线性系统理论与设计

〔美〕陈啟宗 著

王纪文　杜正秋　毛剑琴 译

科学出版社

1988

内 容 简 介

本书阐述了当代线性系统理论与设计中的基本内容，介绍了近年来较为成熟的多种设计方法.

全书共分九章及八个附录. 第一章为绪论. 第二章和附录中的大部分内容是阅读本书的数学基础，主要介绍线性空间理论及多项式矩阵理论. 第三章和第四章介绍系统的两种主要描述（输入-输出描述和状态变量描述）以及系统的定量分析.第五章和第八章分别阐述系统定性分析的三个基本概念——可控性、可观测性及稳定性. 第六章介绍实现理论及方法、严格系统等价概念及系统的多项式矩阵描述. 第七章和第九章分别介绍状态反馈、状态估计及补偿器的理论和相应的设计方法，其中包括了鲁棒性及内模原理等较新的概念. 有些章节中还讨论了相应的数值计算问题.

本书可作为大学高年级学生和研究生的教材，也可供科研工作者、工程技术人员以及高等院校教师参考或自学.

Chi-Tsong Chen
LINEAR SYSTEM THEORY AND DESIGN
Holt, Rinehart and Winston

线性系统理论与设计

〔美〕陈啟宗 著
王纪文 杜正秋 毛剑琴 译
责任编辑 李淑兰 杨 艳
科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1988年1月第一版 开本：787×1092 1/16
1988年1月第一次印刷 印张 33 3/4
印数：0001-5,800 字数 769,000

ISBN 7-03-000011-0/TP·1

定价： 7.90 元

目　录

第一章 绪 论

1-1 系统的研究

物理系统的研究和设计可以用实验方法完成. 人们用各种信号施于系统并测量其响应,若特性不能令人满意,我们就调整系统的某些参数或者在其中接入某种补偿器以改善系统特性,这种设计是以过去经验为指导且用逐次试凑加以处理的. 毋庸置疑,这种方法已经成功地用于许多物理系统的设计.

如果系统特性的技术条件颇为严密而苛刻,实验法就显得不能令人满意. 若物理系统十分复杂或者出于经济和安全考虑以致无法进行实验,则该种方法显然也是不适宜的.在上述情况下,不可避免地要采用解析法.物理系统的解析研究大体上由四部分组成:建模,建立数学方程描述,分析和设计. 在工程上,首先要对物理系统和模型加以区别. 事实上,在任何教科书中所研究的电路和控制系统均是物理系统的模型. 具有恒值电阻的电阻器就是一个模型,在其电阻上未能显示出功率极限. 具有恒值电感的电感器也是一个模型,实际上其电感是随流经其间的电流大小的变化而异的. 建模是一个至关重要的问题,设计的成败与否取决于物理系统的模型是否适当.

由于问题的提法和运行范围的不同,同一个物理系统可以有各种不同的模型. 例如,在高频和低频下工作的电子放大器其模型是不相同的. 又如,宇宙飞船若欲研究其飞行轨道,就可视为一个质点,然而,若欲研究其姿态变化,则必须视为刚体. 为了导出物理系统的适当模型,透彻了解物理系统及其运行范围是很重要的. 本书将把物理系统的模型称为系统. 因此,物理系统是存在于现实世界中的一个装置或是若干装置的集合,而系统乃是物理系统的模型.

一旦获得物理系统的模型,下一步就要用各种物理定律来推导描述系统的数学方程. 例如,对于电气系统,可应用基尔霍夫电压和电流定律来建立数学方程;而在机械系统中,则可应用牛顿定律来建立数学方程. 描述系统的方程可以有诸如线性方程、非线性方程、积分方程、差分方程、微分方程以及其他等等的多种形式. 在描述同一系统的不同形式的方程中,何者更优,取决于所提问题的不同. 总之,正如一个物理系统可以具有多种模型一样,一个系统可以具有多种不同的数学方程描述.

