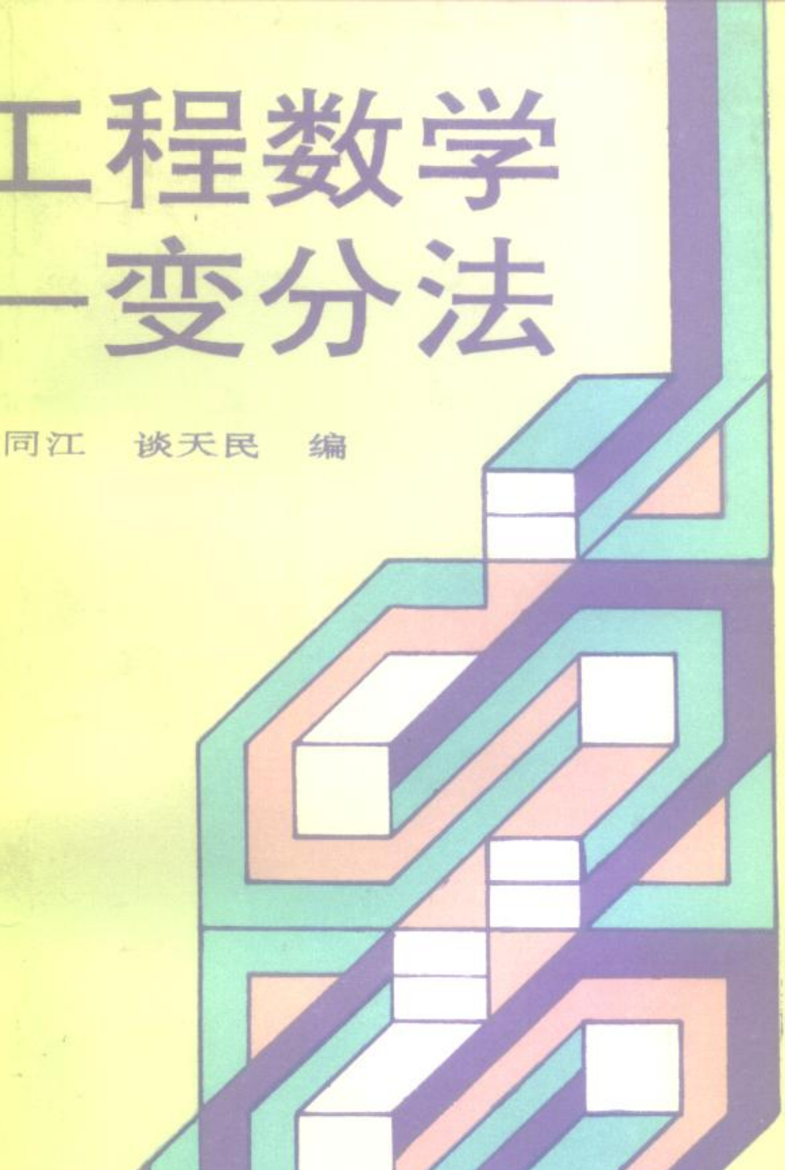
工程数学
—变分法

祝同江　谈天民　编



北京理工大学出版社

工程数学——变分法

祝同江　谈天民　编

北京理工大学出版社

(京)新登字 149 号

内容简介

本书主要介绍了古典的变分原理，以及它在分析力学和解微分方程方面的应用，并且简单介绍与近代有限元有关的变分原理和微分方程边值问题的有限元解法.

为便于学生自学，本书除对有关概念、定理、公式进行了比较详细的论述外，针对学生在学习中经常遇到的疑难问题进行了讨论，且附有大量的例题以供读者参考.

本书可作为工科大学本科生和硕士研究生的教材或参考书，也可供具有高等数学基础知识的有关读者自学用.

787×1092 毫米　32 开本　11.375 印张　251 千字
1994 年 11 月第一版　1994 年 11 月第一次印刷
ISBN 7 - 81013 - 953 - 3/O · 101
印数：1－2500 册　　定价：8.00 元

前言

工程技术和自然科学的研究中经常遇到这样一种取实数值的变量，它的值可随着某个函数类中函数的不同选取而变化，这种变量是以某个函数类中的函数为自变量的抽象函数——泛函．泛函的极值问题是变分法所研究的基本问题．

随着科学技术的发展，变分法在力学、物理学、信息论、自动控制论等方面都有越来越多的应用．如分析力学中的虚功原理、最小位能原理、哈密顿(Hamilton)原理，以及控制论中的最优控制问题都涉及到变分法的有关概念和理论．本书主要介绍古典的变分原理，以及它在分析力学和解微分方程方面的应用，并且简单介绍与近代有限元有关的变分原理和微分方程边值问题的有限元解法．

