闻国椿 著

线性与非线性椭圆型复方程

上海科学技术出版社

线性与非线性椭圆型复方程

闻 国 椿 著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书主要讲述一阶、二阶、四阶线性与非线性椭圆型方程组的函数理论与边值问题。全书共有八章。第一章介绍了如何把一阶、二阶椭圆型方程组转化为复形式的方程；第二章讨论了较简单的复方程解的积分表示及其性质；第三、四、五章较详细的讲述了平面多连通区域上一阶线性与非线性椭圆型复方程解的函数论性质、一些基本边值问题与拟共形映射；第六、七、八章研究了二阶、四阶椭圆型方程与方程组解的一些基本性质与各种边值问题。

本书是作者在长期的科学研究与教学的基础上写成的，理论比较系统、充实，其中大部分内容是别的书中所没有的。可作为高等学校数学系高年级学生与研究生的选修课教材或教学、科研参考书；也可供高等学校数学教师及有关科技工作者参阅。

线性与非线性椭圆型复方程
闻国椿 著
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷
开本850×1156 1/32 印张12.25 插页0 字数325,000
1986年4月第1版 1986年4月第1次印刷
印数 1—4,000

统一书号：13119·1220 定价：3.00元

序　言

本书主要讲述平面多连通区域上的非线性一致椭圆型复方程(实方程、实方程组的复形式)解的函数论性质、边值问题与拟共形映射. 对于标准形式的线性一致椭圆型复方程, L. Bers 与 И.H. Векуа 等作过比较深入的研究,建立了系统的数学理论,他们分别把这种理论称为"准解析函数"与"广义解析函数". 现在我们把他们的工作推广到较一般的非线性一致椭圆型复方程上去, 并且对一般线性复方程的情形也给出了一些较完整的结果. 因此可以说本书的内容是 L. Bers 与 И. H. Векуа 等所建立的数学理论的继续与发展.

从书写的系统和所用的方法来说, 本书与《准解析函数论》与《广义解析函数》不同. 由于这里所讨论的主要是非线性椭圆型复方程,加于方程的系数条件较弱, 因此不能像上述著作那样, 将线性一致椭圆型方程、方程组化为标准形,然后就这种特殊的复方程进行研究. 而在本书中, 我们主要利用较一般的非线性椭圆型复方程解的表示定理, 建立相应复方程的解与解析函数或调和函数之间的对应关系,给出复方程解的各种性质,然后再讨论这些复方程的同胚解(拟共形映射)与各种边值问题的可解性.说得具体些,我们在证明非线性椭圆型复方程解的存在性时, 所采用的方法主要是:

1. 建立适合各种边界条件的积分算子或讨论拟共形映射函数所需要的积分算子及其性质.

2. 通过非线性椭圆型复方程解的第一类表示式或第二类表

示式，对各种边值问题的解或拟共形映射函数进行先验估计.

3. 恰当的使用 Fredholm 定理、连续性方法、Schauder 不动点定理与 Leray-Schauder 定理.

本书共分三编. 第一编是预备知识，共分两章. 第一章主要介绍如何把某些条件下的一阶、二阶线性、非线性椭圆型方程或方程组化为复形式[在第二编、第三编中，我们只就这种复形式的方程(复方程)进行讨论]. 第二章则建立适合各种边界条件的积分算子及其性质，这在以后各章中是要使用的. 第二编共有三章，主要讨论一阶线性、非线性一致椭圆型复方程解的几何理论(拟共形映射)、解析理论(函数论性质)与边值问题. 第三编共分三章，主要讨论二阶、高阶一致椭圆型复方程解的性质与各种边值问题. 本书中所述的大部分内容是作者近几年来的科学研究工作，还有一部分内容是作者及其合作者共同的科研结果. 对于国内外与椭圆型复方程有关的研究成果，本书中也作了一些介绍. 为了便于读者参阅，作者在参考文献中，收集了国内外有关椭圆型复方程的函数理论与边值问题的论文与著作，尤其较详细的列举了我国数学工作者有关的工作. 本书中所述的理论在弹性力学与流体力学等方面都有重要的应用，我们不准备在这里作介绍，关于这些应用可参看本书参考文献中 L. Bers 与 И. Н. Векуа 的有关著作及其中所列的一些论著.

