黄用宾 冯懿治 裘子秀 编著

摄动法简明教程

SHE DONG FA JIAN MIN JIAO CHENG

上海交通大学出版社

摄动法简明教程

黄用宾　冯懿治　裘子秀

上海交通大学出版社

内容简介

摄动法是现代应用数学的一个重要分支。本书主要介绍摄动法及其在力学中的应用。

全书分六章：第一章介绍摄动法的基本概念及准备知识；第二章阐述正则摄动法及其适用范围；第三、四、五章阐述几种常用的奇异摄动法(变形坐标法、渐近展开匹配法和多重尺度法)；第六章介绍用奇异摄动法求解某些力学问题的实例。各章均配有一定数量的例题，便于读者掌握和运用摄动法的基本思想和主要技巧。

本书可供高等院校高年级学生、研究生和教师以及有关科技工作者和工程技术人员参考。

摄动法简明教程

上海交通大学出版社出版
(淮海中路1984弄19号)
新华书店上海发行所发行
江苏常熟文化印刷厂印装

开本：787×1092毫米 1/32 印张：8.875 字数：196,000
1986年8月第1版 1986年11月第1次印刷
印数：1—1,900册
统一书号：15324·164 科技书目：131—279

定价：1.60元

前　言

科学工作者和工程技术人员常遇到的不少问题往往可归结为求解非线性变系数微分方程（有时甚至其边界条件也是非线性的）的问题。在力学中这类问题更是屡见不鲜。对于这样的问题，一般无法求得精确的解析解。目前，解决这类问题的主要方法有两种：一是运用电子计算机的数值解法；二是以摄动法为代表的求解析的近似解法。

摄动法起源于天体力学，从 Lindstedt-Poincaré 的工作到现在已有近百年的历史。这种求解析的近似解法，其基本思想是，如果某个定解问题难以求解，但另一个与它相差不多的定解问题可以严格地解得，于是就可藉助后者寻求前者的解析的近似解。

由于应用摄动法所得的结果往往是简单而有效的，故摄动方法已逐渐成为应用数学中的一个重要方法，在天体力学、流体力学、固体力学、量子力学、光学、声学、化学、生物学以及控制论、最优化和数学的基本理论研究方面都有着广泛的应用。目前，摄动法越来越受到国际学术界的重视，并成为研究的重要课题之一。

我国力学界在摄动法的研究方面有着开创性的

贡献.如早在1948年,钱伟长就用现在称为的合成展开法(钱伟长法)成功地解决了圆薄板的大挠度问题;郭永怀的PLK方法、丁汝的改进型摄动法和林家翘的解析特征线法等也都载入了摄动法研究史册。此外,叶开源、胡海昌、潘立宙、江福汝、苏煜城等著名应用数学和力学家的有关工作在国内外也都有很大的影响。

自1979年以及1983年两次全国摄动法学术会议以来,摄动法研究在我国已取得了很大进展。在这种形势下,开设摄动法课程的理工科高等院校越来越多,然而目前有关摄动法的中文版本的书籍还不多见,适宜教学用的书更少,因此我们感到编写这样一本摄动法的入门教程,藉此推广钱伟长等著名科学家所致力于研究的摄动法是很有必要的。

本教程在编写过程中,得到陈之航教授的鼓励与指教,以及华泽钊、朱月锐等同志的支持与帮助,在此谨向他们表示衷心感谢。

由于编者水平有限,本教程中存在错误和不当之处在所难免,祈求读者不吝赐正。

编　者

1984年8月

目　录

第一章 摄动法的基本概念

本书主要介绍摄动法及其在力学中的应用。摄动法具有相当的普遍性，它的基本思想和原理也可用于代数方程、积分方程、积分微分方程和差分方程等。

本章第一节对摄动法作一概要论述，第二节至第五节涉及了摄动法的基本思想和原理。

§1·1 引 言

摄动，本来是个天文学名词，是指一般的小扰动或影响某一现象的微小因素。在量子力学中把它叫做微扰（摄动和微扰在英文里是同一个词 Perturbation，在俄文里也是同一个词 Возтущение）。在应用数学中，一般称为“摄动”。

