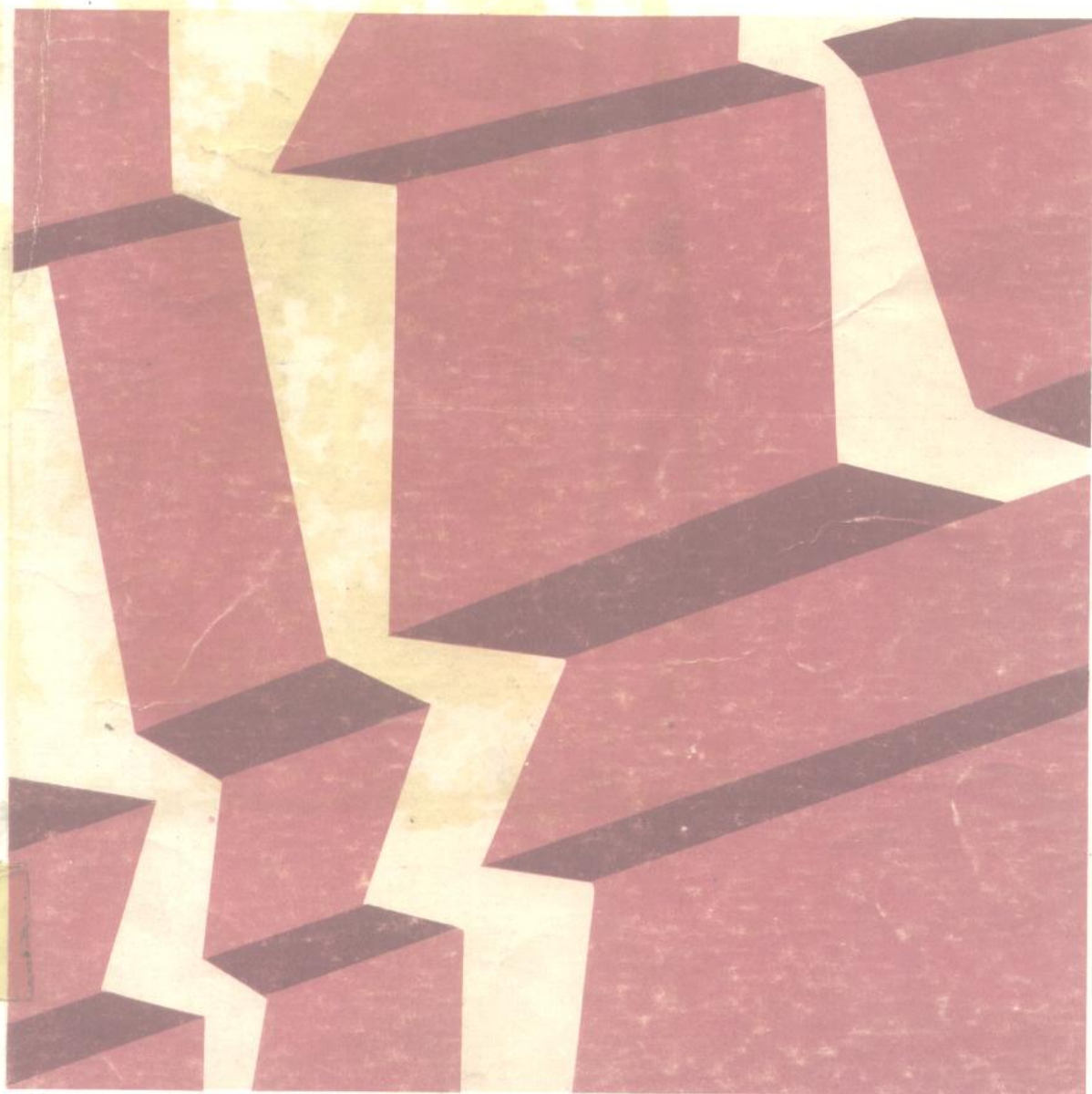


地下结构抗震

DIXIAJIEGOUKANGZHEN

● 阎盛海 编译



● 大连理工大学出版社

TU93
Y10

地下结构抗震

阎盛海 编译

大连理工大学出版社

DU40/32

内 容 提 要

本书是在波动力学的基础上针对水力发电、交通运输、矿山建筑、地下核电站、石油天然气工程及城市人防和地下建筑编译而成的。全书共分三篇。

第一篇：震源附近的地震波及其传播。

第二篇：岩体隧洞的抗震研究。介绍地震时非圆形、圆形隧洞的动力反应及其相互间的影响，以及多层衬砌隧洞的动力反应，并附有实例。

第三篇：土体隧道及地下管线抗震。介绍地震时软基隧道的理论研究、原型观测、模型实验等，以及地下管线的理论研究及其抗震设计，并附有实例。

本书可作为高等学校研究生参考教材，可供从事地下结构工程的有关设计、科研单位和工程技术人员参考使用，也可作为相关专业师生的参考书。

地 下 结 构 抗 震
Dixia Jiegou Kangzhen

阎盛海 编译

大连理工大学出版社出版（大连市凌水河）
大连理工大学印刷厂印刷 辽宁省新华书店经销

开本：787×1092 1/16 印张：15 $\frac{5}{8}$ 字数：380千字
1989年7月第1版 1989年7月第1次印刷
印数：0001 - 1000