考虑到教育改革发展的需要，为了便于学生自学起见，本书除对有关概念、定理、公式进行了比较详细的论述外，还针对学生在学习中经常遇到的疑难问题进行了讨论，且附有大量的例题以供读者参考，具体说明如下：

1．考虑到学习变分法的许多读者对多元函数的台劳公式，参变量积分号下求导等基础知识不太熟悉，为了使本书自成体系，本书增加了第一章预备知识，其中前三节只供学生课外阅读．

2．为了便于读者自学，第二、三章详细叙述了用积分表示的各类泛函变分的定义、取极值的必要条件，其中§2－2节可作为学生课外阅读材料处理．在§2－1节中，对两种变

分的定义进行了比较，并举例说明其差别，以便读者对泛函变分的概念有更深入的理解.

3. 考虑到许多读者对虚功原理、最小位能原理、哈密顿原理的力学背景不太了解，本书在§4—3节中对此进行了系统的论述，可供读者课外阅读.

4. 第四章中，对短程线问题的有关定理给出了新的证明，以便读者对等周问题与短程线问题的关系有更深入的理解.

5. 为了避免过多地涉及线性算子的有关理论，本书用较少的篇幅对二次泛函的变分原理给出了新的证明. 另外，在第五章，对最简泛函取各类极值的条件进行了更深入细致的讨论，且补充了几个定理，以便读者判别时使用.

6. 在实际应用中，变分问题近似解函数列的收敛性，逼近度的估计是必须考虑的问题，本书第六章对这些问题进行了讨论，并验证了所选某些函数坐标系的完备性. 这些补充内容可作为学生课外阅读材料处理，以便学生对变分问题的近似解法有比较系统的认识.

7. 鉴于有限元应用的逐渐推广，本书在§6—4节中较系统地叙述了用有限元法解微分方程边值问题的基本思想，并补充介绍了拉格朗日型和Hermite型高次插值函数的构造，以及插值函数的逼近度定理. 这些内容可作为学生的课外阅读材料，或供有关专业选用.

本书是北京理工大学谈天民教授与祝同江副教授经过多次讨论后写成的，谈教授对硕士研究生讲授“变分法”课多年，对教学有许多丰富的经验，本书许多内容就是在多年使用的讲稿基础上编写的，增加了预备知识的叙述和其它一些内容，如两种变分定义的比较，虚功原理的力学背景等，可供学生自

学.本书可用作工科大学本科生和硕士研究生学习《变分法》这门课的教材或参考书,也可供具有高等数学基础知识的有关读者自学使用.

由于编者水平所限,本书难免存在某些错误或不妥之处,衷心希望广大读者批评指正.

编　者

1990年4月

目　　录

第一章　预备知识

本章主要介绍变分法的基本概念——泛函和泛函的极值.并给出今后经常用到的几个基本引理,以及有些读者还不熟悉的基础知识.例如,多元函数的台劳(Taylor)公式、含参变量积分的求导公式等.

§1—1　台劳公式和函数取极值的必要条件

一、一元函数的情形

定理1　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 内具有 $n+1$ 阶连续导数,则对该邻域内任意一点 $x=x_0+\Delta x$,存在 $\theta(0<\theta<1)$ 使下面 n 阶台劳公式成立

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n \tag{1-1-1}$$

其中　$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)(x-x_0)^{n+1}$$

称为 $f(x)$ 在点 x_0 的 n 阶台劳余项(lagrange 型).当 $x\to x_0$ 时,R_n 是比 $|\Delta x|^n$ 更高阶的无穷小量.

定理2　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导.若 $f(x)$ 在点 x_0 取极值,则有 $f'(x_0)=0$.

二、多元函数的情形

定理 3 如果函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内所有 $n+1$ 阶偏导数都连续，那么对于该邻域内任意一点 $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，总存在 $\theta(0<\theta<1)$ 使下面 n 阶台劳公式成立

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+R_n \tag{1-1-2}$$

其中 $\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)$

$$=\left[\Delta x^k\frac{\partial^k f}{\partial x^k}+C_k^1\Delta x^{k-1}\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1}\partial y}\Delta y+\cdots+C_k^k\frac{\partial^k f}{\partial y^k}\Delta y^k\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$$

称 R_n 为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的 n 阶台劳余项——Lagrange 型余项.

$$令\ \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},\Delta x=\rho\cos\alpha,\Delta y=\rho\sin\alpha$$