在天文学中，“摄动”通常指天体在某一引力场中的周期运动轨道受到其他天体影响所产生的小扰动。例如，在发现冥王星之前，天文学家在观测、分析海王星的轨道时，发现它还受到一个未知天体的摄动，并精确推算了该未知天体的轨道、周期，后来果然发现了冥王星。

十九世纪末期，天文学家 Lindstedt 等人通过研究行星轨道的摄动问题创立了摄动理论(Perturbation theory)。当时，遇到一类含小参数的非线性微分方程，无法求它的解，于是 Lindstedt 等人就尝试将它的解用小参数 ε 的幂级数来表示。虽然这些级数解常是发散的，但由于能正确地描写和解

释各种天体现象，也就被广泛采用。但人们怀疑，为什么这种发散的级数也会给出正确的结论？直到1892年，伟大的数学家兼力学家Poincaré才在他的著名著作《天体力学的新方法》(New Methods of Celestial Mechanics)中解决了这个问题。他用严格的数学方法证明了这些级数虽然是发散的，但却是一种"渐近级数"。即虽然它的部分和当$n\to\infty$时不趋于有限值，但它的前几项之和当$|\varepsilon|$充分小时，可任意接近原问题的解，因此能够精确地表达自然现象。

建立了严格的数学理论后，摄动法方被自然科学家们承认，并广泛应用到自然科学的各领域中去。五十年代后期发展更为迅速，天文学家用它来研究天体现象，力学家们应用它来研究力学现象(如流体、固体和等离子体等中的力学问题)，物理学家应用它来研究物理现象(如光、声、电磁等中的波动问题)。近年来，还被用来研究化学(如化学反应动力学)、生物学(如生物振荡)以及控制论(如最优控制)中的许多问题。

力学问题、物理问题和其他工程问题一样，我们经常会遇到含有小参数ε的问题P_ε。最常见的是微分方程的定解问题。小参数ε可以包含在方程中，也可包括在边界条件中。通常称这一类含有小参数的数学问题P_ε为摄动问题。摄动理论是研究这类问题的解法(渐近展开法)、解的性质及其与相应的退化问题P_0的关系，考察P_ε的解能否通过对P_0的解加以校正得到。

设摄动问题是一类含小参数的微分方程的定解问题

$$P_\varepsilon:\begin{cases} L(u,x,\varepsilon)=0, \\ B(u,\varepsilon)=0, \end{cases}$$

其中，$0<\varepsilon\ll 1$。

对于上述摄动问题，可以根据渐近展开式的形式和$\varepsilon\to 0$

时的收敛性，将摄动问题区分成正则摄动问题和奇异摄动问题。

若摄动问题 $P_\varepsilon(x)$ 的解 $u_\varepsilon(x)$ 能够用一个 ε 的幂级数表示：

$$u_\varepsilon(x)\sim u_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n u_n(x),$$

并且在区域 Ω 中一致有效，则称 $P_\varepsilon(x)$ 是区域 Ω 中的正则摄动问题。否则称为奇异摄动问题。

用于解正则摄动问题的方法，称为正则摄动法，或称为直接展开法。

奇异摄动法是用于研究正则摄动法失效时的一类摄动问题的。由于失效的原因很多，或因出现长期项(secular term)而失效，或因展开式在某部分边界不满足边界条件而失效，或因方程具有转向点而失效等，因此研究的方法也极多。本书中只准备叙述前两种类型的问题：长期项问题和边界层项问题。介绍变形坐标法、匹配法、合成法和多重尺度法，并概述用这些方法求解上述两类问题的基本思想以及它们的产生和发展。

在自然界中存在着大量的奇异摄动问题，当时只是由于受科学水平的限制，其中包括数学方法的限制，不得不作某些假设，将问题简化，而局限于研究正则摄动问题。例如考察在弹簧上附有一个质量的摄动系统，弹性恢复力和阻尼一般都是非线性的，这将导致出现难于求解的非线性常微分方程。为了避免数学上的困难，才作了某些假设，将它简化成容易求解的线性常微分方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2c\,\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0$$