责任编辑：方延明 责任校对：杜祖诚 封面设计：姜严军

ISBN: 7 - 5611 - 0149 - X / TU · 4 定价：3.10元

前 言

地下结构抗震这门新学科是在岩土力学和固体力学（弹性动力学、建筑力学）两个学科边缘中产生的，也是最近十几年来在这些知识领域里取得的重要成果。

目前，世界各国很多学者在从事地下结构的抗震研究。苏联学者用弹性动力学拟静法求解均匀介质中关于单连通和多连通域中的应力应变状态，得出精确解和近似解，而使固体力学获得重大发展。日本学者从地震的原型观测着手，通过模型试验，建立数学模型，根据波的多重反射理论，使地下软基隧道和成层地基的抗震研究获得重大进展。我国和欧美学者在地下结构抗震方面都做了大量的理论研究，并取得了许多可喜成果。

我国在地理位置上处于世界两大地震带之间，是世界大陆内的一个最宽广的浅源强震活动地区。本世纪以来，我国大约平均每三年就发生两次七级以上的地震，而每两次大震中差不多就有一次酿成重灾。从1966年到1976年就我国发生的地震来看，有九次超过七级强震，九次地震中共死亡人数达30多万人之多。

在地震活动频繁地区，不仅要考虑地上建筑物的抗震，而且也应该考虑地下建筑物的抗震。

随着我国“四化”建设的不断深入发展，地下水电站、核电站、地下铁道、过江隧道；大型地下软基上的引水隧洞；大型矿山巷道；石油天然气的输送管道，以及城市建筑的地下供、排水管道，煤气管道和输送电管道等，都不得不考虑地下结构的抗震。

我们从培养人才，交流信息，能为我国“四化”建设贡献力量的愿望出发，结合我们的研究生教学工作综合了英、日、俄、汉等有关资料 and 我们的科研成果编译而成这本书，可使读者了解到，硬（岩）基隧洞、软基隧道以及地下管线的抗震方法及其有关抗震设计。

希望本书能对读者有所收益。但是，由于我们的水平有限，错误与不当之处在所难免，敬请读者多加批评指正。

在本书编译过程中，得到曹善安教授的帮助，在此表示感谢。

编译者

1988年12月

目 录

第一篇 基础篇

第一章 震源附近的地震波.....	(1)
§ 1.1 均匀各向同性介质中的弹性波.....	(1)
§ 1.2 平面波在界面上产生的位移场和应力场.....	(4)
§ 1.3 均匀弹性半空间中的面波——瑞利波.....	(7)
§ 1.4 成层介质中的 <i>SH</i> 型面波——乐甫波.....	(10)
§ 1.5 地震波的反射和透射.....	(15)
§ 1.6 在表面层内波动的多重反射.....	(18)
§ 1.7 小结.....	(23)

第二篇 岩体隧洞

第二章 地震作用下非圆形隧洞衬砌的结构计算.....	(25)
§ 2.1 在地震作用下地下结构衬砌计算的基本原则.....	(25)
§ 2.2 任意方向长的 <i>P</i> 波引起衬砌结构的应力状态.....	(28)
§ 2.3 长剪切波在任意方向作用下产生的衬砌应力状态.....	(48)
§ 2.4 受任意方向压缩波和剪切波综合作用下衬砌中最不利应力状态的确定	(48)
§ 2.5 在地震作用下非圆形横断面衬砌计算的方法和次序.....	(52)
§ 2.6 算例.....	(59)
§ 2.7 水电站隧洞衬砌在地震作用下的计算结果.....	(63)
§ 2.8 铁路隧道设计衬砌的计算结果.....	(68)
§ 2.9 小结.....	(73)
第三章 地震作用下圆形支护的计算.....	(75)
§ 3.1 <i>P</i> 波作用引起圆形支护内的应力状态.....	(75)
§ 3.2 圆形支护内受 <i>S</i> 波作用引起的应力状态.....	(79)
§ 3.3 支护截面最不利应力状态的计算.....	(80)
§ 3.4 地震作用下圆形支护的计算.....	(81)
§ 3.5 算例.....	(82)
§ 3.6 圆形隧洞多层衬砌在 <i>P</i> 波作用下的动应力.....	(84)
§ 3.7 圆形多层衬砌隧洞在 <i>S</i> 波作用下的动应力.....	(93)
§ 3.8 地震作用下圆形隧洞多层衬砌的计算.....	(97)
§ 3.9 小结.....	(101)

第四章 地震作用下两相邻圆形隧洞衬砌的计算	(102)
§ 4.1 在任意方向长 P 波作用下两相邻隧洞衬砌的应力状态.....	(102)
§ 4.2 在任意方向长剪切波作用下, 两相邻圆形隧洞衬砌的应力状态.....	(116)
§ 4.3 电算.....	(117)
§ 4.4 算例.....	(122)
§ 4.5 小结.....	(132)