当 $f(x,y)$ 的所有 $n+1$ 阶偏导数在点 (x_0,y_0) 的闭邻域 $x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h$，$y_0-k\leqslant y\leqslant y_0+k$ 上都连续时，也一定有界，可设它们在该闭邻域的绝对值都不小于正数 M. 于是对该邻域上任意一点 $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 有

$$|R_n|<\frac{M}{(n+1)!}(|\Delta x|+|\Delta y|)^{n+1}$$

$$= \frac{M}{(n+1)!}(|\cos\alpha| + |\sin\alpha|)^{n+1}\rho^{n+1} \leqslant 2M\rho^{n+1}$$

其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

这表明，当 $\rho \to 0$ 时，R_n 是比 ρ^n 更高阶的无穷小量.

上述定理推广到 n 元函数的情形，有

如果函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 的某个邻域内的所有 $m+1$ 阶偏导数都连续，那么对该邻域内任意一点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，存在 $\theta(0<\theta<1)$ 使下面 m 阶台劳公式成立

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&= f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) + \frac{1}{1!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \\
&\quad \cdot f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) + \frac{1}{2!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 \\
&\quad \cdot f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) + R_m
\end{aligned} \tag{1-1-3}$$

其中 $\Delta x_k = x_k - x_k^0 (k = 1, 2, \cdots, n)$

$$\begin{aligned}
R_m = &\frac{1}{(m+1)!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1} \\
&\cdot f(x_1^0 + \theta\Delta x_1, x_2^0 + \theta\Delta x_2, \cdots, x_n^0 + \theta\Delta x_n)
\end{aligned}$$

当 $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \cdots + \Delta x_n^2} \to 0$ 时，R_m 是比 ρ^m 更高阶无穷小量.

定理 4 设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内连续，

且在点(x_0,y_0)偏导数f_x、f_y都存在.若$f(x,y)$在点(x_0,y_0)取极值,则有

$$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$$

定理4推广到n元函数的情形,有

设函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在点$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$的某个邻域内连续,且在该点处它的所有一阶偏导数都存在.若n元函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在该点处取极值,则有

$$f_{x_k}(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=0,(k=1,2,\cdots,n)$$

以上四个定理的证明在一般高等数学教材中都容易找到,其证明方法也不难推广到n元函数的情形,故从略.

§1—2 含参变量的积分

从二重积分的计算可知,当函数$f(x,y)$在闭矩形$D:a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$上连续时,函数

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \qquad (1-2-1)$$

是区间$[c,d]$上的连续函数,并且有

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \quad (1-2-2)$$

在式(1-2-1)中,x是积分变量,y是参变量(积分过程中看作常量),称右端的积分为含参变量的积分.下面进一步讨论这种积分的性质.

定理1 如果函数$f(x,y)$和它的偏导数$f_y(x,y)$在闭矩形$D:a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$上连续,则函数

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

在区间$[c,d]$上可微，且有

$$\varphi'(y)=\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x \qquad (1-2-3)$$

证 设 $$g(y)=\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x$$

因函数 $f_y(x,y)$在 D 上连续，故它在 D 上的二重积分可以交换积分次序. 从而对区间$[c,d]$上的任意 y 有

$$\begin{aligned}\int_c^y g(y)\mathrm{d}y &= \int_c^y\Big[\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y\\ &= \int_a^b\Big[\int_c^y f_y(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b[f(x,y)-f(x,c)]\mathrm{d}x\\ &= \varphi(y)-\varphi(c)\end{aligned}$$

由于 $g(y)$在$[c,d]$上连续，因此对上式两端求导，有

$$\varphi'(y)=g(y)=\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x$$

这就证明了定理 1.

定理 2 如果函数 $f(x,y)$在闭矩形 $D{:}a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$ 上连续，且 $f_y(x,y)$在 D 上连续；又函数 $\alpha(y),\beta(y)$在区间$[c,d]$上可微，且当 $y\in[c,d]$时，有

$$a\leqslant\alpha(y)\leqslant b\quad,\quad a\leqslant\beta(y)\leqslant b$$

那么函数 $$\psi(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$$

在区间(c,d)内可微，且有

$$\begin{aligned}\psi'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f_y(x,y)\mathrm{d}x+f[\beta(y),y]\beta'(y)\\ -f[\alpha(y),y]\alpha'(y)\end{aligned} \qquad (1-2-4)$$

证 设 y_0 是区间(c,d)内任一定点，$\alpha(y)=u,\beta(y)=v$，则函数 $\psi(y)$可表示为

$$\psi(y)=I(y,u,v)=\int_{\alpha(y_0)}^{v}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_{\alpha(y_0)}^{u}f(x,y)\mathrm{d}x$$