但这种简化，将失去很多重要的力学性质，例如振动周期对振

幅的依赖性等。

在力学中，非线性的问题很多，变系数的微分方程也很多，还有不少是无限域的问题以及微分方程最高阶导数项以小参数为其系数的问题。在固体力学中，正如钱伟长所指出的，有：

1．板的大挠度理论；

2．环、壳的弹性平衡问题；

3．圣维南假设的有关问题，如约束扭转问题和薄壁杆件问题；

4．壳上有筋的平衡问题；

5．壳的非线性问题，包括稳定和振动问题；

6．非线性弹性波的问题；

7．应力集中问题；

8．许多塑性力学问题。

所有这些，都是摄动法的工作园地。

钱伟长还指出，在力学中使用奇异摄动理论，正方兴未艾。在理论力学的许多新问题中，将普遍使用奇异摄动理论。奇异摄动理论的方法发展很快，但目前仍处于应用数学的发展阶段，还有不少理论性的基本问题尚待研究。

§1·2 参数摄动和坐标摄动

采用摄动方法总是要依靠一个无量纲的参数，它一般是小参数，也可以是大参数。这个参数有时出现在微分方程内；有时则出现在边界条件(或初始条件)内；有时甚至同时出现在方程和边界条件内。根据渐近展开的经验，只要参数适当的小，或适当的大，其解一般只要取少数几项就足够精确了

(通常只要取一至二项)。这种根据参数展开的摄动法，称为参数摄动法。若渐近展开是根据坐标为摄动量来进行的，则称为坐标摄动法。

我们先来讨论参数摄动法。

[**例 1**] 设含有小参数 ε 的代数方程

$$u=1+\varepsilon u^{3} \tag{1·2·1}$$

显然，当 $\varepsilon=0$ 时，$u=1$；当 $0<|\varepsilon|\ll 1$ 时，若设

$$u=1+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\varepsilon^3 u_3+\cdots, \tag{1·2·2}$$

(1·2·1)式则可改写为

$$\begin{aligned}&1+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\varepsilon^3 u_3+\cdots\\&=1+\varepsilon(1+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\varepsilon^3 u_3+\cdots)^3,\end{aligned} \tag{1·2·3}$$

将等式右边展开，等式左边写出 ε^3 项以前的各项得

$$1+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\varepsilon^3 u_3\approx 1+\varepsilon(1+3\varepsilon u_1+3\varepsilon^2 u_2+3\varepsilon^2 u_1),$$

即

$$\begin{aligned}&\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\varepsilon^3 u_3\\&\approx\varepsilon+3\varepsilon^2 u_1+3\varepsilon^3(u_2+u_1^2),\end{aligned} \tag{1·2·4}$$

合并 ε 的同一幂次项的系数，得

$$\varepsilon(u_1-1)+\varepsilon^2(u_2-3u_1)+\varepsilon^3(u_3-3u_2-3u_1^2)\approx 0 \tag{1·2·5}$$

由于上式中对所有可以取的 ε 的值均成立，故只能是 ε 的各次幂的系数为零，且由于各次幂的系数所组成的方程各自独立，也不相矛盾，因此可得

$$\varepsilon^1\text{ 级：}\ u_1-1=0, \tag{1·2·6}$$

$$\varepsilon^2\text{ 级：}\ u_2-3u_1=0, \tag{1·2·7}$$

$$\varepsilon^3\text{ 级：}\ u_3-3u_2-3u_1^2=0. \tag{1·2·8}$$

由(1·2·6)、(1·2·7)、(1·2.8)式解得

$$u_1=1,\ u_2=3,\ u_3=12, \tag{1·2·9}$$

以(1·2·9)式代入(1·2·2)式可得代数方程 (1·2·1) 式的近似

解：

$$u \approx 1 + \varepsilon + 3\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3. \qquad (1\cdot2\cdot10)$$

验证此近似解，若取 $\varepsilon = 0.01$，代入 (1·2·10) 式得 $u = 1.010312$。以此值及 $\varepsilon = 0.01$ 代入(1·2·1)式的右边得

$$1 + 0.01(1.010312)^3 = 1.010312561.$$

可知(1·2·10)式确是原方程(1·2·1)式的近似解。

［例 2］ 含有小参数 ε 的振荡方程

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = \varepsilon(1 - u^2)\frac{du}{dt}, \qquad (1\cdot2\cdot11)$$

显然，当 $\varepsilon = 0$ 时，变成

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0, \qquad (1\cdot2\cdot12)$$