第三篇 土体隧道与地下管线

第五章 土体隧道抗震	(133)
§ 5.1 埋藏式结构对传播波的响应.....	(133)
§ 5.2 土体隧道的地震反应历程分析.....	(143)
§ 5.3 沉埋隧道概论.....	(149)
§ 5.4 沉埋隧道的地震观测.....	(150)
§ 5.5 沉埋隧道的模型实验.....	(162)
§ 5.6 沉埋隧道的数学模型.....	(168)
§ 5.7 地震响应分析实例.....	(173)
§ 5.8 地震时沉埋隧道的应力.....	(179)
§ 5.9 沉埋隧道的三维数学模型.....	(194)
§ 5.10 小结.....	(200)
第六章 地下管线抗震	(201)
§ 6.1 前言.....	(201)
§ 6.2 地下管线通过不同介质时的地震反应.....	(201)
§ 6.3 用有限元法计算地下管道的地震应力.....	(209)
§ 6.4 用边界单元法研究管线的地震反应.....	(214)
§ 6.5 地下管线抗震设计.....	(224)
§ 6.6 小结.....	(241)
参考文献	(242)

第一篇 基础篇

第一章 震源附近的地震波〔1〕~〔3〕

引言

本章着重讨论震源附近的波动力学，它与工程密切相关。但不能忽略这样的事实，即距震源相当远的地方，由于弹性波在地球内的传播引起的振动或由于海啸的影响，也造成灾害。如，1906年4月18日，由圣安德烈斯断层引起的加利福尼亚地震中，位于这个地区中央山谷距断层迹线最近点大约60 km 的洛杉矶诺斯镇的建筑物的破坏相当大。又如，在内华达山脉以东150km之外发生的若干次只是中等地震，却使得加利福尼亚州萨克拉门托的结构物也遭到了轻微破坏。在这些较远距离处，携带地震能量的波列形状，很接近本章所述的弹性波理论的波形。

在震源附近，地震的机制是波动力学的一个重要因素。本章着重讨论各种主要波的性质。根据现阶段的连续介质弹性理论，可以用高速电子计算机确定土和基岩的相当符合实际模型的反映函数。

§ 1.1 均匀各向同性介质中的弹性波〔1〕

本节讨论在均匀各向同性介质中允许什么样的弹性波在其中传播，暂且假定介质是无限的，即当弹性波在均匀各向同性介质中传播未遇到分界面的情况。

从弹性力学可知，弹性介质的位移场应满足方程

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.1.1)$$

由矢量分析知道，一个在无限远收敛的连续矢量场 \mathbf{u} 总可以分成两部分：一部分 \mathbf{u}_1 ，其旋度为零称为无旋场；另一部分 \mathbf{u}_2 ，其散度为零称为无散场。即

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad (1.1.2)$$

其中 \mathbf{u}_1 满足 $\nabla \times \mathbf{u}_1 = 0$

$$\mathbf{u}_2 \text{ 满足 } \nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0 \quad (1.1.3)$$

令 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ ，有 $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}_1$

因为 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_1) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_1) - \nabla \cdot \nabla \mathbf{u}_1$ ，再由 (1.1.3) 式等号左边为零，可得

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_1) = \nabla^2 \mathbf{u}_1$$

由此
$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u}_1$$

或
$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = c_a^2 \nabla^2 \mathbf{u}_1 \quad (1.1.4)$$

这就是无旋位移场的波动方程，其中

$$c_a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (1.1.5)$$

c_a 为 P 波波速， λ 、 μ 为拉密常数， ρ 为密度。

在直角坐标系中

$$\nabla^2 \mathbf{u}_1 = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial x_3^2} \quad (1.1.6)$$

令 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$ ，有 $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0$ 。将其代入 1.1.1 式得

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u}_2$$

或
$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} = c_\beta^2 \nabla^2 \mathbf{u}_2 \quad (1.1.7)$$

这就是无散位移场的波动方程，其中

$$c_\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.1.8)$$

c_β 为 S 波的波速。

我们还可以用位势函数表示波动方程。

由矢量分析可知，一个无旋场可以表示为标量场的梯度，总可以找到标量场中 ϕ ，使

$$\mathbf{u}_1 = \nabla \phi \quad (1.1.9)$$

同样一个无散场可以表示为矢量势的旋度，总可以找到矢量场 ψ ，使

$$\mathbf{u}_2 = \nabla \times \psi \quad (1.1.10)$$

将 (1.1.9) 代入 (1.1.4) 得

$$\nabla \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_a^2 \nabla^2 \phi \right) = 0$$

因此只要 ϕ 满足方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_a^2 \nabla^2 \phi \quad (1.1.11)$$

令 $\mathbf{u}_1 = \nabla \phi$ ，则 \mathbf{u}_1 必然满足方程 (1.1.4)。将 (1.1.10) 代入 (1.1.7) 得

$$\nabla \times \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c_\beta^2 \nabla^2 \psi \right) = 0$$

因此只要 ψ 满足方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_\beta^2 \nabla^2 \psi \quad (1.1.12)$$

令 $\mathbf{u}_2 = \nabla \times \psi$ ，则 \mathbf{u}_2 必然满足方程 (1.1.7)

因此, ϕ 可以用来表示无旋波 u_1 , ψ 可以表示无散波 u_2 . 散度等于零, 其物理意义就是等体积, 即等容, 故 u_2 称为等容波。

无旋位移场 u_1 , 任意位移场的散度 θ (即体胀系数), 标量势 ϕ 满足波动方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c_a^2 \nabla^2 f$$

f 可为矢量 u_1 或标量 θ 或 ϕ , 而 $u_1 = \nabla \phi$, $\theta = \nabla \cdot u$.

