模态逻辑引论

周礼全●著

MO TAI LUO JI YIN LUN

模态逻辑引论

周礼全 著

上海人民出版社

责任编辑　唐继无
封面装帧　王申生

模态逻辑引论
周礼全 著
上海人民出版社出版
(上海绍兴路54号)
新华书店上海发行所发行　常熟东张印刷厂印刷
开本850×1156　1/32　印张13.25　插页2　字数282,000
1986年4月第1版　1986年4月第1次印刷
印数1—4,100
书号2074·451　定价2.45元

前　言

模态逻辑是逻辑的一个古老的分支，也是近几十年蓬勃发展的一个重要分支。为了国内有更多的逻辑工作者和其他的科学工作者注意模态逻辑，我才勉为其难地写这本书。

本书的写作是 1976 年开始，1979 年完成的。本想再增添一些新的内容，但由于缺少足够的时间，未能如愿。1983年经过一次修改后，送出版社出版。

本书原稿的第一章至第十章，由出版社请莫绍揆先生审阅过。在本书写作过程中，康宏逵同志看过原稿的第三章。王宪钧先生与晏成书先生看了本书的全部清样。以上诸位对本书提出了许多很好的意见。

巫寿康同志负责抄写原稿的组织工作，并把原稿前三章中的定理抄成卡片。胡耀鼎同志和张清宇同志详细校阅了第一章到第十章的清样，并改正了由各种原因产生的许多错误；还为本书作了名词索引。

我向以上诸位先生和同志表示深深的感谢。

我很感谢本书的责任编辑唐继无同志，他不但在本书的编辑方面付出了辛勤的劳动，而且也对原稿的许多具体内容提出了很好的意见。

我在模态逻辑方面的知识是很有限的。如果本书能在我国引起对模态逻辑和哲学逻辑的广泛兴趣，我会是喜出望外的。

作　者

1984年12月

目　　录

第一章　绪　　论

§1.1　形 式 语 言

形式语言不同于自然语言。自然语言是在长期社会生活中逐渐形成的语言，它在人类社会中起着多种的交际作用。形式语言是人们为了研究和表达某一科学理论而特别构造的语言。

形式语言是一种符号的体系。象自然语言中有字和词一样，形式语言中有基本符号。一串基本符号就是形式语言中的一个公式。象自然语言中要区别合语法的语句与不合语法的语句一样，形式语言中要区别合式公式与不合式公式。形式语言中有形成规则，形成规则规定了什么样的公式是合式公式，提供了合式公式的定义和如何由基本符号构造合式公式的方法。

对一个形式语言的基本符号的规定，必须是能行的。这就是说，机械地按照这个规定，在有穷步内，就能判定任一符号是或不是这个形式语言的基本符号。

一个形式语言的形成规则也必须是能行的。这就是说，形成规则必须提供一种能行的方法，以判定任一公式是或不是这个形式语言的合式公式。

一个形式语言的基本符号，例如，命题变元和谓词变元，可以是无穷多的。但是，我们可以在元语言中对这些无穷多的基本符号作出能行的规定。（参考 1.5）

在规定一个形式语言的基本符号与形成规则时，我们完全不考虑基本符号和合式公式的意义。我们把它们看作一些物理的对象，只考虑它们的形状和它们之间的空间关系。形式语言之所以是形式的，就在于它的基本符号和合式公式是还不具有意义的，是独立于任何解释的。