上式的通解为

$$\begin{aligned} u &= A\cos t + B\sin t \\ &= \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sin t\right). \end{aligned}$$

令

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin\varphi, \quad \sqrt{A^2 + B^2} = a,$$

则

$$\begin{aligned} u &= a(\cos\varphi \cos t + \sin\varphi \cos t) \\ &= a\cos(t + \varphi), \end{aligned} \qquad (1\cdot2\cdot13)$$

其中，a、φ 为任意常数。

为了求得(1·2·11)式的近似解，可设 $u(t, \varepsilon)$ 为下列形式摄动量 ε 的展开式：

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \cdots \qquad (1\cdot2\cdot14)$$

将(1·2·14)式代入(1·2·11)式，可得

$$\left(\frac{d^2u_0}{dt^2} + \varepsilon\frac{d^2u_1}{dt^2} + \varepsilon^2\frac{d^2u_2}{dt^2} + \cdots\right) + (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots)$$

$$= \varepsilon[1-(u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\cdots)^2] \cdot\left(\frac{du_0}{dt}+\varepsilon\frac{du_1}{dt}+\varepsilon^2\frac{du_2}{dt}+\cdots\right),$$

即

$$\left(\frac{d^2u_0}{dt^2}+u_0\right)+\varepsilon\left(\frac{d^2u_1}{dt^2}+u_1\right)+\varepsilon^2\left(\frac{d^2u_2}{dt^2}+u_2\right)+\cdots = \varepsilon[1-(u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\cdots)^2] \cdot\left(\frac{du_0}{dt}+\varepsilon\frac{du_1}{dt}+\varepsilon^2\frac{du_2}{dt}+\cdots\right). \quad (1\cdot2\cdot15)$$

(1·2·15)式右端按 ε 的幂级数展开，得

$$\left(\frac{d^2u_0}{dt^2}+u_0\right)+\varepsilon\left(\frac{d^2u_1}{dt^2}+u_1\right)+\varepsilon^2\left(\frac{d^2u_2}{dt^2}+u_2\right)+\cdots = \varepsilon(1-u_0^2)\frac{du_0}{dt}+\varepsilon^2\left[(1-u_0^2)\frac{du_1}{dt}-2u_0u_1\frac{du_0}{dt}\right]+\cdots. \quad (1\cdot2\cdot16)$$

同样，由于上式中对所有可取的 ε 的值均成立，故只能是 ε 的各次幂的系数为零，且由于各次幂的系数所组成的方程各自独立，也不相矛盾，因此可由比较(1·2·16)式的 ε 的各次幂的系数得

$$\varepsilon^0: \quad \frac{d^2u_0}{dt^2}+u_0=0, \quad (1\cdot2\cdot17)$$

$$\varepsilon^1: \quad \frac{d^2u_1}{dt^2}+u_1=(1-u_0^2)\frac{du_0}{dt}, \quad (1\cdot2\cdot18)$$

$$\varepsilon^2: \quad \frac{d^2u_2}{dt^2}+u_2=(1-u_0^2)\frac{du_1}{dt}-2u_0u_1\frac{du_0}{dt}, \quad (1\cdot2\cdot19)$$

……

这样求解方程(1·2·11)就转化为求解(1·2·17)、(1·2·18)、(1·2·19)等一系列有关的方程，显然这些方程是不难求解的。

方程(1·2·17)形式上与 (1·2·12) 式一样，故通解已由(1·2·13)式给出，即

$$u_0 = a\cos(t+\varphi), \tag{1·2·20}$$

其中，a、φ 为任意常数。

将(1·2·20)式中的 u_0 代入(1·2·18)式可得

$$\begin{aligned}\frac{d^2u_1}{dt^2}+u_1 &= -[1-a^2\cos^2(t+\varphi)]a\sin(t+\varphi)\\ &= -a\sin(t+\varphi)+a^3\cos^2(t+\varphi)\sin(t+\varphi).\end{aligned} \tag{1·2·21}$$

因为

$$\cos^2\alpha\sin\alpha = (1-\sin^2\alpha)\sin\alpha = \sin\alpha-\sin^3\alpha,$$

而

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha),$$

故

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha\sin\alpha &= \sin\alpha-\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)\\ &= \frac{1}{4}(\sin\alpha+\sin 3\alpha)\end{aligned} \tag{1·2·22}$$