为了不使本书的篇幅过多，对于 Г. М. Голузин 著的《复变函数的几何理论》、И. Н. Векуа 著的《广义解析函数》、L. Bers 著的《准解析函数论》、С. Л. Собелев 著的《泛函分析在数学物理中的应用》及 Ф. Д. Гахов 著的《边值问题》等书中已证明的结果，在这里不再作证明，而直接加以引用. 又这里使用的符号、术语与上述 Векуа 或 Bers 的书中所使用的相同.

本书的初稿在 1979～1984 年间曾作为北京大学数学系《广义解析函数》方向的研究生的教材，作者在教学过程中，听取了一些同志的意见，并进行了多次修改. 应当提到我们国内的同行，如李忠、孙和生、赵桢、侯宗义、李明忠、方爱农、杨广武等同志以及姜伯

驹同志，他们曾分别审阅了本书初稿的一部分内容，并提出了不少宝贵的意见和建议，作者在此对他们表示衷心的谢意．在修改本书原稿的过程中，虽然作者力图做到由浅入深，以便于读者参阅，但由于作者水平所限，缺点和错误在所难免，欢迎同志们批评、指正。

闻国椿于北京

1984年5月

目　录

第一编　预备知识　椭圆型方程与方程组的复形式、一些积分表示式及其性质

本书主要讨论平面上的一阶、二阶、四阶线性和非线性一致椭圆型复方程的函数理论与边值问题．在本编中，先将平面上的线性、拟线性、非线性椭圆型偏微分方程、方程组化为复形式(这种复形式的方程就称为复方程)；并且还要建立解析函数、调和函数以及较简单的椭圆型复方程的某些边值问题解的积分表示式与这些积分所具有的一些性质．这些结果在第二编、第三编中讨论各类较一般的椭圆型复方程解的性质、边值问题与拟共形映射时，都是要使用的．

第一章　椭圆型方程与方程组的复形式

在本章中，先将在平面区域上满足某些条件的一阶线性、拟线性、非线性椭圆型偏微分方程组化为复形式，然后把平面区域上满足一定条件的二阶线性、非线性椭圆型方程、方程组化为复形式，并对一阶线性一致椭圆型复方程与二阶线性一致椭圆型方程的系数作较强的假设下，将它们化为标准形．为了叙述方便，除了特别说明外，在本章前两节中所讨论的方程与方程组的解都认为是区域上连续可微的古典解（对于一阶方程组，设其解在所考虑的区域内具有一阶连续偏微商，对于二阶方程与方程组，认为其解具有二阶连续偏微商），而要保证这种古典解的存在性，对方程与方程组的系数也要作相应的假设．在本章的最后一节，我们要对各类椭圆型复方程加上在后面各章中所需要的一些条件．

§1　一阶椭圆型偏微分方程组的复形式与标准形

一　一阶线性椭圆型方程组的复形式

对于平面区域 D 上一般的一阶线性偏微分方程组

$$\left.\begin{aligned}a_{11}u_x+a_{12}u_y+b_{11}v_x+b_{12}v_y=a_1u+b_1v+c_1,\\ a_{21}u_x+a_{22}u_y+b_{21}v_x+b_{22}v_y=a_2u+b_2v+c_2,\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中系数 a_{jk}、b_{jk}、a_j、b_j、c_j(j、$k=1,\ 2$) 都是区域 D 内点 $(x,\ y)$ 的已知函数．方程组(1.1)在 D 内一点 $(x,\ y)$ 的椭圆型条件，即对任意不同时为 0 的实数 ξ、η，在此点，以下二次代数式不等于 0，不妨设大于 0，即

$$
\left.\begin{aligned}
K(\xi,\ \eta)=&\begin{vmatrix} a_{11}\xi+a_{12}\eta & b_{11}\xi+b_{12}\eta \\ a_{21}\xi+a_{22}\eta & b_{21}\xi+b_{22}\eta \end{vmatrix}\\
&=K_1\xi^2+(K_2+K_3)\xi\eta+K_4\eta^2>0,\\
K_1=&\begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{21} \end{vmatrix},\quad K_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix},\\
K_3=&\begin{vmatrix} a_{12} & b_{11} \\ a_{22} & b_{21} \end{vmatrix},\quad K_4=\begin{vmatrix} a_{12} & b_{12} \\ a_{22} & b_{22} \end{vmatrix}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.2}
$$

