予以确定．在解这一混合类型的边界問題时，也可以使問題成为另一形式，就是去确定一个在半平面中正則的复变数函数．

关于剛体在彈性半平面上的某些特殊的压力問題，当它們之間不存在摩擦力时，是由 M. A. 沙多夫斯基[1] (Садовский) 解決的．他研究了一个具有平底的压头在彈性半平面上的压力；并且还研究了無穷多个压头作周期重复排列的情形．在 C. A. 查普雷金 (Чаплыгин) 的第二版論文集中，得到了关于平底压头压力問題的解．作者沒有發表这个結果，原手稿上記載的日期是 1900 年，就是說，要比 M. A. 沙多夫斯基在 1928 年所發表的結果早得多．H. И. 穆斯黑里施維利 (Мусхелишвили) 在第二版的“彈性数学理論的某些基本問題”一書中[1]，对于所考慮的那一类型的平面接触問題，給出了一般的解法．同时，他确定了在什么样的場合中．待求的复变数函数到处都是正則的，包括区間的端点在內，而区間对应于接触的面积．当压头的外形为光滑曲綫所圍成时，就是这种情况．例如，在形狀为圓柱的压头加压时，这种情形就会遇到．

A. И. 別格阿施維利 (Бегиашвили)[1] 將單个压头的接触問題推广到任意多个压头的情形．特别是对于几个具有平底压头的情形，他作出了一些非常簡單的結果．

这使得 Б. M. 洛米杰 (Ломидзе)[1] 解決了关于一組鉸接的基础在土壤上的压力問題．M. H. 阿芳金 (Афонькин)[1] 早些时候曾研究过这样的問題．对于兩个基础的情形，他得到了一个近似的解．

我們还要指出 П. И. 克魯斌 (Клубин)[1] 的工作．在他的論文中，确定了彈性半平面內所發生的应力，此时假設压头是具有平底的(在論文中談到的是基础)．

B. A. 加斯切夫 (Гастев)[1] 研究了关于有重量的半平面的一个問題. И. Я. 斯塔耶尔曼 (Штаерман) 在他的"彈性理論的接触問題"[7] 一書中,考慮了許多摩擦力不存在时的半平面接触問題.

在最近所發表的論文中,畢布胡契布胡桑·孙 (Bibhutibhusan Sen)[1] 解出了某些接触問題. 然而,这篇論文并沒有包含什么新的結果,因为作者所考慮的全部問題,就其实質来說,所采用的方法 H. И. 穆斯黑里施維利曾为了这一目的而用到过.

上面所談到的全部問題,都是关于各向同性半平面的. 至于各向异性半平面的接触問題,若对摩擦力所作的假設与以上所談的相同时,則是由 Г. Н. 沙文 (Савин)[1] 首先予以研究的. 他給出了关于平底压头、以及圓弧形压头,在各向异性半平面上的压力問題的解. 此外,这些結果还被推广到在压头外面的界面上有外力作用时的情形[1],以及具有几个压头时的情形[4]. 同时,特别是得到了下面的結果:如果各向异性体是正交各向异性的,并且,有一根各向异性軸与半平面的边界平行,那末,压头下面压力的分布,和在各向同性体的情形中是完全一样的.

如果压头以常速沿彈性各向同性半平面的边界运动,那末,这里所要解的混合問題,接近于在各向异性半平面的情形中所要遇到的問題. 作者[1] 研究过这个問題,它的結果引录在本書中,同时,如果压头与彈性体之間不存在摩擦力,則压力的分布就和在不运动压头的情形中是一样的.

2. 压头与彈性体剛性地連在一起时的接触問題 在这一类型的問題中,对于發生在压头与彈性体間的力,采取另一假設. 如果接触物体之間的摩擦系数很大,那末,这兩物体就成为互相剛性連結的. 在某些場合,这一类型的边界条件,接近于基础和土壤間所發生的情形. 不过,关于基础的压力問題,在許多場合是采用較为簡單的命題;就是假設在基础和土壤之間摩擦力不存在.

在上述类型的接触問題中,其边界条件是这样的,如果是考慮压头(也就是剛体)和彈性体之間的接触問題,則压头的位移就决定了彈性体边界的位移. 因此,在压头的下面,沿 x 軸向的位移分量 u 和

沿 y 軸向的位移分量 v 是已知的. 在压头外面的彈性体界面上，法向应力分量 σ_n 和切向应力分量 τ_{ns} 是給定的(如果沒有外力在彈性体界面上作用，那末它們等于零).