系统的数学描述一旦获得,下一步的研究就是对系统进行分析——定量分析和(或)定性分析. 在定量分析中,我们关心的是系统对于某一输入信号的实际响应. 这一部分的分析能够容易地借助于数字式模拟计算机完成. 在定性分析中,我们关心的是诸如稳定性、可控性以及可观测性等一般特性. 各种设计方法往往来源于这一分析. 因此,定性分析是十分重要的.

如果所得系统响应不能令人满意,必须对系统加以改善或优化. 在某些情况下,能够通过调整系统的某些参数来改善系统的响应,而在另一些情况下,则必须引入补偿器. 应注意的是,设计是在物理系统的模型上完成的. 若模型选取得当,在设计时引入的补偿器

和所作的必要调整,就能相应地改善物理系统的特性.

1-2 本书的范围

上节已经提到,系统的研究可分四步:建模、建立数学方程、分析和设计.物理系统的模型建立需要各专门领域的知识及某些测量设备.例如,在建立晶体管模型时,需要量子物理学知识及某些实验室装置.在建立汽车支承系统模型时,需要进行实际试验和测量,决非仅靠纸和笔所能完成的.因此,建模问题应与各种专门领域联系在一起予以研究.对此,本书当然不能予以涉及.我们假定本书中的物理系统之模型(或系统)都已经建立起来,并可供我们使用.

本书中用以描述系统的数学方程主要限于

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \hat{\mathbf{G}}(s)\hat{\mathbf{u}}(s) = \mathbf{N}(s)\mathbf{D}^{-1}(s)\hat{\mathbf{u}}(s) = \mathbf{F}^{-1}(s)\mathbf{H}(s)\hat{\mathbf{u}}(s) \tag{1-1}$$

和

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{1-2a}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{E}\mathbf{u}(t) \tag{1-2b}$$

及其对时变情形的推广.方程(1-1)描述了在拉普拉斯变换域内输入 $\mathbf{u}$ 和输出 $\mathbf{y}$ 之间的关系并称之为输入-输出描述或称频域中的外部描述.矩阵 $\hat{\mathbf{G}}(s)$ 称之为传递函数矩阵,其元素局限于有理函数.在设计中,$\hat{\mathbf{G}}(s)$ 可看作为两个多项式矩阵的比而化为 $\mathbf{N}(s)\mathbf{D}^{-1}(s)$ 或 $\mathbf{F}^{-1}(s)\mathbf{H}(s)$ 的形式,并称其为多项式分式形.(1-2)式中的两个方程称为动态方程或状态变量方程.方程(1-2a)是一组一阶微分方程.若(1-2)式用来描述一个系统,则称其为动态方程描述或状态变量描述,也可称为内部描述.我们将从线性和时不变性的概念出发,导出上述两类方程并将用实例来说明这些方程是如何用来描述系统的.

本书的主要部分将致力于以方程(1-1)和(1-2)为中心的分析和设计.分析可以分成定量和定性两类,前者目前可以由模拟或数字计算机完成,因此,我们将侧重于后者.我们将透彻地研究这些方程的各种特性并建立其间的联系,然后,从这一研究出发导出若干设计方法.

本书中所研究的设计问题并非确切的反馈控制系统设计.在设计中,我们关心的是在对于补偿器的复杂性不加任何约束的前提下,为了达到某些诸如稳定或极点配置的设计目标,所应满足的严格条件,以及对应补偿器具有的最低阶次应是多少的问题.我们还关心的是如何引出简单而有效的方法以完成这一设计.控制系统设计的最后目的是在补偿器的阶次有或没有约束的条件下设计一个系统使之满足某些诸如上升时间、超调量、稳态误差及其他性能指标的要求.相应于有约束和无约束情况的两种设计问题是迥然不同的.在本书中,没有考虑控制系统特性.因此,尽管本书中的大部分结果在控制系统设计中是基本的和有用的,但我们对控制系统的设计研究还是不完备的.为了对控制系统设计进行讨论,请参阅文献 3,S46 和 S96.下面扼要地介绍各章的要点:

第二章,复习有关线性代数的一些概念和结论.其目的是使读者能完成相似变换并用以求解线性代数方程组以及计算矩阵函数.在线性系统分析设计中,这些技术即使不是必不可少的也是十分重要的.