[如果$K(\xi,\ \eta)<0$，只要将(1.1)的第一式乘以-1，则a_{1k}、$b_{1k}(k=1、2)$等变号，于是有$K(\xi,\ \eta)>0$]. 若对于区域D内的每一点，方程组(1.1)都是椭圆型的，则称(1.1)在D内是椭圆型的. 而不等式(1.2)成立的充要条件是

$$
I=4K_1K_4-(K_2+K_3)^2>0,\ K_1>0. \tag{1.3}
$$

记
$$
K_5=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad K_6=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},
$$

由于
$$
I=4K_5K_6-(K_2-K_3)^2>0,
$$

因此
$$
K_1K_6>0 \text{ 或 } K_1K_6<0,\ \text{即 } K_6\neq 0.
$$

这样，就可从方程组(1.1)解出v_y和$-v_x$，得到方程组

$$
\left.\begin{aligned}
v_y&=au_x+bu_y+a_0u+b_0v+f_0,\\
-v_x&=du_x+cu_y+c_0u+d_0v+g_0,
\end{aligned}\right\} \tag{1.4}
$$

其中a、b、c、d都是a_{jk}、b_{jk}的已知函数，a_0、b_0、c_0、d_0、f_0、g_0都是b_{jk}、a_j、b_j、$c_j(j,\ k=1,\ 2)$的已知函数，而

$$
a=\frac{K_1}{K_6},\quad b=\frac{K_3}{K_6},\quad c=\frac{K_4}{K_6},\quad d=\frac{K_2}{K_6},
$$

故椭圆型条件(1.3)转化为

$$
\Delta=\frac{I}{4K_6^2}=ac-\frac{1}{4}(b+d)^2>0,\quad a>0 \tag{1.5}
$$

(若$a<0$，即$K_6<0$，此时只要将方程组(1.1)中的y代以$-y$，便可使$K_6>0$，因而$a>0$). 如果在区域D内，方程组(1.1)的系数a_{jk}、$b_{jk}(j,\ k=1,\ 2)$均有界，且

$$
I=4K_1K_4-(K_2+K_3)^2\geqslant I_0>0,\ K_1>0. \tag{1.6}
$$

这里 I_0 是正常数，则称方程组(1.1)在 D 内是一致椭圆型的．而方程组(1.4)的一致椭圆型条件为

$$\Delta=ac-\frac{1}{4}(b+d)^2\geqslant\Delta_0>0,\quad a>0. \tag{1.7}$$

这里 Δ_0 是正常数．并由 $K_6\geqslant\dfrac{I_0}{4K_5}\geqslant K_0>0$ 可推知 a、b、c、d 在 D 内都是有界的．

引入记号

$$\left.\begin{aligned}
&z=x+iy,\ \bar{z}=x-iy,\ w=u+iv,\ \bar{w}=u-iv,\\
&w_z=\frac{1}{2}[w_x-iw_y]=\frac{1}{2}[u_x+v_y+i(v_x-u_y)],\\
&w_{\bar{z}}=\frac{1}{2}[w_x+iw_y]=\frac{1}{2}[u_x-v_y+i(v_x+u_y)],\\
&u_x=\frac{1}{2}[w_z+\bar{w}_{\bar{z}}+w_{\bar{z}}+\bar{w}_z],\ u_y=\frac{i}{2}[w_z-\bar{w}_{\bar{z}}-w_{\bar{z}}+\bar{w}_z],\\
&v_x=\frac{i}{2}[-w_z+\bar{w}_{\bar{z}}-w_{\bar{z}}+\bar{w}_z],\ v_y=\frac{1}{2}[w_z+\bar{w}_{\bar{z}}-w_{\bar{z}}-\bar{w}_z].
\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

将(1.4)的第二式乘 $-i$ 减去第一式，并由(1.8)式，可将方程组(1.4)转化成复形式：

$$(q_1+1)w_{\bar{z}}+q_2\bar{w}_z=-q_2w_z-(q_1-1)\bar{w}_{\bar{z}}+r_1w+r_2\bar{w}+r_3, \tag{1.9}$$