Н. И. 穆斯黑里施維利[2] 首先研究了关于彈性半平面这一类型的問題. 其时，在边界的一部分上給定的是位移，而在另一部分上給定的是应力. 他將問題归結到去解無限个綫性方程的方程組. 稍后，В. А. 佛罗林[2] (флорин) 研究了这一問題，將它化为含有兩个积分方程的方程組，并且作出了近似的解，同时他假設：發生在压头下的压力和切向力可以表为某个多項式. 此后不久，В. М. 阿布拉莫夫 (Абрамов)[2] 利用黎曼-梅林变换，給出了这个問題的有效解法. 应該指出：В. М. 阿布拉莫夫所采用的方法，只适用于一个压头的情形. 因为，在解問題时，他是借分式綫性变換將半平面仍变为半平面，并且將所研究的問題化为平底楔的問題. 在 В. М. 阿布拉莫夫的論文中确定了一个特别的現象；就是当趋近于接触面的端点时，法向和切向应力的符号会变更無穷多的次数，然而应力第一次变号的点，非常接近接触面的端点. 此外，由于發生了塑性变形区域，在接触面的边角上，应力分布的特征和基于普通綫性理論所获得的結果不相同. 关于一个或几个压头在彈性半平面上压力問題的全解，是后来由 Н. И. 穆斯黑里施維利給出的[3,5]。他把問題归結为去尋求一个解析函数的希尔伯脫問題. 与此同时，Н. И. 格拉哥烈夫 (Глаголев)[1-2] 研究了这个問題的另一种提法.

当边界上一部分給定的是位移，而另一部分給定的是应力，且当彈性体所占有的区域是任意的情形时，这样的混合問題 Д. И. 雪尔曼 (Шерман)[1] 曾經研究过. 这时，对于任意的有限区域来說，是把問題化为弗雷德霍尔蒙积分方程. 作者証明了：当彈性体所占有的区域可以借有理函数映射到圓上时，它的解就化为求积問題. 当彈性体所占有的区域是由圓周圍成时，則得到了更好的結果. 这里，应該提到 И. Н. 卡尔契瓦杰 (Карцивадзе)[1-2] 的工作. 在他的論文中，給出了圓內問題的解. 同时，Б. Л. 明茨別尔格 (минцберг)[1] 的論文給出了圓外問題的解. В. М. 阿布拉莫夫所解决的混合問題，后

来为 H. 阿古博 (ôkubo)[1] 研究过．他利用特殊函数，得到了一系列的解．这时，关于这个接触問題的特性还沒有解决．

上面曾經提到过 B. A. 佛罗林的一篇論文[2]．当把未知的压力表为多項式时，就給出了关于压头与基底刚性連結的問題的近似解．而这种近似求解的方法，被他用来解决了另外的一些問題，这些問題在計算基础时会遇到．特别是，B. A. 佛罗林研究了某些关于柔性和彈性的有限長梁在彈性基础上的复杂問題．在此，他作了这样的假設：梁和彈性基础之間沒有摩擦力存在；或者是假設：梁和彈性基础互相刚性地連在一起．在“水工結構基础的計算”[4]一書中，陈述了这些結果．M. И. 高尔布略夫-波沙多夫 (Горбунов-Посадов)[1-2] 和 O. Я. 謝赫切尔[2] (Шехтер) 也研究过类似的問題．在后者的論文中，研究了無限長梁在有限厚度的彈性底層上的問題．

对于各向异性半平面，在边界的一部分給出位移，而在另一部分上給出应力的混合問題，它們的解是由作者給出的，并且引录在本書中．

3．当摩擦力存在时彈性理論的混合問題　在上一节，已經概述了彈性理論接触問題的工作，其中压头与彈性体是刚性連結的．然而，在彈性体相接触时，往往会發生摩擦，而且摩擦系数乃是某个有限的量．此时，可以有兩种情形發生；其一，是一个彈性体相对于另一个彈性体运动，并且运动是如此的緩慢，以致可以不計及动力的效应．在这种場合，可以認为：在滑动力的作用下，压头在彈性体界面上处于極限平衡狀态．第二种情形是：压头作为整体来説，相对于彈性体沒有發生移动，然而在切向力小于法向压力和摩擦系数的乘积的那些点上，將成为刚性的連結，而在切向力足以引起滑动的地方，彈性体就会相对于压头發生移动，这样一来，接触面被分为具有摩擦力的截段和刚性連接的截段．在解这一类型的問題时，会發生較大的数学困难．

当接触面上作用着摩擦力时，接触問題的边界条件是这样的：在彈性体与刚性压头相接触的截段上，接触面的法向位移值是已知的，此外，由于假定摩擦力服从庫倫定律，則法向应力分量和切向应力分