第三章系统地导出了线性系统的输入-输出描述和状态变量描述.这些描述是基于

线性、松弛性、因果性和时不变性的概念而导出的. 我们还要用例子来说明系统的这些描述是如何建立的，并将推导出组合系统的数学描述和离散时间方程. 反馈系统的适定性问题也将予以讨论.

线性动态方程的解将在第四章中研讨，并要指出，不同的分析常常导致同一系统的不同的动态方程描述. 本章中还将建立输入-输出描述和状态变量描述之间的关系.

可控性和可观测性的概念在第五章中引出. 从下面的例子可以看到引出这两个概念的重要性. 考虑图 1-1 所示网络，图中两个网络的传递函数均为 1. 对于图 1-1(b) 网络的传递函数为 1 是毋庸置疑的. 可是，我们可能会问，图 1-1(a) 中的电容为何在传递函数中不起任何作用？为了回答这一问题，就需要用到可控性和可观测性的概念. 对于最优控制理论、稳定性研究以及信号预测和滤波，这两个概念也是十分重要的. 动态方程可控性和可观测性的各种充分必要条件也将在本章中引出. 我们还要讨论动态方程的规范分解并将介绍一种有效且数值上稳定的方法以使动态方程成为不可简约的.

在第六章，要研究有理传递函数矩阵的不可简约实现. 问题的实质是要寻找一个可控且可观测的线性时不变动态方程，使其具有指定的有理传递矩阵. 这一问题不可避免地要用模拟或数字计算机的仿真来解决，它也提供了用运算放大器电路来综合有理传递函数矩阵的一种方法. 这一结果对于在线性时不变系统设计中建立状态变量法和传递函数法之间的联系也是需要的.

第七章研究了可控性和可观测性概念的实际含义，并证明了若动态方程是可控的，则可以通过引入具有常值增益矩阵的状态反馈任意配置动态方程的特征值，而若动态方程

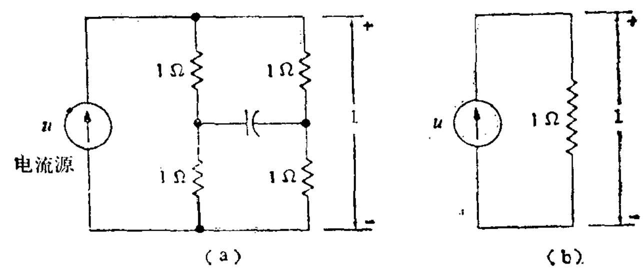

图 1-1　传递函数都是 1 的两个不同网络

可观测时，便能设计一个具有任意特征值的状态估计器以重构其状态. 各种设计方法也将在这一章中引出并提出分离特性的概念.

线性系统的另一定性特性在冠以稳定性标题的第八章中予以研讨. 在系统设计中首先要遇到的就是稳定性问题. 我们要引出有界输入、有界输出稳定性、李亚普诺夫（Lyapunov）意义下的渐近稳定性以及总体稳定性等概念，并将研究它们的特性及其相互之间的关系. 我们还要讨论李亚普诺夫定理并用它来建立劳斯-霍尔维茨 (Routh-Hurwitz) 判据. 在离散时间情形下，也有与上述相对应的内容，我们也将予以研究.