无散位移场 u_2 , 任意位移场的旋度 ω , 矢量势 ψ 满足

$$\frac{\partial \psi}{\partial t^2} = c_\beta^2 \nabla^2 \psi$$

而 $u_2 = \nabla \times \psi$, $\omega = \nabla \times u$.

由于 $\lambda, \mu > 0$, 所以 $c_a > c_\beta$. 将 $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ 代入(1.1.5)

和 (1.1.8) 式, 得到用杨氏模量 E 和泊松比 ν 来表达 c_a, c_β 的公式

$$c_a = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}};$$

$$c_\beta = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}. \quad (1.1.13)$$

实际上 ν 只能在 $0 \sim 1/2$ 范围内变动, 因此, $c_a \geq \sqrt{2}c_\beta$, 对于地球内介质, 通常取 $\nu = 1/4$, 因而有

$$c_a = \sqrt{\frac{6E}{5\rho}}, \quad c_\beta = \sqrt{\frac{2E}{5\rho}} \quad (1.1.14)$$

$$c_a = \sqrt{3}c_\beta \quad (1.1.15)$$

震源同时激发出无旋波和无散波。前者波速为 c_a , 后者为 c_β , 由 (1.1.15) 式知, 前者快, 因而总是先到达观测点。对于前者, 介质中粒子的振动方向与波的传播方向一致, 一般称为纵波或 P 波。无散波的粒子振动方向垂直于波的传播方向, 称为横波或 S 波。

表 1—1 几种材料的波速

材 料	P 波速度 c_a (km/s)	S 波速度 c_β (km/s)
花 岗 岩	5 ~ 6.25	2 ~ 3.5
玻璃质黑曜岩	5 ±	3.5 ±
辉 长 石	5 ~ 7	3.5 ~ 4
纯 橄 榄 岩	7.5 ~ 8.5	4.25 ~ 4.75
水	1.45	
钢、铁	5.0	
铜	3.56	

§ 1.2 平面波在界面上产生的位移场和应力场

地壳及地球内部是成层结构，存在很多分界面。地表面也可以看作是一个分界面。震源在各向同性的均匀介质中产生的地震波波阵面呈球形的一层一层的向外传播，称为球面波。严格说来，我们应讨论球面波遇到分界面时的情况。但距离震源足够远时，也就是当震源到接受地点的距离比波长大得多时 ($r \gg \lambda$)，作为近似，可讨论平面波在分界面上的行为，同时当 $\lambda \ll$ 分界面的曲率半径，也可将分界面看作平面。这样将使讨论简化而并不影响揭示许多现象的本质。

一、P波、S波在直角坐标面上的应力场与位移场^[2]

设平面波（指均匀的平面波）的传播方向在 xz 平面内（笛卡儿坐标系取 x, y, z ，位移分量为 u, v, w ），传播方向就是波阵面的法线方向，又称波的射线方向。波的位移场

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_P + \mathbf{u}_S = \nabla\phi + \nabla \times \psi \quad (1.2.1)$$

由于均匀平面波波阵面上的 $\phi, \psi_x, \psi_y, \psi_z$ 为常数，而这里平面波传播方向在 xz 平面内，因此，垂直于 xz 平面的直线上的各点必在同一波阵面内，即

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi_x}{\partial y} = \frac{\partial\psi_y}{\partial y} = \frac{\partial\psi_z}{\partial y} = 0$$

由 (1.2.1)

$$u_P = (u_P)_x = \frac{\partial\phi}{\partial x};$$

$$v_P = (u_P)_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0;$$

$$w_P = (u_P)_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}. \quad (1.2.2)$$

$$u_S = (u_S)_x = \frac{\partial\psi_x}{\partial y} - \frac{\partial\psi_y}{\partial z} = -\frac{\partial\psi_y}{\partial z};$$

$$v_S = (u_S)_y = \frac{\partial\psi_x}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial x};$$

$$w_S = (u_S)_z = \frac{\partial\psi_y}{\partial x} - \frac{\partial\psi_x}{\partial y} = \frac{\partial\psi_y}{\partial x}. \quad (1.2.3)$$

故位移场为

$$u = u_P + u_S = \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\psi_y}{\partial z};$$

$$v = v_P + v_S = \frac{\partial\psi_x}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial x};$$

$$w = w_P + w_S = \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x}. \quad (1.2.4)$$