量之間存在着下列的关系：$\tau_{ns}=\rho\sigma_n$，这里 ρ 是摩擦系数．在接触面外面的彈性体界面上，無外力存在．因此，法向和切向的应力分量就等于零．如果在接触面的截段上，压头与彈性体是剛性連結的，那末在这些截段上，沿坐标軸方向的位移分量就是已知的．

当整个接触面上作用着服从于庫倫定律的摩擦力时，其接触問題是由 Н. И. 穆斯黑里施維利[4] 解决的．这个問題，和上面几节所談到的問題一样，可以將它归結到去求一个复变数函数，并且，在确定这个函数时，要遇到混合类型的边界条件．具有同样的边界条件，但較为特殊的接触問題是由 Н. И. 格拉哥烈夫[1] 几乎在同一时期解决的．

如果压头沿彈性体的界面移动，則摩擦力在整个接触面上指向同一的方向．因此来研究关于压头以常速沿彈性半平面边界移动的問題是很有兴趣的．特別是这个問題的解，使我們能确定此时所發生的动力现象究竟有多大的影响．作者解决了这一問題[1]，并且將所获得的結果引录在本書中．此外，还解决了各向异性半平面在具有摩擦力时的接触問題[1]．这里所采用的方法，和解运动压头的問題时所采用的方法十分相近．

如果压头压在彈性半平面上，并且存在有服从于庫倫定律的摩擦力，那末我們就自然地假設：接触面被分为几个截段，在切向力不足以使彈性体相对于压头产生移动的地方，兩物体間將發生剛性的連結．显然，τ_{ns} 与 σ_n 的最大比值不能大于摩擦系数 ρ．在这个比值达到等于 ρ 值的那些截段上，压头会發生相对于彈性体的滑动，并且在不同的截段上，滑动的方向可能也不同．这种类型的对于平底压头而言的一个問題，是作者予以近似解决的[3]．这个解也引录在本書中．在 С. В. 法尔柯維奇 (Фалькович)[1] 的論文中，采用了某些其他的假設，就是在某一些截段上，假設摩擦力不存在，而在另一些截段上，假設压头与彈性体是剛性地連在一起．

在此所談到的問題，曾經假設过：压头与彈性体之間作用着干摩擦力．这样一来，法向应力与切向应力之間的关系服从于庫倫定律．然而，在机械制造中要遇到的一些問題，其中相接触的物体往往隔着

一層油膜．如果假設相接触的物体都是絕对剛性的，那末作用在接触体上的压力，就可以借流体动力学中油膜理論的一般方法来予以确定．物体彈性变形的能力是很重要的，在油膜中發生压力較大的地方，就会得到显著的变形，而在兩物体之間的油膜，一般地說，要变得比从物体是絕对剛性的这一假設出發所得到的油膜厚一些．因此，接触物体的彈性会使压力变得均匀些．这样，当兩彈性体之間有油膜存在时，必需同时解决彈性理論和流体动力学中油膜理論的問題．

在 A. И. 彼得罗謝維奇 (Петрусевич)[1]的論文中，研究了流体动力学中彈性体的油膜理論問題，其中近似地解决了这一类的某些問題．

4. 关于兩个彈性体相接触的問題　在上面几节所提到的論文中，我們曾假設：其中有一个物体是絕对剛性的，按照常用的术語，它被称为压头．实际上，由于在相接触的物体中，每一个都是彈性的，所以这一假設就有着某种限制．然而，存在着这样的問題；就是其中有一个物体的彈性可以忽略不計．当一个物体的彈性模数比另一个物体的彈性模数大很多时就是这种情形．例如，关于基础在土壤上的压力問題，由于基础的彈性常数比土壤的大很多，因此可以把基础当作是絕对剛性的物体．

然而当其中有一个物体为絕对剛体时，其所得到的結果并不仅限于解决这一类的問題．事实上，当兩个接触的物体是彈性体的时候，基于絕对剛体在彈性体上压力問題的解，可以很容易地获得其接触問題的解，所得到的解的形式是一样的，其不同之处仅在于某些常数的值．

这样一来，在知道关于压头在彈性体上压力問題的解以后，就可以求出較为一般的問題；就是当物体在具有不同的彈性常数时的問題．

关于彈性体相接触的問題，H. 赫尔兹 (Hertz)[3] 曾經研究过．此时，在描述彈性体边界的方程中，除了首項以外，所有其余的項都被略去了．因此，問題就化为兩个橢圓拋物体相接触的問題．当兩