一个形式语言可以看作它的所有合式公式的集合。如果一个形式语言的所有合式公式的集合与另一个形式语言的所有合式公式的集合是同一的，则这两个形式语言就是同一的。

在构造了一个形式语言之后，我们可以进一步作两方面的工作。一方面，我们可以应用形式语言构造一个形式系统；另一方面，我们可以对形式语言和形式系统作出解释。

§1.2 逻 辑 演 算

在一个形式语言中再加上推理工具，就构成了一个逻辑演算。逻辑演算通常又叫做形式系统或逻辑系统。

推理工具通常包括公理与推理规则。但是，有的逻辑演算只有推理规则而没有公理。

我们要选择一些合式公式作为逻辑演算的公理。公理是证

明的起点。我们还要规定一些推理规则，即规定由什么样的一些合式公式可以推导出什么样的一个合式公式。

一个逻辑演算的基本符号、形成规则、公理与推理规则，叫做这个逻辑演算的基础。

由逻辑演算的公理和从公理根据推理规则推出的合式公式所组成的一个有穷的公式序列，就是这个逻辑演算中的一个证明。证明中的最后一个合式公式就是这个逻辑演算中的定理。

逻辑演算的公理，也必须是有能行性的，就是说，必须有一种能行的方法，以判定任一合式公式是或不是这个逻辑演算的公理。在有的逻辑演算中，公理的数目是无穷的。但我们可以在元语言中对这无穷多的公理作出能行的规定（参看 1.5）。逻辑演算的推理规则也必须是有能行性的，就是说，必须有一种能行的方法，以判定任一些合式公式与任一个合式公式之间有或没有直接推出关系。

由于公理与推理规则都是有能行性的，一个逻辑演算的证明也是有能行性的。对于任一有穷的合式公式序列，我们有一能行的方法，以判定它是或不是这个逻辑演算中的证明。

但是，对于一个逻辑演算中的任一合式公式是或不是这个逻辑演算的定理，一般地我们并没有一种能行的判定方法。对于有些逻辑演算，例如 §2 的 P，我们有一种能行的方法，以判定任一合式公式是或不是P的定理。但对于另一些逻辑演算，例如 §3 的 Q，我们就没有这样一种能行的判定方法。前一些逻辑演算叫做可判定的，而后一些逻辑演算叫做不可判定的。

在规定逻辑演算的公理与推理规则时，我们完全不考虑符号和合式公式的意义，我们只把它们看作物理的对象。我们把

公理看作具有某种形状的符号串，把推理规则看作是规定一些符号串与一个符号串之间具有某种形状上的和空间上的关系，把证明看作一个有穷的符号串序列，其中每一个符号串或者具有公理符号串那样的形状，或者它与前面的符号串具有推理规则所规定的那种形状上的关系。

对于逻辑演算的研究，是对符号和合式公式本身的研究，是独立于任何解释的，因而是语形的研究和语形的理论。

证明论是语形理论的一部分，特别是关于形式系统的推理工具方面的语形理论。证明、定理、推导与语形后承是证明论中的重要概念。

§1.3 逻辑演算的解释

一个逻辑演算总要应用一个形式语言。一个形式语言和逻辑演算中的符号与合式公式，都只具有形状和空间方面的性质，都只是一些无意义的笔划。要使形式语言成为有意义的语言，要使逻辑演算成为表达逻辑规律的科学体系，我们就得对形式语言和逻辑演算作出解释。

逻辑演算的解释，就是规定逻辑演算中的符号与合式公式指称什么事物，或者规定它取什么值，值域如何。例如，对于逻辑演算P中的命题变元p_i，我们规定它的值是真值或假值，也规定由逻辑联词$\rightarrow$与$\rightarrow$构成的L_1合式公式在命题变元取真值或假值的情形下得真值或假值。这就是命题演算P的解释。

逻辑演算是独立于任何解释的，对逻辑演算的研究是语形的研究，这是一方面。但是，另一方面，在构造一个逻辑演算时，

我们心目中又总有一个预想的解释，使这个逻辑演算在这个解释下成为一个我们想要得到的关于逻辑规律的体系。

逻辑演算的解释，规定了符号与合式公式同它们所指谓的事物之间的关系。逻辑演算的解释，是逻辑演算的语义方面，对逻辑演算的解释的研究，是对逻辑系统的语义研究。

模型论是关于逻辑演算的解释的理论，属于对逻辑演算的语义研究。可满足，真，语义后承与常真等，是模型论的重要概念。

§1.4 数理逻辑与模态逻辑

数理逻辑，不同于古典的传统逻辑，是通过建立逻辑演算来研究正确思维的形式。逻辑演算应用了精确规定的形式语言，逻辑演算与数理逻辑就避免了日常语言的含混性，而达到高度的严格性。逻辑演算是一公理系统，数理逻辑通过建立逻辑演算就把分散的部分的正确思维形式组成一个相互联系的完整的系统，从而还可研究这一系统的普遍性质。