根据界面条件，界面应力为

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= \lambda \theta + 2\mu e_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\
&= \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} \right) \\
&= \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \\
&= \rho \left[a^2 \nabla^2 \phi + 2\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \right]; \\
\sigma_{zx} &= 2\mu e_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} \right) \\
&= \rho \beta^2 \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} \right); \\
\sigma_{zy} &= 2\mu e_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right). \tag{1.2.5}
\end{aligned}$$

界面条件为界面两边应力相等，位移连续，即

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= \sigma'_{zz}; \\
\sigma_{zx} &= \sigma'_{zx}; \\
\sigma_{zy} &= \sigma'_{zy}. \tag{1.2.6}
\end{aligned}$$

$$u = u', \quad v = v', \quad w = w' \tag{1.2.7}$$

分析位移场在 y 方向的分量， $v = v_p + v_s = v_s$ 。也就是 v 全部为横波场的分量。再由界面应力条件 (1.2.5) 式看出 v 只出现在 σ_{zy} 的表达式中， u ， w 只出现在 σ_{zz} ， σ_{zx} 的表达式中。因此，入射波在 y 方向的位移分量 v 不为零，而 $u = w = 0$ 。根据界面条件 (1.2.6)、(1.2.7) 可知，产生的反射波和折射波也只在 y 方向的位移分量不为零，而反射波、折射波的 u 、 w 分量一定为零。这个结论与模拟试验及地震测量实践的结果是一致的。我们称横波在 y 方向分量即 S 波平行于界面的位移分量为 SH 波。因此，入射到界面的 SH 波只能产生反射、折射的 SH 波。我们把横波在入射线和界面法线所构成的入射面上的分量称为 SV 波，从界面条件 (1.2.6)、(1.2.7) 来看，入射的 P 波或 SV 波可能产生反射、折射的 P 波和 SV 波，不能产生 SH 波。

二、圆柱面上的应力场与位移场^[2]

圆柱面坐标如图 1-1 所示。引入汉森向量，令

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z \\
\mathbf{M} &= \nabla \times (\psi \mathbf{e}_z) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_r - \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \\
\mathbf{N} &= l \nabla \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \right) - l \nabla^2 \chi \mathbf{e}_z \\
&= l \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta \partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \mathbf{e}_z \right]
\end{aligned}$$

$$-l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right] \mathbf{e}_z$$

式中 \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ 和 \mathbf{e}_z 是沿着坐标轴曲线的单位基底向量。

将波动方程 (1.2.1) 式写成

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times (\mathbf{e}_z \psi)$$

则位移场分量为

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + l \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z}; \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{l}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta \partial z}; \\ u_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} - l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

应力场分量为

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + l \frac{\partial^3 \chi}{\partial r^2 \partial z} \right\}; \\ \tau_{\theta\theta} &= \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) + \frac{l}{r} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \chi}{\partial \theta^2 \partial z} \right) \right]; \\ \tau_{zz} &= \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - l \left(\frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \chi - \frac{\partial^3 \chi}{\partial z^3} \right) \right]; \\ \tau_{r\theta} &= \mu \left\{ 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + 2l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta \partial z} \right] \right\}; \\ \tau_{rz} &= \mu \left\{ 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial z} + l \left[2 \frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \chi) \right] \right\}; \\ \tau_{\theta z} &= \mu \left\{ \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + l \left[\frac{2}{r} \frac{\partial^3 \chi}{\partial \theta \partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 \chi) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

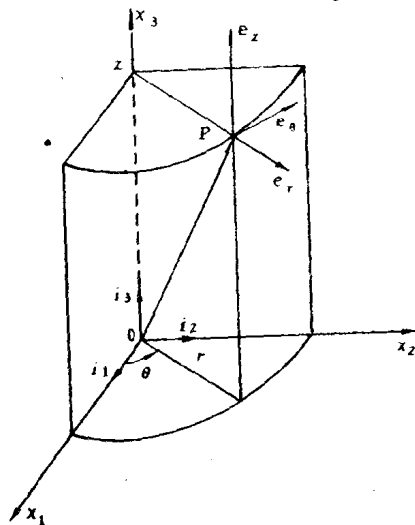


图 1-1 圆柱面坐标

对于柱外问题，若用 $\sigma_n(z)$ 代表和问题相适应的柱面函数，我们可将亥姆霍兹势的级数表示成

$$\begin{aligned} \phi &= \sigma_n^{(i)}(ar) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} e^{\pm b_r z}; \\ \psi &= \sigma_n^{(i)}(\beta r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} e^{\pm b_r z}; \end{aligned}$$

$$x = \sigma_n^{(i)}(\beta r) \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases} e^{\pm b_n z} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (1.2.10)$$

式中

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(1)} &= J_n, \quad \sigma_n^{(2)} = Y_n, \quad \sigma_n^{(3)} = H_n^{(1)}, \quad \sigma_n^{(4)} = H_n^{(2)}; \\ \gamma_p^2 &= k_1^2 - a^2, \quad \gamma_q^2 = k_2^2 - \beta^2, \quad k_1^2 \equiv (\omega/c_1)^2, \\ k_2^2 &\equiv (\omega/c_2)^2. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