其中 r_1、r_2、r_3 都是 a_0、b_0、c_0、d_0、f_0、g_0 的已知函数，而

$$q_1=\frac{1}{2}[a+c+i(d-b)],\ q_2=\frac{1}{2}[a-c+i(d+b)].$$

将复方程(1.9)取共轭，得

$$\bar{q}_2w_{\bar{z}}+(\bar{q}_1+1)\bar{w}_z=-(\bar{q}_1-1)w_z-\bar{q}_2\bar{w}_{\bar{z}}-\bar{r}_2w+\bar{r}_1\bar{w}+\bar{r}_3. \tag{1.10}$$

从(1.9)、(1.10)可解出

$$w_{\bar{z}}=Q_1(z)w_z+Q_2(z)\bar{w}_{\bar{z}}+A_1(z)w+A_2(z)\bar{w}+A_3(z), \tag{1.11}$$

这里 $A_j(j=1,2,3)$ 都是 q_1、q_2、r_1、r_2、r_3 的已知函数，又

$$Q_1(z)=\frac{-2q_2}{|q_1+1|^2-|q_2|^2},\ Q_2(z)=\frac{|q_2|^2-(q_1-1)(\bar{q}_1+1)}{|q_1+1|^2-|q_2|^2}. \tag{1.12}$$

容易算出:

$$|q_1+1|^2-|q_2|^2=\frac{1}{4}[(2+a+c)^2+(d-b)^2]-\frac{1}{4}[(a-c)^2$$

$$+(d+b)^2]=1+a+c+\frac{(d-b)^2}{4}+\Delta\geqslant 1+\Delta,$$

记 $\sigma=\frac{1}{4}(d-b)^2+\Delta$, 则方程组(1.4)的椭圆型条件(1.5)转化为

$$|Q_1(z)|+|Q_2(z)|\leqslant\frac{\sqrt{(a+c)^2-4\Delta}+\sqrt{(1+\sigma)^2-4\Delta}}{1+a+c+\sigma}<1, \tag{1.13}$$

而一致椭圆型条件(1.6)转化为

$$|Q_1(z)|+|Q_2(z)|\leqslant q_0<1, \tag{1.14}$$

这里 q_0 是非负常数.

如果方程组(1.4)的系数 $b=d$, 且 $\Delta=ac-b^2=1$, 则(1.12)式中的 $Q_2(z)=0$, 此时方程组(1.4)的复形式为

$$w_{\bar z}=Q_1(z)w_z+A_1(z)w+A_2(z)\bar w+A_3(z). \tag{1.15}$$

又若方程组 (1.4) 的系数 $b=d$, $\Delta=1$, $a_0=b_0=c_0=d_0=f_0=g_0=0$, 这时称(1.4)为 Beltrami 方程组. 其复方程为

$$w_{\bar z}=Q_1(z)w_z. \tag{1.16}$$

若椭圆型方程组(1.4)的系数 $a=c=p$, $b=-d=q$, 此时(1.12)式中的 $Q_1(z)=0$, 而 (1.4) 的复方程为

$$w_{\bar z}=Q_2(z)\overline{w_{\bar z}}+A_1(z)w+A_2(z)\bar w+A_3(z). \tag{1.17}$$

又若 $A_j(z)=0(j=1, 2, 3)$, 复方程(1.17)成为

$$w_{\bar z}=Q_2(z)\overline{w_{\bar z}}. \tag{1.18}$$

而当(1.17)的系数 $Q_2(z)=0$、$A_3(z)=0$ 时, 则得复方程

$$w_{\bar z}=A_1(z)w+A_2(z)\bar w. \tag{1.19}$$

如果方程组 (1.4) 的系数 $a=c=1$, $b=d=a_0=b_0=c_0=d_0=f_0=g_0=0$, 那么就得哥西-黎曼方程组

$$v_y=u_x,\ \ -v_x=u_y. \tag{1.20}$$

其复形式为

$$w_{\bar z}=0. \tag{1.21}$$

哥西-黎曼方程组(1.20)或复方程(1.21)在区域内的单值解 $w(z)$ 称为解析函数. 显然, 复方程(1.19)、(1.18)都是(1.21)的推广. И. Н. Векуа 在书[84]1)中把复方程 (1.19) 在区域内的解叫作广义解析函数, L. Bers 在书[8]1)中则把这样的解叫作第一类准解析函数, 并把复方程(1.18)的解叫作第二类准解析函数, 而 Г. Н. Положий 在书[73]中则把复方程(1.18)的解叫作(p,q)-解析函数. 在下一小节中, 还将说明: 利用 Beltrami 方程(1.16)的同胚解, 对一致椭圆型复方程(1.11)进行自变量的变换, 可将(1.11)转化为形如(1.17)的复方程; 并且对复方程(1.17)的系数作较强的假定下, 还可把(1.17)转化为形如(1.19)的标准复方程. 这些内容也可参看[84]1)第二章§7、[8]1)§19以及[57]1)§1.