个抛物柱体相接触，且它們的軸是平行的时候，在个别的場合中，可以求出其平面問題的解．这些結果，被当作是最初研究过的彈性理論的接触問題．当利用橢圓盤的勢的表示式时，就能用湊合法来获得上述問題的解．H. 赫尔兹研究过接触体都是彈性体时的情形．后来在 A. H. 金尼克 (Динник)[1] 的論文中，也討論了关于彈性体相接触的問題．許多闡明彈性体相接触的研究工作是 H. И. 别辽也夫 (Беляев) 完成的[1-4]．他确定了在彈性体内發生最大应力的点的位置．在这些論文中，曾經假設彈性体之間無摩擦力存在．不过，在所有上面提到的論文中，原来是研究空間接触問題的，而平面問題是作为一般解的特殊情形来得到的．关于所有上面提到的論文，在緒論的 § 2 中要更詳細地談到．

И. Я. 斯塔耶尔曼[2] 研究了关于兩个半徑相近的圓柱体的接触問題．此时，其中一个彈性体的接触面是柱体的外面，而另一个則是柱体的內面，这个問題 И. Я. 斯塔耶尔曼曾研究过兩次．第二次与前一次有些不同，在他的“彈性理論的接触問題”一書中陈述了这个解法．在此，問題就化为一个积分方程，这个积分方程和在有限長机翼問題中要遇到的相类似．

关于兩个彈性体相接触的問題，当它們的彈性常数相同时，就变得比較簡單，此时可以給出这些問題的解来．而这些問題在别一种提法时，要想解决可能就有很大的困难．例如：当接触面被分为具有摩擦力的截段和連結的截段时的接触問題，以及关于兩个半徑相近的圓柱体相接触的問題．

H. 佛罗門 (Fromm)[1] 研究了关于彈性圓柱体沿彈性半平面滚动的問題．在这里，他曾假設兩个物体的彈性常数是相同的，并且接触面被分成为兩个截段；一个截段上有摩擦力發生，而另一个截段上則發生連結．若采用某些假定，这个問題的解使得我們可以將滚动摩擦系数归結到滑动摩擦来予以确定．H. И. 格拉哥烈夫[3] 研究了关于彈性体滚动时的問題，并且他在解决問題时所采用的方法要比 H. 佛罗門論文中的方法完善些．H. И. 格拉哥烈夫在兩篇論文中研究了这个問題，其时接触面被分成为一些截段，对于这些截段分布的

特征作了各种不同的假設. 应該注意到:为接触面所分成的截段,其边点是未知的,而且这是解的主要困难之一.

关于兩个半徑相近的柱体的接触問題,是由 M. З. 拉洛杰茨基(Народецкий)[1] 解决的,其时兩个柱体具有相同的彈性常数. 在此假設了:产生压力的外力是作用在一个柱体的中心上. 接触面的大小和分布在接触面上的压力都被确定了. 这个問題的解是十分簡單的,比起类似的問題,即当內面的柱体是一个絕对剛体时的情形要簡單得多.

关于空間接触問題这方面工作的概述

与平面問題相比較,解空間接触問題有着很大的困难,不过这种情形对于所有彈性理論的空間問題都是如此的. 此时,起始的前提如下:假設彈性体中有一个是占有半空間,另外的一个絕对剛体或彈性体在这一物体上产生压力. 在后一种情形,假設它也可以用半空間来替代. 通常我們还假定:在彈性体之間不存在摩擦力. 当物体間有摩擦力存在,或是剛性連結的情形时,则仅仅对于某些問題来說,才能求出空間軸对称接触問題的解. 关于这些,在以后將要談到.

如果引用假設:接触体之間摩擦力不存在,那末,上述的問題就化为某个勢論的空間問題,此时,我們需要求得一个調和函数,它在無穷远点为零;在具有接触面形狀的平面区域上,它的数值是給定的. 应該指出:为了研究接触問題,可能用到了勢論中早已被求出过的一些解,它們是被人們遺忘掉了,而后又重新地求出来,然其形式往往是很不完整的. 在許多場合中若选用适当的坐标,我們就能够得到空間接触問題的解. 选取的方式应該是滿足拉普拉斯方程的函数,在变到这个坐标系时,可表为三个函数乘积的形式,并且其中的每一个函数只与一个变数有关. 此外,这时有一个坐标面应該退化为一个双面的平面区域,它的外形与接触面的形狀相同. 显然,这种条件大大地限制了能够求出有效解的問題的范圍,而它們本来是可能被求出有效解的.

闡明空間接触問題的首批工作，是屬于 H. 赫尔兹[3] 和 J. 布希涅斯克(Boussinesque)[1] 的。当时，H. 赫尔兹研究了兩个彈性体相接触的情形，而彈性体是由二次曲面圍成的（椭圓柱体和椭圓抛物体）. 为了解这个問題，有可能采用靜电似法，而且用来确定發生在接触面上的压力的調和函数，乃是某个椭球体的勢. 此时还确定了接触面是椭圓的形狀.