在最后一章中，研究与线性时不变系统有关的各种问题. 传递函数零极点相消的含义就是要研究的问题之一. 作为一个例子，研究具有传递函数 $1/(s-1)$ 和 $(s-1)/(s+1)$ 的两个系统作如图 1-2 所示的三种不同连接. 我们要说明：为何图 1-2(b) 的系统能够用其组合传递函数来研究，而图 1-2(a) 和 1-2(c) 所示系统却不能这样做. 我们还要讨论单变量和多变量反馈系统的稳定性. 随后要研讨用分式形传递函数矩阵进行补偿

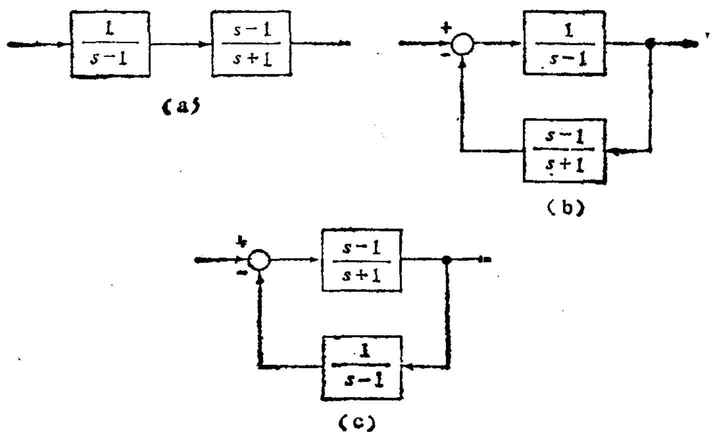

图 1-2　$1/(s-1)$ 和 $(s-1)/(s+1)$ 的三种不同连接

器设计的问题.对单位反馈和输入输出反馈两种结构均要进行讨论.我们并要设计能获得任意极点配置和获得渐近跟踪及干扰抑制的具有最低阶次的补偿器.我们还将用传递函数方法重建在状态变量法中业已导出的主要结果从而使两种方法之间构成完满的联系.

书末介绍的附录共有八个,它们与各章的逻辑依从关系已在前言中列出.

第二章　线性空间和线性算子

2-1 引　　言

在本章中，我们将要复习一些有关线性代数的概念和结果. 所有这些对于本书的研究是至关重要的. 各个论题是经过仔细挑选的，只有那些在以后各章节中要用到的内容才在这里予以介绍. 本章的目的在于使读者了解相似变换的结构、求解线性代数方程组、寻找方阵的约当形表示以及掌握矩阵函数，特别是矩阵指数函数的计算（见 2-9 节结束语[1]).

在 2-2 节中介绍有关域和在域上的线性空间的概念.在本章中所涉及的域是实数域、复数域以及有理函数域. 为了要得到线性空间中的向量表示，将在 2-3 节中介绍基底的概念,并建立同一向量的不同表示法之间的关系. 在 2-4 节中将研究线性算子及其表示，并插入相似变换的概念. 线性代数方程组的解在 2-5 节中予以研究，其中秩和零度的概念是颇为重要的. 在 2-6 节中将证明每一方阵均具有约当形表示，这种表示是借助于引入特征向量和广义特征向量作为基底向量而获得的. 在 2-7 节中研究矩阵函数，并引出最小多项式和凯莱-哈密顿（Caley-Hamilton）定理. 内积和范数的概念在最后一节中予以讨论.

本章力图能自成一体，并假定读者已经具备诸如行列式、矩阵相加、矩阵相乘以及逆矩阵等矩阵理论的基本知识. 下面介绍的矩阵恒等式也将用到,设 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$ 分别为 $n\times m$, $m\times r$, $l\times n$, $r\times p$ 常量矩阵,并设 $\mathbf{a}_i$ 为 $\mathbf{A}$ 的第 i 列, $\mathbf{b}_j$ 为 $\mathbf{B}$ 的第 j 行,于是有

$$\mathbf{AB}=[\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{a}_m]\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{b}_2\\ \vdots\\ \mathbf{b}_m\end{bmatrix}=\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1+\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2+\cdots+\mathbf{a}_m\mathbf{b}_m \tag{2-1}$$

$$\mathbf{CA}=\mathbf{C}[\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{a}_m]=[\mathbf{Ca}_1\ \ \mathbf{Ca}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{Ca}_m] \tag{2-2}$$

$$\mathbf{BD}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{b}_2\\ \vdots\\ \mathbf{b}_m\end{bmatrix}\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\mathbf{D}\\ \mathbf{b}_2\mathbf{D}\\ \vdots\\ \mathbf{b}_m\mathbf{D}\end{bmatrix} \tag{2-3}$$

这些恒等式极易验证. 务必注意的是 $\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i$ 是 $n\times r$ 矩阵，它是 $n\times 1$ 矩阵 $\mathbf{a}_i$和 $1\times r$ 矩阵 $\mathbf{b}_i$ 的乘积.