二　把一阶线性一致椭圆型复方程化为标准形

现在我们设 D 是 z 平面上的有界区域, 复方程(1.11)的系数 $Q_j(z)(j=1, 2)$、$A_j(z)(j=1, 2, 3)$ 在 D 内可测, 且在 D 内几乎处处满足

$$|Q_1(z)|+|Q_2(z)|\leqslant q_0<1 \text{ 及 } \|A_j(z)\|_{L_p(D)}\leqslant k_0<\infty, \tag{1.22}$$

这里 q_0、k_0、$p(>2)$ 都是实常数, 令 $Q_j(z)=0$, $A_j(z)=0$, 当 $z\overline{\in} D$.

引理1.1　设 $\zeta=\zeta(z)$ 是以下 Beltrami 方程将 z 平面映射到 ζ 平面的同胚解, 使 $\zeta(0)=0$, $\zeta(\infty)=\infty$;

$$\zeta_{\bar z}=\eta(z)\zeta_z,\quad \eta(z)=\frac{2Q_1}{1+|Q_1|^2-|Q_2|^2+\sqrt{(1+|Q_1|^2-|Q_2|^2)^2-4|Q_1|^2}}, \tag{1.23}$$

又以 $z=z(\zeta)$ 表示 $\zeta=\zeta(z)$ 的反函数, 则 $w=w(z)$ 为复方程(1.11)在区域 D 内的解的充要条件是: $w=w[z(\zeta)]$ 为以下复方程在区域 $G=\zeta(D)$ 内的解:

$$w_{\bar\zeta}=Q(\zeta)\overline{w_\zeta}+B_1(\zeta)w+B_2(\zeta)\overline{w}+B_3(\zeta), \tag{1.24}$$

其中
$$\left.\begin{aligned}
&Q(\zeta)=\frac{Q_2[z(\zeta)]}{1-\eta[z(\zeta)]Q_1[z(\zeta)]},\\
&B_1(\zeta)=\{A_1[z(\zeta)]+\overline{A_2[z(\zeta)]}Q(\zeta)\eta[z(\zeta)]\}\bar{z}_{\bar{\zeta}},\\
&B_2(\zeta)=\{A_2[z(\zeta)]+\overline{A_1[z(\zeta)]}Q(\zeta)\eta[z(\zeta)]\}\bar{z}_{\bar{\zeta}},\\
&B_3(\zeta)=\{A_3[z(\zeta)]+\overline{A_3[z(\zeta)]}Q(\zeta)\eta[z(\zeta)]\}\bar{z}_{\bar{\zeta}}.
\end{aligned}\right\}\tag{1.25}$$
而 $Q(\zeta)$ 在 ζ 平面上有界可测，几乎处处满足
$$|Q(\zeta)|\leqslant q_0'<1,\ q_0'=\text{常数}.\tag{1.26}$$
又若复方程 (1.11) 的系数 $Q_j(z)\in C_\mu(E)\,(0<\mu<1;j=1,\ 2)$，则 $B_j(\zeta)\in L_p(E)\,(p>2;j=1,\ 2)$. 这里 E 表示全平面.