将(1·2·22)式代入(1·2·21)式，可得

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+u_1 = \frac{a^3-4a}{4}\sin(t+\varphi)+\frac{a^3}{4}\sin 3(t+\varphi). \tag{1·2·23}$$

用待定系数法求解此二阶非齐次线性微分方程。设

$$\begin{aligned}u_1 = {}& At\sin(t+\varphi)+Bt\cos(t+\varphi)+C\sin 3(t+\varphi)\\ &+D\cos 3(t+\varphi),\end{aligned}$$

以此代入(1·2·23)式，经化简后可得

$$-2A\sin(t+\varphi)-2B\cos(t+\varphi)-8C\sin 3(t+\varphi)$$

$$-8D\cos 3(t+\varphi)=\frac{a^3-4a}{4}\sin(t+\varphi)$$

$$+\frac{a^3}{4}\sin 3(t+\varphi),$$

比较上式等号两边有关项的系数，得

$$A=-\frac{a^3-4a}{8},\ B=0,$$

$$C=-\frac{a^3}{32},\ D=0,$$

故(1·2·23)式的解为

$$u_1=-\frac{a^3-4a}{8}t\cos(t+\varphi)-\frac{1}{32}a^3\sin 3(t+\varphi).\tag{1·2·24}$$

将所求得的 u_0 与 u_1 代入(1·2·19)式可求出 u_2。作为练习，读者可自行完成。依此类推，将所求得的 u_0、u_1、u_2、$u_3\cdots$ 代入(1·2·14)式，即为所求之近似解。

通过上述两个例子，可以清楚地看到参数摄动法的实质，即对一个含有小参数（或大参数）的问题或方程 P_ε，在 $\varepsilon=0$（或大参数 $\to\infty$）时相应的退化问题 P_0 有解，讨论 ε 作为摄动量时，对问题或方程 P_ε 的解的影响。

下面，我们再来讨论坐标摄动法。

有些力学问题、工程技术问题和复杂的自然现象可以归结为如下数学形式：

微分方程 $\qquad L(u,x)=0,\qquad$ (1·2·25)

边界条件 $\qquad B(u)=0,\qquad$ (1·2·26)

其中，$u(x)$ 是变量 x 的函数，当 $x\to x_0$（通常 x_0 被定为 0 或 ∞）时，定解问题(1·2·25)、(1·2·26)式的解 u_0 是已知的。

现在，我们考虑 x 在 x_0 附近时，u 与 u_0 的偏差，如在

$x_0=0$ 的情形，则解 $u(x)$ 可用 x 的幂级数表示；如在 $x_0=\infty$ 的情形，则 $u(x)$ 可用 x^{-1} 的幂级数表示。这种方法叫做坐标摄动法。下面举例说明。

［例 3］ 求零阶贝塞尔(Bessel)方程在 $x=0$ 附近的解。

零阶贝塞尔方程为

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+xy=0。\tag{1·2·27}$$

由于方程 (1·2·27) 在 $x=0$ 处有一个正则奇点，我们假设在 $x=0$ 处附近的解是幂级数形式。设

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{\mu+n},\tag{1·2·28}$$

其中，a_n 和 μ 均为待定系数。

将(1·2·28)式代入(1·2·27)式，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\mu+n)(\mu+n-1)a_n x^{\mu+n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(\mu+n)a_n x^{\mu+n-1}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{\mu+n+1}=0,\tag{1.2.29}$$

整理后得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\mu+n)^2 a_n x^{\mu+n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{\mu+n+1}=0,\tag{1·2·30}$$

也可改写成

$$\mu^2 a_0 x^{\mu-1}+(\mu+1)^2 a_1 x^{\mu}+\sum_{n=2}^{\infty}(\mu+n)^2 a_n x^{\mu+n-1}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{\mu+n+1}=0,\tag{1·2·31}$$

将上式第一个和式 Σ 中的 n 用 $n+2$ 代替，整理后可得

$$\mu^2 a_0 x^{\mu-1}+(\mu+1)^2 a_1 x^{\mu}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}[(\mu+n+2)^2 a_{n+2}+a_n]x^{\mu+n+1}=0。\tag{1·2·32}$$