本章中所提及的内容是众所周知的，并可在参考文献 5, 38, 39, 43 ～ 45, 77, 86, 116[2] 中找到. 但本书的提法与众有所不同. 我们着重强调向量及其表示之间的差异(详见 (2-12) 式和定义 2-7). 在强调了这些差异之后，算子的矩阵表示以及相似变换等

1）希望读者注意结束语,因为它为读者学习本章介绍的数学定理提供了指导.

2）数字序号与书末参考文献序号相一致.

概念就可以很自然地引出来了.

2-2 域上的线性空间

在数学研究中，往往需要首先阐明作为研究核心的对象全体. 这种对象或元素的全体称为集合. 例如,在算术中我们研究的是实数集合,在布尔（Boolean）代数中研究的是集合 $\{0, 1\}$, 在该集合中仅含有两个元素. 集合的其他例子尚有复数集合、正整数集合、次数小于 5 的多项式集合以及所有 2×2 实常量矩阵集合. 本书中所讨论的对象集合可以是上述集合中的任何一种,也可以是其他所希望说明的集合.

考虑实数集合. 具有交换律及分配律的加法和乘法运算均定义在该集合上，任何两个实数的和或积仍为实数，该集合具有 0 元素和 1 元素，集合中的任一实数 α 具有加法逆（$-\alpha$）和乘法逆（$1/\alpha$, $\alpha = 0$ 除外）. 任何具有上述这些性质的集合称为**域**. 我们给出域的正式定义如下:

定义 2-1

域 $\mathscr{F}$ 是由称为标量的元素之集合以及称为加“+”和乘“·”的两种运算所构成，这两种运算定义在 $\mathscr{F}$ 上,并满足下列条件:

(1) 对于 $\mathscr{F}$ 中的每一个元素 α 和 β, 有相应的称为 α 与 β 之和的元素 $\alpha + \beta$ 以及称为 α 与 β 之积的元素 $\alpha \cdot \beta$ 存在于 $\mathscr{F}$ 之中.

(2) 加法和乘法都是可交换的: 对于 $\mathscr{F}$ 中的任何 α 和 β

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \qquad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

(3) 加法和乘法都是可结合的: 对于 $\mathscr{F}$ 中的任何 α, β 和 γ

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

(4) 乘法关于加法是可分配的: 对于 $\mathscr{F}$ 中的任何 α, β 和 γ

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

(5) $\mathscr{F}$ 中含有元素 0 和元素 1, 使对于 $\mathscr{F}$ 中每一元素 α 均有

$$\alpha + 0 = \alpha \qquad 1 \cdot \alpha = \alpha$$

(6) 对于 $\mathscr{F}$ 中的每一元素 α, $\mathscr{F}$ 中有一个元素 β, 使

$$\alpha + \beta = 0$$

称 β 为加法逆.

(7) 对于 $\mathscr{F}$ 中的每一个非零元素 α, $\mathscr{F}$ 中有一个元素 γ, 使

$$\alpha \cdot \gamma = 1$$

称 γ 为乘法逆. ■

下面给出一些例子说明这一概念.

例 1 考虑包括 0 和 1 的数之集合. 若用通常的加法和乘法定义，集合 $\{0, 1\}$ 不构成域. 这是因为元素 $1 + 1 = 2$ 不属于集合 $\{0, 1\}$. 但若定义 $0 + 0 = 1 + 1 = 0$, $1 + 0 = 1$, $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$ 则可以证明集合 $\{0, 1\}$ 满足关于域的所有条件. 因此,具有如上所定义的运算之集合 $\{0, 1\}$ 就构成了域,并称之为二进制数域.