证明 关于 Beltrami 方程 (1.23) 如引理中所述同胚解 $\zeta(z)$ 的存在性可参看书 [84]1) 定理 2.14. 由 $w=w[z(\zeta)]=f(\zeta)=f[\zeta(z)]$，有
$$w_{\bar{z}}=w_\zeta\zeta_{\bar{z}}+w_{\bar{\zeta}}\bar{\zeta}_{\bar{z}},\ w_z=w_\zeta\zeta_z+w_{\bar{\zeta}}\bar{\zeta}_z,\tag{1.27}$$
代入复方程(1.11)，得
$$\begin{aligned}(1-\bar{\eta}Q_1)\bar{\zeta}_{\bar{z}}w_{\bar{\zeta}}-\eta Q_2\zeta_z\overline{w}_{\bar{\zeta}}=&(Q_1-\eta)\zeta_z w_\zeta+Q_2\bar{\zeta}_{\bar{z}}\overline{w}_\zeta\\&+A_1w+A_2\overline{w}+A_3.\end{aligned}$$
将以上复方程与取共轭的复方程联立，可求得
$$\begin{aligned}w_{\bar{\zeta}}=&\frac{1}{[|1-\eta\bar{Q}_1|^2-|\eta Q_2|^2]|\zeta_z|^2}\{[(1-\eta\bar{Q}_1)(Q_1-\eta)\\&+\eta|Q_2|^2](\zeta_z)^2w_\zeta+Q_2(1-|\eta|^2)|\zeta_z|^2\overline{w_\zeta}\\&+[A_1(1-\eta\bar{Q}_1)+\bar{A}_2\eta Q_2]\zeta_zw+[A_2(1-\eta\bar{Q}_1)\\&+\bar{A}_1\eta Q_2]\zeta_z\overline{w}+[A_3(1-\eta\bar{Q}_1)+\bar{A}_3\eta Q_2]\zeta_z\}.\end{aligned}\tag{1.28}$$
对以上复方程进行简化，即得复方程(1.24). 反之，也可由复方程(1.24)导出(1.11).

如果(1.11)的系数 $Q_j(z)\in C_\mu(E)$，则(1.23)的 $\eta(z)\in C_\mu(E)$ 由[84]1)定理 2.12、定理 2.14 及其证明，可知 $\zeta(z)$ 及其反函数 $z(\zeta)\in C^1_\mu(E)$，故(1.25)式中的 $B_j(\zeta)\in L_p(E)(p>2;j=1,2,\ 3)$.

有了以上引理，我们可将形如 (1.11) 的复方程转化为形如 (1.24)的复方程. 如果对复方程(1.24)的系数 $Q(\zeta)$ 作较强的假定，还可将(1.24)化为较简单的复方程.

引理 1.2 设复方程 (1.24) 的系数 $Q(\zeta)\in W^1_{p_0}(G)$ (即 $\bar{D}_{1,p_0}(G)$)$(2<p_0<p)$，则 $w(\zeta)$ 是复方程(1.24)在区域 G 内的解的充要条件是：$w_*(\zeta)=w(\zeta)-Q(\zeta)\overline{w(\zeta)}$ 是以下标准形复方程在 G 内的解：

$$w_{*\bar{\zeta}}=C_1(\zeta)w_*+C_2(\zeta)\bar{w}_*+C_3(\zeta), \tag{1.29}$$

$$C_1(\zeta)=\frac{B_1+(B_2-Q_{\bar{\zeta}})\bar{Q}}{1-|Q|^2},\ C_2(\zeta)=\frac{B_1Q+(B_2-Q_{\bar{\zeta}})}{1-|Q|^2},$$
$$C_3(\zeta)=B_3. \tag{1.30}$$

证明 由 $w_*(\zeta)=w(\zeta)-Q(\zeta)\overline{w(\zeta)}$，可得 $w(\zeta)=\dfrac{w_*+Q\bar{w}_*}{1-|Q|^2}$。容易验证：若 $w(\zeta)$ 是复方程(1.24)在区域 G 内的解，则 $w_*(\zeta)$ 就是复方程(1.29)在 G 内的解．反之，若 $w_*(\zeta)$ 是(1.29)在 G 内的解，则 $w(\zeta)$ 是(1.24)在 G 内的解．

从上面的讨论可以看出：如果复方程(1.11)的系数满足条件(1.22)，且 $Q_j(z)\in W^1_{p_0}(E)$ $(p_0>2;\ j=1,\ 2)$，则 (1.23) 式中的 $\eta(z)\in W^1_{p_0}(E_R)$，$E_R$ 是 $|z|<R(<\infty)$，则由 [84]1) 中定理 2.3 可知引理 1.1 中所述的同胚解 $\zeta(z)$ 及其反函数 $z(\zeta)\in W^2_{p_0}(E_R)$，因而复方程 (1.24) 的系数 $Q(\zeta)\in W^1_{p_0}(E)$，$B_j(\zeta)\in L_{p_0}(E)$ $(j=1,\ 2,\ 3)$，这样就可将一般复方程(1.11)的讨论转化到标准形复方程(1.29)上来，此时(1.29)的系数 $C_j(\zeta)\in L_{p_0}(E)(j=1,\ 2,\ 3)$．L. Bers 在书[8]1)中与 И. Н. Векуа 在书[84]1)中主要就是讨论标准形复方程(1.29)．