利用复合函数求导公式

$$\varphi'(y)=\frac{\partial I}{\partial y}+\frac{\partial I}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+\frac{\partial I}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \qquad (*)$$

由定理 1
$$\frac{\partial I}{\partial y}=\int_{\alpha(y_0)}^{v}f_y(x,y)\mathrm{d}x-\int_{\alpha(y_0)}^{u}f_y(x,y)\mathrm{d}x=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f_y(x,y)\mathrm{d}x$$

利用对积分上限的求导公式得

$$\frac{\partial I}{\partial u}=\frac{-\partial}{\partial u}\int_{\alpha(y_0)}^{u}f(x,y)\mathrm{d}x=-f(u,y)$$

$$\frac{\partial I}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\int_{\alpha(y_0)}^{v}f(x,y)\mathrm{d}x=f(v,y)$$

代入式$(*)$，可知等式(1-2-4)成立.

定理 3 若函数 $f(x,y,\alpha)$和它的偏导数 f_α 当$(x,y)\in D,\alpha\in(-\delta,\delta)$时连续，则函数

$$\Phi(\alpha)=\iint\limits_D f(x,y,\alpha)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在区间$(-\delta,\delta)$内可微，且有

$$\Phi'(\alpha)=\iint\limits_D f_\alpha(x,y,\alpha)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 是与 α 无关的有界闭区域，δ 是正常数.

证 设 $\varphi(\alpha)=\iint\limits_D f_\alpha(x,y,\alpha)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则函数 $\varphi(\alpha)$在区间$(-\delta,\delta)$内连续. 且有

$$\int_0^a \varphi(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_0^a \mathrm{d}\alpha \iint_D f_\alpha(x,y,\alpha)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于被积函数连续，因此可以交换积分次序. 从而有

$$\begin{aligned}\int_0^a \varphi(\alpha)\mathrm{d}\alpha &= \iint_D \left[\int_0^a f_\alpha(x,y,\alpha)\mathrm{d}\alpha\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D [f(x,y,\alpha) - f(x,y,0)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \Phi(\alpha) - \Phi(0)\end{aligned}$$

两边对 α 求导得要证等式

$$\varphi(\alpha) = \Phi'(\alpha) = \iint_D f_\alpha(x,y,\alpha)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

§1－3 基本引理

今后将经常用到下面几个引理：

引理 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续；函数 $\eta(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 n 阶连续的导数，且对某个正数 $m(m=0,1,\cdots,n)$ 满足条件

$$\eta^{(k)}(a) = \eta^{(k)}(b) = 0 \quad (k = 0,1,2,\cdots,m)$$

若对于任一个这样的函数 $\eta(x)$ 总有

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad (1-3-1)$$

则在 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)=0$.

证 用反证法. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内不恒为零，则由 $f(x)$ 的连续性，一定在 (a,b) 内存在点 x_0 和它的某个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，使 $f(x)$ 在该邻域恒不为零.

另外，这时又可取函数 $\eta(x)$ 为

$$\eta(x)=\begin{cases}[(x-x_0)^2-\delta^2]^{2n+2}, & x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

显然所取 $\eta(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 n 阶连续偏导数，满足条件 $\eta^{(k)}(a)\eta^{(k)}(b)=0(k=0,1,2,\cdots,m)$，可是当 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内大于零（小于零）时该 $\eta(x)$ 使

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\eta(x)\mathrm{d}x>0(<0)$$

这与条件(1-3-1)矛盾，于是 $f(x)$ 在 (a,b) 内恒为零. 又因 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，故有 $f(a)=f(b)=0$. 这就证明了该引理.

注意：m 或 n 增大时，所取 $\eta(x)$ 的函数类变小，该引理条件变弱. 于是取 $m=n=0$ 可得：

引理 2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续. 若对每个在 $[a,b]$ 上的连续函数 $\eta(x)$，只要满足条件 $\eta(a)=\eta(b)=0$，总使

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\mathrm{d}x=0$$

则在区间 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)=0$.

上述两个引理可以推广到二元函数的情形. 事实上，只要取函数 $\eta(x,y)$ 为

$$\eta(x,y)=\begin{cases}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-\delta^2]^{2n+2}, & (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$ 为在区域 D 内的点 (x_0,y_0) 的某个邻域. 同理可证下列引理.

引理 3 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，Γ 为 D 的边界. 若每一个在 D 上连续且满足条件 $\eta|_\Gamma=0$ 的函数 $\eta(x,y)$ 总使积分