数理逻辑不仅研究逻辑演算的语形方面，而且也研究逻辑演算的语义方面，即研究关于逻辑演算的解释的理论。数理逻辑还要研究逻辑演算的语形性质和语义性质之间的关系，例如，可靠性定理与完全性定理，就是关于逻辑演算的语形性质与语义性质之间的关系的定理。

数理逻辑有狭义与广义的分别。通常的命题演算与谓词演算是公认的数理逻辑的基本部分。模态命题演算与模态谓词演算是分别地在通常的命题演算与通常的谓词演算上加入“必然”

与“可能”这些基本概念或基本符号而形成的逻辑演算。模态逻辑是通过建立模态逻辑演算来研究正确的模态推理形式，因而是数理逻辑的一个重要分支。

§1.5 对象语言与元语言

我们研究和讲述任何事物都得应用语言，研究和讲述语言也得应用语言。被研究和讲述的语言叫做对象语言，用来研究和讲述对象语言的语言，叫做元语言。如果我们应用汉语去研究和讲述英语语法，那么，英语就是对象语言，汉语就是元语言。如果我们应用汉语去研究和讲述汉语语法，那么，汉语既是对象语言，也是元语言。

在数理逻辑的研究中，也有对象语言与元语言的区别。数理逻辑要构造和讲述许多形式系统和逻辑演算，这些形式系统和逻辑演算就是数理逻辑研究中的对象语言。数理逻辑在构造和讲述这些形式系统和逻辑演算时又需要应用一种语言，后一种语言就是数理逻辑研究中的元语言。数理逻辑研究中的元语言，通常是一种自然语言加上一些符号。当然，为了使元语言更加精确，我们也可以构造一种形式化的元语言。

在本书中，我们要构造和讲述许多形式语言（L_1、L_2、L_3、L_4）与许多形式系统和逻辑演算（P、Q、T、S_4、S_5、QTB、QS_4B、QS_5、QT、QS_4）。这些形式语言、形式系统和逻辑演算就是本书中的对象语言。本书中所用的元语言是汉语加上一些特别符号。

本书中的元语言（汉语加上一些特别符号）是用来指谓对象语言的，是用来指谓形式系统和逻辑演算的。作为对象语言的

形式系统和逻辑演算是尚未解释的、无意义的，作为元语言的汉语加上一些特别符号则是已有解释的与有意义的。

元语言中也有变元与常元。

在本书的元语言中有许多变元，例如(1)$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$；(2)$A,B,C,\cdots$；(3)$\Gamma,\Delta,\theta,\cdots$；(4)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots$；(5)$F_1,F_2,F_3,\cdots$。它们的值域分别是逻辑演算中的(1)公式，(2)合式公式，(3)合式公式集，(4)个体词，(5) n 元谓词。

元语言中也有许多常元，例如，p_1,p_2，$\neg$，$\rightarrow$。元语言中的p_1,p_2，$\neg$与$\rightarrow$分别指谓形式语言和逻辑演算中的 p_1,p_2，$\neg$与$\rightarrow$这四种符号。“$\neg p_1\rightarrow p_2$ 是一 L_1 合式公式”是元语言中的语句，此语句中 p_1,p_2，$\neg$、$\rightarrow$这些元语言符号分别指谓形式语言 L_1 中的 p_1,p_2，$\neg$与$\rightarrow$这些符号。注意，形式语言 L_1 中的 p_1,p_2，$\neg$，$\rightarrow$是尚未解释、没有意义的符号，但元语言中的 p_1,p_2，$\neg$，$\rightarrow$是已经解释的和有意义的。元语言中常元的上述用法，通常叫做自指用法。

元语言中的变元与常元，分别地称为元语言变元与元语言常元，简称为变元与常元。

本书中有些定理是形式系统和逻辑演算中的定理，有些定理则是关于形式系统和逻辑演算的定理，例如（$p_1\rightarrow p_1$）是形式系统和逻辑演算P中的定理，而推导定理一致性定理与完全性定理等则不是P中的定理，而是关于P的定理。P中的定理是用对象语言（L_1）陈述的，而关于P的定理是用元语言陈述的。元语言中的定理通常称为元定理。

在本书中，我们将不标明定理与元定理，但读者从上下文很容易将它们区分清楚。