例 2 考虑如下形式的所有 2×2 矩阵的集合

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$$

其中,x 和 y 为任意实数,在通常的矩阵相加和相乘的定义下,该集合构成一个域. 该域中的 0 元素和 1 元素分别为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

务必注意的是,全体 2×2 矩阵的集合并不构成域.

由上述例子可见,组成域的对象之集合可以是任何东西,只要对这些对象能定义加和乘两种运算. 幸运的是本书所涉及到的域是人们所熟悉的一些域,如实数域、复数域以及具有实系数的有理函数域,对于这些域均可用通常的方法来定义加法和乘法运算,读者可自行证明这些域确实满足所需要的全部条件. 我们用 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{C}$ 来表示实数域和复数域,用 $\mathscr{R}(s)$ 来表示具有实系数及未定数 s 的有理函数域. 应该提醒的是, 正实数集合并不构成一个域, 乃因其中并不存在加法逆之故. 整数集合和多项式集合亦因其中并不存在乘法逆而不构成域[1].

在介绍向量空间之前,先考虑通常的二维几何平面, 若选定原点, 则平面上所有的点均可看作为一个向量, 它具有方向和大小. 向量可以缩短和延伸. 任何两个向量均可相加,但两点或两个向量的乘积则是没有定义的. 这样的平面, 以数学术语, 则称为线性空间、向量空间或线性向量空间.

定义 2-2

数域 $\mathscr{F}$ 上的线性空间 $(\mathscr{X}, \mathscr{F})$ 是由称为向量的元素集合 $\mathscr{X}$、数域 $\mathscr{F}$ 以及称为向量加法和数乘的两种运算共同组成的. 在 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{F}$ 上定义向量加法和数乘两种运算,应使下列诸条件均满足:

(1) 对于 $\mathscr{X}$ 中每一对向量 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$,$\mathscr{X}$ 中都有一个相应的元素 $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, 并称其为 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 的和.

(2) 加法是可交换的: 对于 $\mathscr{X}$ 中任何 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$, 有

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1$$

(3) 加法是可结合的;对于 $\mathscr{X}$ 中的任何 $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ 和 $\mathbf{x}_3$, 有

$$(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1 + (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$$

(4) $\mathscr{X}$ 中含有 $\mathbf{0}$ 向量, 对于 $\mathscr{X}$ 中的每一向量 $\mathbf{x}$, 有 $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$. 向量 $\mathbf{0}$ 称为零向量或原点.

(5) 对于 $\mathscr{X}$ 中每一向量 $\mathbf{x}$, $\mathscr{X}$ 中存在向量 $\bar{\mathbf{x}}$, 使 $\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.

(6) 对于 $\mathscr{F}$ 中每一个 α 和 $\mathscr{X}$ 中每一个向量 $\mathbf{x}$, $\mathscr{X}$ 中有与之相应的向量 $\alpha\mathbf{x}$ 称为 α 和 $\mathbf{x}$ 的数乘积.

(7) 数乘是可结合的: 对于 $\mathscr{F}$ 中任何 α, β 和 $\mathscr{X}$ 中的任何 $\mathbf{x}$, 有 $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$.

(8) 数乘关于向量加法是可分配的: 对于 $\mathscr{F}$ 中任何 α 和 $\mathscr{X}$ 中任何 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$, 有 $\alpha(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \alpha\mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2$.

(9) 数乘关于标量加法是可分配的: 对于 $\mathscr{F}$ 中任何 α, β 和 $\mathscr{X}$ 中任何 $\mathbf{x}$, 有

1) 凡一集合具有定义 2-1 中性质 7 以外的所有性质者称为环或更确切地称为具有(乘法)单位元的交换环. 如同具有实系数的多项式集合组成环一样,整数集合组成一个环.

$(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$.