在 (1.2.11) 式中, J_n, Y_n 分别为第一、二类贝塞尔函数; $H_n^{(1)}, H_n^{(2)}$ 分别为第一、二类汉克尔函数。

§ 1.3 均匀弹性半空间中的面波——瑞利波

在距震中大于数百公里的地震记录图上, 特别是远震记录图, 在 S 波之后常可见到一连串长周期大振幅的规则振动, 这在周期范围能达到 20 秒以上的中长周期地震仪的记录图上十分明显。这种振动的振幅可在记录图上达到最大, 并且地震越大, 震中距离越大, 这些波列的延续时间越长, 但随着震源深度的增加而越来越弱, 甚至不出现。详细的分析表明这是一种表面波。面波是沿着两种介质的分界面 (或层) 传播的波。它的振幅一般随着离开界面 (层) 距离的增加而作指数衰减。如果它沿介质的自由表面 (如地表) 传播, 则振幅随着深度的增加而衰减, 因此, 面波的能量是集中在界面 (层) 附近而沿界面传播的。

地球介质的实际情况是十分复杂的。首先, 它是球形的, 表面有曲率, 不能看作半空间; 其次, 介质的性质如波速, 密度等随着深度的增加而变化 (一般是增加的), 不能看作是均匀弹性介质, 而是非完全弹性的, 存在波的吸收。但是为了抓住主要矛盾, 可以把它近似地看作均匀弹性半空间, 可使理论分析大为简化, 且可导出在半空间中沿着自由表面有一种表面波——瑞利波传播, 并得到许多基本性质。

根据观察表明, 面波一般传播速度不快, 只有 $3 \sim 4$ km/s 左右, 一般仪器记录到的面波周期都不超过一分钟, 而波长不大于 200 km, 比地球半径小得多, 因此, 可以不考虑地球的曲率。长周期地震记录到的面波波长可达几百米以上, 甚至有的仪器能记录到周期达几十分钟以上的波, 这时必须考虑地球的曲率。超长周期的面波 (周期达数十分钟) 与地球的固有振动有关。

设 x, y 坐标轴取在自由表面上, z 轴垂直向下; 均匀弹性介质充满 $z > 0$ 的半空间。设波沿着 x 轴方向传播, 在 y 方向波的相位完全相同, 即讨论平面二维情况。

令位移函数为

$$\phi = \phi(z) e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.3.1)$$

$$\psi = \psi(z) e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.3.2)$$

ϕ, ψ 应满足波动方程

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1.3.3)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c_\beta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.3.4)$$

而 x 、 z 方向的位移分量

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

将 (1.3.1)、(1.3.2) 分别代入 (1.3.3)、(1.3.4) 后, 得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{dz^2} - (k^2 - k_a^2) \phi &= 0; \\ \frac{d^2 \psi}{dz^2} - (k^2 - k_\beta^2) \psi &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

其中

$$k_a = \frac{\omega}{c_a}, \quad k_\beta = \frac{\omega}{c_\beta} \quad (1.3.7)$$

显见 (1.3.6) 解为

$$\begin{aligned} \phi &= Ae^{-az} + Ce^{az}; \\ \psi &= Be^{-bz} + De^{bz}. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

其中

$$a = \sqrt{k^2 - k_a^2}, \quad b = \sqrt{k^2 - k_\beta^2} \quad (1.3.9)$$

当 $z \rightarrow \infty$ 时, (1.3.8) 式中系数为 C 、 D 项趋于无穷大, 不满足于无穷远处的收敛条件, 舍之, 故有

$$\begin{aligned} \phi &= Ae^{-az} e^{i(kx - \omega t)}; \\ \psi &= Be^{-bz} e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

自然, 边界条件为

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zx}|_{z=0} = 0 \quad (1.3.11)$$

由 (1.2.5) 式得

$$\begin{aligned} [c_a^2 \nabla^2 \phi + 2c_\beta^2 (\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2})]_{|x=0} &= 0; \\ [2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}]_{|x=0} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

将 (1.3.10) 式代入 (1.3.12) 得

$$\begin{aligned} (2k^2 - k_\beta^2)A - (2ik\sqrt{k^2 - k_\beta^2})B &= 0; \\ (2ik\sqrt{k^2 - k_a^2})A + (2k^2 - k_\beta^2)B &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

如果 A 、 B 不全为零, 则 (1.3.13) 式的系数行列式为零, 则有

$$(2k^2 - k_\beta^2)^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - k_\beta^2} \sqrt{k^2 - k_a^2} = 0 \quad (1.3.14)$$

(1.3.14) 式称为瑞利方程, 或写成

$$(2x - 1)^2 - 4x\sqrt{x - m}\sqrt{x - 1} = 0 \quad (1.3.15)$$

式中

$$x = \frac{k^2}{k_\beta^2}, \quad m = \frac{k_a^2}{k_\beta^2} = \frac{c_\beta^2}{c_a^2} \quad (1.3.16)$$