J. 布希涅斯克[1] 研究了具有圓底面的絕对剛体（压头）在彈性半空間上的压力問題.

在空間接触問題的領域里，許多結果是苏維埃学者得到的. 在 A. H. 金尼克[1] 和 H. И. 别辽也夫[1-3] 的著作中，研討了一系列的問題. 在此，H. И. 别辽也夫对發生在彈性体中的应力作了詳細的分析，确定了切向应力达到極大值的点的位置，同时还求出了这个極大值。后来，H. И. 别辽也夫把解决彈性理論空間接触問題的方法用来計算鋼軌中的应力[3].

在空間接触問題的領域中，很長一段时期沒有显著的进展. 在首批解决新問題的論文中，有一篇是屬于 B. M. 阿布拉莫夫的[2]. 他給出了关于平底斜圓柱体在彈性半空間上的压力問題的解. 压力分布的公式很簡單，然而他是用十分复杂的方法得到的，这是由于采用了一个特殊的积分方程. 后来証明，可以用較为簡單而自然的方法，得到这个結果，以及某些类似的結果. H. 波罗維加(Borowicka)[1] 在很久以后才研究了 B. M. 阿布拉莫夫所解决的問題，并得到了类似的結果.

И. Я. 斯塔耶尔曼[1] 給出了接触問題的解. 其时，接触物体中有一个是高于二次的抛物体. 在 H. 赫尔兹所發展的理論中，曾假設包圍接触体的曲面的曲率半徑比接触面的尺寸大. 因此，在这些曲面的方程中只保留首項，而問題就化为兩个由二次曲面圍成的物体相接触，也就是椭圓抛物体或椭圓柱体. 不过，对于比較光滑的物体来說，这些推理是合适的，但当物体的界面不够光滑时，其曲率半徑可能与接触面的尺寸同級. 因此，关于曲面方程这一原始的近似假設就不成立. 此外，不应該忘記：除了接触面很小的这类問題，有时

还要处理接触面是足够大的問題，从而，接触体界面形狀的表示式就应該取得更为准确些。由于在类似于上述的問題中，比起彈性体接触的一般理論来說，研究了更为相近的情形，所以对这些問題就感到兴趣。当接触面是一个圓或橢圓时，A. И. 魯利耶（Лурье）[1] 在論文中給出了这种接触問題的解。他研究了有一个接触体是任意拋物体的情形（包括非整冪次的情形）。在此，特别是得到了关于剛性錐体在彈性半空間上压力問題的解。在这以前不久，A. 洛夫（Love）[1] 也用其他的方法求得了这个結果。至于接触面是一个橢圓的問題，則 A. И. 魯利耶在同一篇論文中研究了具有平底的橢圓柱在彈性半空間上的压力。并且还研究了：橢圓柱体底面的方程是一个在直角坐标系中的二次多項式的情形。由后一問題的解就不难得到 H. 赫尔兹的結果，而这些結果上面已提到过，并且实际上是用凑合法来求得的。根据拉梅函数的某些性質，可以用比較自然的方法来求它們。

在 И. Я. 斯塔耶尔曼的兩篇論文中[4–5]，还研究了接触面是橢圓时的情形。其中的一篇是利用拉梅函数来确定發生在兩物体之間的应力，而在另一篇論文中，研究了比接触問題的一般理論作了更其切合实际的假設的問題。

在 M. Я. 烈諾夫（Леонов）[1] 的論文中，給出了軸对称空間接触問題的解。这个解比起上面提到的 И. Я. 斯塔耶尔曼和 A. И. 魯利耶的結果要普遍些。在这种場合，有一个接触体是任意旋轉体，問題被化为一个积分方程的二重解，而發生在压头下面的压力，其表示式最后变为求积。最近發表了 J. W. 哈定（Harding）和 J. N. 史烈东（sneddon）[1] 的論文，所得到的結果就其实質来說，与上述 M. Я. 烈諾夫的結果是一样的。

在 M. Я. 烈諾夫的另一篇論文中[3]，研究了圓板在彈性半空間上的弯曲，并且作用在板上的压力是軸对称的。M. Я. 烈諾夫將这个問題化为第一类型的弗雷德霍尔蒙积分方程。

在 E. 萊斯烈尔（Reissner）和 H. 沙果西（Sagocci）[1] 的論文中，給出了一个空間軸对称問題的解；这时，与彈性半空間剛性連結的压头圍繞着对称軸在轉动。