(10) 对于 $\mathscr{X}$ 中任何 $\mathbf{x}$，有 $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$，其中 1 是 $\mathscr{F}$ 中的 1 元素. ■

例 3 一个域在其本身上构成向量空间. 此空间的向量加和数乘与数域上所定义的相应运算相同. 例如 $(\mathscr{R},\mathscr{R})$ 和 $(\mathscr{C},\mathscr{C})$ 均为向量空间. 注意 $(\mathscr{C},\mathscr{R})$ 为向量空间而 $(\mathscr{R},\mathscr{C})$ 则否. (何故?)并应注意 $(\mathscr{R}(s),\mathscr{R}(s))$ 和 $(\mathscr{R}(s)\ \mathscr{R})$ 亦为向量空间，但 $(\mathscr{R},\mathscr{R}(s))$ 则否.

例 4 所有定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的实值分段连续函数的集合在实数域上构成一个线性空间，其加法和数乘就是用通常方法所定义的，称此线性空间为函数空间.

例 5 给定域 $\mathscr{F}$，令 $\mathscr{F}^n$ 为写成如下列形式的所有 n 元标量组

$$\mathbf{x}_i=\begin{bmatrix} x_{1i}\\ x_{2i}\\ \vdots\\ x_{ni}\end{bmatrix} \tag{2-4}$$

其中，下标 i 表示 $\mathscr{F}^n$ 中的不同向量，第一下标表示 $\mathbf{x}_i$ 各个分量. 若向量加法和数乘定义为

$$\mathbf{x}_i+\mathbf{x}_j=\begin{bmatrix} x_{1i}+x_{1j}\\ x_{2i}+x_{2j}\\ \vdots\\ x_{ni}+x_{nj}\end{bmatrix} \qquad \alpha\mathbf{x}_i=\begin{bmatrix}\alpha x_{1i}\\ \alpha x_{2i}\\ \vdots\\ \alpha x_{ni}\end{bmatrix} \tag{2-5}$$

则 $(\mathscr{F}^n,\mathscr{F})$ 是一个向量空间. 若 $\mathscr{F}=\mathscr{R}$，则称 $(\mathscr{R}^n,\mathscr{R})$ 为 n 维实向量空间. 若 $\mathscr{F}=\mathscr{C}$，则称 $(\mathscr{C}^n,\mathscr{C})$ 为 n 维复向量空间. 若 $\mathscr{F}=\mathscr{R}(s)$，则称 $(\mathscr{R}^n(s),\mathscr{R}(s))$ 为 n 维有理向量空间.

例 6 考虑所有次数小于 n 且具有实系数的多项式集合 $\mathscr{R}_n[s]$ 为[1]

$$\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i s^i$$

并设向量加法和数乘按如下定义:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i s^i+\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i s^i=\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha_i+\beta_i)s^i$$

$$\alpha\left(\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i s^i\right)=\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha\alpha_i)s^i$$

容易证明 $(\mathscr{R}_n[s],\mathscr{R})$ 是一个线性空间. 注意 $(\mathscr{R}[s],\mathscr{R}(s))$ 不是线性空间.

例 7 设 $\mathscr{X}$ 是齐次微分方程 $\ddot{x}+2\dot{x}+3x=0$ 之所有解的集合，以通常方法定义向量加法和数乘时，$(\mathscr{X},\mathscr{R})$ 为一线性空间. 若微分方程非齐次，则 $(\mathscr{X},\mathscr{R})$ 为一非线性空间(为什么?).

我们再介绍一个概念以结束本节.

定义 2-3

设 $(\mathscr{X},\mathscr{F})$ 为线性空间，并令 $\mathscr{Y}$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个子集. 若在 $(\mathscr{X},\mathscr{F})$ 的运算下，

---

1) 带有圆括号的 $\mathscr{R}(s)$ 表示具有实系数的有理函数域，而带有方括号的 $\mathscr{R}[s]$ 则表示具有实系数的多项式集合.