如果复方程(1.11)的系数只满足较弱的条件 (1.22)，$Q_1(z)$、$Q_2(z)\in W^1_{p_0}(E)$，我们也可找出复方程(1.11)在区域 D 内的解与形如(1.18)的复方程的解之间的关系．现在叙述并证明作者在文献[91]4)中所得的结果．

定理 1.1 设 $w(z)$是复方程(1.11)在有界区域 D 内的解，则 $w(z)$ 可表示成

$$w(z)=\frac{1}{2}(F-iG)W(z)+\frac{1}{2}(F+iG)\overline{W(z)}, \tag{1.31}$$

其中 $F(z)$、$G(z)$ 是 (1.11) 的齐次复方程在全平面 E 上的解，当

$z \to \infty$ 时，$F(z) \to 1$，$G(z) \to i$，而 $W(z)$ 是以下复方程在区域 $\bar{D}$ 内的解：

$$W_{\bar{z}} = q_1(z) W_z + q_2(z) \overline{W}_{\bar{z}} + b(z), \qquad (1.32)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&q_1(z) = Q_1[|F-iG|^2 - |F+iG|^2]/q,\\
&q = |(F-iG) - Q_2\overline{(F+iG)}|^2 - |Q_1(F+iG)|^2,\\
&q_2(z) = \{|Q_1|^2\overline{(F-iG)}(F+iG) - [(F+iG)\\
&-Q_2\overline{(F-iG)}][\overline{(F-iG)} - \bar{Q}_2(F+iG)]\}/q,\\
&b(z) = \{2A_3[\overline{(F-iG)} - \bar{Q}_2(F+iG)] + 2\bar{A}_3 Q_1(F\\
&+iG)\}/q \in L_{p_0}(E),\\
&|q_1(z)| + |q_2(z)| \leqslant q_0'' < 1,\ q_0'' = \text{常数}.
\end{aligned}\right\}(1.33)$$

反之，若 $W(z)$ 是复方程(1.32)在区域 D 内的解，则 $W(z)$ 可表示成

$$W(z) = \frac{\bar{G} - i\bar{F}}{F\bar{G} - \bar{F}G} w(z) - \frac{G - iF}{F\bar{G} - \bar{F}G} \overline{w(z)}, \qquad (1.34)$$

其中 $w(z)$ 是复方程(1.11)在 D 内的解.

证明 由书[84]1) 定理 3.33 及定理 1.19，可知(1.11)的齐次复方程在全平面 E 上存在着解

$$F(z) = 1 + Tf,\quad G(z) = i + Tg,\quad f(z)、g(z) \in L_{p_0}(\bar{D}),$$

这里 $$T\omega = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z}\, d\sigma_\zeta,\ 2 < p_0 < q,$$

并且 $F(z)$、$G(z) \in C_\alpha(E)$，$\alpha = \dfrac{p_0 - 2}{p_0}$，又当 $z \to \infty$ 时，$F(z) \to 1$，$G(z) \to i$. 此外，我们可证 $\mathrm{Im}[\overline{F(z)}G(z)] > 0$. 先证 $\mathrm{Im}[\overline{F(z)}G(z)] \neq 0$. 假如不然，则在 E 上有点 z_0，使 $\mathrm{Im}[\overline{F(z_0)}G(z_0)] = 0$，

即 $$\begin{vmatrix} ReF(z_0) & \mathrm{Im}F(z_0) \\ ReG(z_0) & \mathrm{Im}G(z_0) \end{vmatrix} = 0,$$

因而存在不全等于 0 的实常数 C_1、C_2，使 $C_1F(z_0) + C_2G(z_0) = 0$. 由于当 $z \to \infty$ 时，$C_1F(z) + C_2G(z) \to C_1 + C_2 i \neq 0$，根据[84]1)定理 3.31，可将 (1.11) 的齐次复方程的解 $C_1F(z) + C_2G(z)$ 表示成 $(C_1 + C_2 i)e^{\varphi(z)}$，$\varphi(z) \in C_\alpha(E)$，特别是