解出 (1.3.15) 得

$$16(1-m)x^3 + 8(2m-3)x^2 + 8x - 1 = 0 \quad (1.3.17)$$

令 $x = 1$, 则 (1.3.17) 式左方 $= -1 < 0$, 令 $x \rightarrow +\infty$, 则 (1.3.17) 左方 $\rightarrow +\infty$ (注意 $m = \frac{c_\beta^2}{c_a^2} < 1$)。因此方程 (1.3.17) 在 1 与 $+\infty$ 之间至少有一个实根, 即

$$\frac{k^2}{k_\beta^2} = x > 1$$

或

$$k^2 > k_\beta^2, \frac{\omega^2}{c^2} > \frac{\omega^2}{c_\beta^2}$$

则有

$$c < c_\beta \quad (1.3.18)$$

由此可见, 对应的面波速度 c 既小于纵波速度 c_a , 又小于横波速度 c_β 。

下面在泊松固体 ($\lambda = \mu$) 的情况下作进一步讨论。因为 $\lambda = \mu$, 故

$$c_a^2 = 3c_\beta^2 \text{ 或 } k_a^2 = 3k_\beta^2 \quad (1.3.19)$$

将 (1.3.19) 代入 (1.3.15) 式, 对泊松固体得 $m = \frac{1}{3}$, 再代入 (1.3.17) 式得

$$32x^3 - 56x^2 + 24x - 3 = 0$$

或

$$(4x-1)(8x^2-12x+3) = 0$$

可解得 3 个根

$$x = \frac{1}{4}, \frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4} \quad (1.3.20)$$

由于要求 ϕ 和 ψ 都随着 z 的增加而衰减, 从 (1.3.8) 可见 a 、 b 都应是实数, 从 (1.3.9) 可见应有 $k > k_a$, $k > k_\beta$, 从 (1.3.16) 可见应有 $x > 1$, 而 (1.3.20) 式只有

$$x = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

满足要求。因此, $k^2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}k_\beta^2 = 1.183k_\beta^2$

$$k = 1.087k_\beta, \quad c = 0.9194c_\beta \quad (1.3.21)$$

由此可见, 在均匀半空间存在着这样的波, 它沿着自由表面 (x 轴) 传播, 它的振幅随着离开自由表面的距离的增加而衰减 (其位移函数 ϕ , ψ 按 e^{-az} 和 e^{-bz} 的规律衰减); 它的传播速度略小于横波速度, 并与 ω 无关 (即无频散现象), 这就是瑞利面波, 通常称之为瑞利波。

下面讨论瑞利波的质点位移。将 (1.3.10) 代入 (1.3.5), 并利用 (1.3.13) 式消去 B , 可得

$$\begin{aligned} u &= ikA \left(e^{-az} - \frac{2ab}{2k^2 - k_\beta^2} e^{-bz} \right) e^{i(kx - \omega t)}, \\ w &= A \left(-ae^{-az} + \frac{2k^2 a}{2k^2 - k_\beta^2} e^{-bz} \right) e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

取实部

$$u = Ak \left(e^{-az} - \frac{2ab}{2k^2 - k_\beta^2} e^{-bz} \right) \sin(\omega t - kx);$$

$$w = Ak \left(-\frac{a}{k} e^{-az} + \frac{2ka}{2k^2 - k_\beta^2} e^{-bz} \right) \cos(\omega t - kx). \quad (1.3.23)$$

(1.3.23) 为瑞利波的位移表达式, 可见当 $z \rightarrow \infty$, 有 $u \rightarrow 0$, $w \rightarrow 0$, 其波数为 k , 并且 x 和 z 方向的位移 u 和 w 位相差 $\frac{\pi}{2}$.

当介质为泊松固体时, 则有 (1.3.20) 式, k 的解为 (1.3.21) 式, 将 (1.3.21) 代入 (1.3.9) 可得

$$a = 0.8475k, \quad b = 0.3933k \quad (1.3.24)$$

将 (1.3.24)、(1.3.21) 代入 (1.3.23) 得

$$\begin{aligned} u &= Ak (e^{-0.8475kz} - 0.5773e^{-0.3933kz}) \sin(\omega t - kx); \\ w &= Ak (-0.8475e^{-0.8475kz} + 1.4679e^{-0.3933kz}) \cos(\omega t - kx). \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

当 $z = 0$, 即在自由表面上

$$\begin{aligned} u|_{z=0} &\approx 0.42Ak \sin(\omega t - kx); \\ w|_{z=0} &\approx 0.62Ak \cos(\omega t - kx). \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

由 (1.3.26) 式可见, 瑞利波在自由表面的质点是逆时针旋转的椭圆, 这个特点对于地震图上鉴别瑞利波是很重要的。它在垂直方向的位移大致为水平方向位移的一倍半。从 (1.3.25) 式可知, 水平运动 (即 u) 在 0.193 个波长的深处为零, 即当

$$z = 0.193, \quad \lambda = 0.193 \left(\frac{2\pi}{k} \right)$$

时有 $u = 0$, 在这个深度以下, 质点运动的轨迹为顺时针旋转的椭圆。

在实际情况下, 瑞利波沿着地表以震中为中心呈柱状向四周扩散, 而且它在震中附近并不存在, 只是当 S 波以临界角入射到地表, 使入射 P 波不均匀时才开始出现, 详细情况在此不详细介绍。