$\mathscr{Y}$ 自身构成一个在数域 $\mathscr{F}$ 上的向量空间，则称 $(\mathscr{Y}, \mathscr{F})$ 是 $(\mathscr{X}, \mathscr{F})$ 的一个子空间. ■

我们来叙述 $\mathscr{X}$ 的子集构成一个子空间所应满足的条件. 因为已经对线性空间 $(\mathscr{X}, \mathscr{F})$ 定义了向量加法和数乘，它们满足定义 2-2 中所列的条件 (2)，(3) 和 (7) ～ (10). 因此，我们仅需核验条件 (1) 和条件 (4) ～ (6) 以确定集合 $\mathscr{Y}$ 是否是 $(\mathscr{X}, \mathscr{F})$ 的子空间. 容易证明，对于 $\mathscr{Y}$ 中的任何元素 $\mathbf{y}_1$ 和 $\mathbf{y}_2$ 以及 $\mathscr{F}$ 中的任何元素 α_1 和 α_2，若 $\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2$ 亦属于 $\mathscr{Y}$，则条件 (1) 和条件 (4) ～ (6) 必能满足. 由此得出如下结论：对于 $\mathscr{Y}$ 中的任何元素 $\mathbf{y}_1$，$\mathbf{y}_2$ 和 $\mathscr{F}$ 中的任何元素 α_1，α_2，若 $\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2$ 亦属于 $\mathscr{Y}$，则集合 $\mathscr{Y}$ 是 $(\mathscr{X}, \mathscr{F})$ 的一个子空间.

例 8 在二维实向量空间 $(\mathscr{R}^2, \mathscr{R})$ 中，每一个通过原点的直线是 $(\mathscr{R}^2, \mathscr{R})$ 的一个子空间. 亦即，对于任何固定的实数 α，集合

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \alpha x_1 \end{bmatrix}$$

是 $(\mathscr{R}^2, \mathscr{R})$ 的一个子空间.

例 9 实向量空间 $(\mathscr{R}^n, \mathscr{R})$ 是向量空间 $(\mathscr{C}^n, \mathscr{R})$ 的一个子空间

2-3 线性无关、基底和表示

每一几何平面具有两个座标轴，它们互相垂直并具有相同的标度. 之所以需要一个座标系乃因欲标定平面上之一点或向量时，必须具有一个参考系或标准. 在本节中，我们将把座标概念推广到一般线性空间去. 在线性空间中，座标系称为基底. 基底向量一般并不相互垂直，且具有不同的标度. 在深入研讨此问题之前，需要向量线性无关的概念.

定义 2-4

在数域 $\mathscr{F}$ 上的线性空间 $(\mathscr{X}, \mathscr{F})$ 中，设有一组向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$，当且仅当在数域 $\mathscr{F}$ 中存在不全为零的标量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，使得

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \tag{2-6}$$

时，就称这组向量为线性相关的. 而若使 (2-6) 式成立的唯一的一组标量 α_i 是 $\alpha_1 = 0$，$\alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_n = 0$，则称向量组 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ 是线性无关的. ■

对于 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_n = 0$，任给一组向量，(2-6) 式恒能成立. 因此，为了证明所给向量组线性无关，则必须证得 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_n = 0$ 是使 (2-6) 式成立的唯一的一组 α_i. 亦即，α_i 中有任一个不为零均不可能使 (2-6) 式的右边变为零向量. 若一组向量是线性相关的，一般就有无穷多组不全为零的 α_i 满足 (2-6) 式. 然而，若能找到一组不全为零的 α_i 使 (2-6) 式成立，就足以断定向量组是线性相关了.

例 1 考虑一组向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$，其中 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. 因可选择 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_n = 0$ 而使 (2-6) 式成立. 故该组向量线性相关.

例 2 考虑仅包含有一个向量 $\mathbf{x}_1$ 的向量组，当且仅当 $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$ 时，该向量组才是线性无关的. 这是因为，当 $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$ 时，唯一使 $\alpha_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ 成立的条件是 $\alpha_1 = 0$，而当 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ 时，选 $\alpha_1 = 1$ 即能使 $\alpha_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ 成立.

若引入如下表示：