§ 1.4 成层介质中的 SH 型面波——乐甫波

在上一节中讨论了均匀半无限空间中的面波——瑞利波, 但实际地球介质要复杂得多, 例如上地幔介质的弹性性质有明显差别, 上地幔的波速 (P 波约 8.0 km/s) 要比地壳中的平均波速 (P 波约 6 km/s) 高, 密度也大, 因此, 厚度比较大的大陆地壳在形成面波中的作用应予以考虑。地震观测发现有一种 SH 型面波, 其质点振动方向与地表平行且垂直于波的传播方向。理论分析表明, 当横波波速较高的半无限空间上覆盖着低速层时, 则允许这种 SH 型面波沿层传播, 这种波称为乐甫波 (Love wave)。

一、乐甫波的形成条件及频散方程

设有均匀弹性半空间, 其上覆盖着弹性层, 用这样的模型来简单地描述地壳覆盖在地幔上的情况。取 x 、 y 坐标轴在自由表面上 ($z = 0$), z 轴垂直向下, 如图 1-2 所示。令层中横波速度为 c_{β_1} , 密度 ρ_1 , 半空间中横波速度为 c_{β_2} , 密度为 ρ_2 , 且有 $c_{\beta_1} < c_{\beta_2}$, 乐甫波振幅在层中为 V_1 , 在半空间为 V_2 。简化分析, 仍考虑平面波的情况, 并令波沿 x 轴方向传播, 由于考虑的是 SH 型面波, 因此振动应垂直于 x 轴且平行于分界面, 即振动应沿 y 轴方向进行。

V_1, V_2 应满足波动方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} &= \frac{1}{c_{\beta_1}^2} \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} &= \frac{1}{c_{\beta_2}^2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

与瑞利波类似, 可得

$$\begin{aligned} V_1 &= (Ae^{b_1 z} + Be^{-b_1 z})e^{i(kx - \omega t)}, \quad 0 < z < H; \\ V_2 &= Ce^{-b_2 z}e^{i(kx - \omega t)}, \quad z > H. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

其中

$$\begin{aligned} b_1 &= \sqrt{k^2 - k_{\beta_1}^2}, \quad k_{\beta_1} = \frac{\omega}{c_{\beta_1}}; \\ b_2 &= \sqrt{k^2 - k_{\beta_2}^2}, \quad k_{\beta_2} = \frac{\omega}{c_{\beta_2}}. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (1.4.4)$$

为要满足 $z \rightarrow +\infty$ 时的收敛条件, 在 V_2 中去掉了 $e^{b_2 z}$ 的项, 而 k 为波数, c 为面波速度。

(1.4.2) 式应满足自由表面边界条件和层与半空间界面的连续条件

$$\sigma_{zy}|_{z=0} = \mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial z} = 0 \quad (1.4.5)$$

$$V_1 = V_2;$$

$$\mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial V_2}{\partial z}. \quad (\text{当 } z = H \text{ 时}) \quad (1.4.6)$$

将 (1.4.2) 代入 (1.4.5)、(1.4.6) 式后化简得

$$\begin{aligned} A - B &= 0; \\ Ae^{b_1 H} + Be^{-b_1 H} &= Ce^{-b_2 H}; \\ \mu_1 b_1 (Ae^{b_1 H} - Be^{-b_1 H}) &= -\mu_2 b_2 Ce^{-b_2 H}. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

(1.4.7) 式中消去 B , 得

$$\begin{aligned} A(e^{b_1 H} + e^{-b_1 H}) - Ce^{-b_1 H} &= 0; \\ \mu_1 b_1 (e^{b_1 H} - e^{-b_1 H}) + C\mu_2 b_2 e^{-b_2 H} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

(1.4.8) 式 A, C 若不全为零, 必须其系数行列式为零

$$\begin{vmatrix} e^{b_1 H} + e^{-b_1 H} & -e^{-b_1 H} \\ \mu_1 b_1 (e^{b_1 H} - e^{-b_1 H}) & \mu_2 b_2 e^{-b_2 H} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.4.9)$$

解得

$$\text{th} b_1 H = \frac{e^{b_1 H} - e^{-b_1 H}}{e^{b_1 H} + e^{-b_1 H}} = -\frac{\mu_2 b_2}{\mu_1 b_1} \quad (1.4.10)$$

仔细研究 (1.4.10) 式表明, 欲使其成立, 应有

$$k_{\beta_2} < k < k_{\beta_1} \quad (1.4.11)$$

由 (1.4.11)、(1.4.5) 得

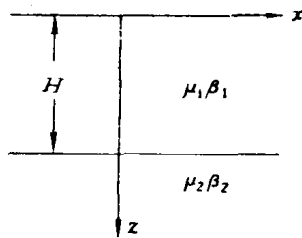


图 1-2