絕对微分学

Tullio Levi-Civita 原著
Adalbert Duschek 德譯
湯璪眞重譯

商务印書館

絕对微分学

及其几何上与
物理上之应用

Tullio Levi-Civita 原著
Adalbert Duschek 德譯
湯璪眞 重譯

商务印書館

絕对微分学

Der Absolute Differentialkalkül
und Seine Anwendungen in
Geometrie und Physik

Tullio Levi-Civita 原著
Adalbert Duschek 德譯
湯璪眞 重譯

商務印書館出版
上海河南中路二一一號
〔上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號〕
新華書店總經售
商務印書館上海廠印刷
13017·131

1951年10月初版　　開本 850×1168 1/32
1957年6月再版　　印張 13 13/16
1957年6月上海第1次印刷　　印數 2,001—4,500
定價(10) ¥2.10

序

Riemann 氏的一般量法和 Christoffel 氏的一個公式構成絕對微分學的基礎,從 1887 至 1896 始由 Ricci, 以後更由他那些門人,繼續不斷地研究,這才成爲數學中有系統的一獨立分支.

從這些年數和以後底豐富底著作當中, 現在僅舉出 Ricci 和著者於 1901 應 Felix Klein 之約, 發表在德國數學年報第五十四卷上面連成一貫底報告,自此以後除 Wright 著有 Invariants of Quadratic Differential Forms (Cambridge University Press 1908 出版)外,直到 Einstein 的普遍相對論出世之時, 才再引起 Ricci 創著上濃厚底趣味. 大家知道, 剛好這絕對微分學供給 Einstein 氏理論中數學說明的必需工具. Einstein 自己也曾說過, 他這理論是由 Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci,…… 所創立底一般微分方法的一個眞底勝利[1].

本書內容先(第一篇, 第二篇) 論代數底基礎, 隨即用純粹幾何底表示來敍述二次微分形式之理論的一個初步. 在

---

[1] Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzgsber. d. preuss, Akad. 1915, 778–786 面.

第二篇的中心點,有一個向量沿已知曲線平行變位的概念,這是以後一切研究的基礎.和其他書籍[2]說法主要不同之點,恰好就在這個概念的介紹.意大利原著,[3]在這兩篇之前,還有三篇,一關於函數行列式和函數行列陣,二關於全微分方程,三關於一次偏微分方程和完全系.這三篇在此地以種種理由概行略去,有些因爲讀以下各篇不甚需要他,有些甚需要的由譯者臨時設法補充或竟完全更改,所以把第一篇看去,要和原文相差很多.

從第三篇起到第七篇,是敍述絕對微分學的本身及其幾何應用,係按意大利原著各篇翻譯,毫無變更的處所.

末了(第八篇,第九篇)也和意文原本譯成英文出版[4]底譯本同樣,沒有多大變更.所論者是屬於力學和幾何光學兩方面的相對論.但是沒有涉及磁電的範圍.在此地著者所採用的方法,是從古典的定律出發,去研究這種定律會起甚麼變化,假如我們先定下兩個條件:第一條件說此種變化,是極微小,在尋常情況之下,認爲可以略去不計;第二條件說起了變化後底新定律,是不會因那些不變更四度時空世界中某微分形式底一切變換而變.著者演講中和出版物上常

[2] Struick, *Mehrdimensionale Differentialgeometrie in direkter Darstellung* 1922, 和 Schouten, Der Ricci-Kalkül 1924 均在柏林 Julius Springer 出版.

[3] Lezioni di calcolo differenziale assoluto. Raccolto e compilate dal Dott. E. Persico (Rom: Stock 1925).

[4] Miss M. Long 譯 (London, Blackie & Son, Ltd. 1927 年出版).

用這個方法,其見解無非要把相對力學的公準,化到抽象底張量形式去,使他極普遍而且包括極廣,雖則益見沒有直覺意義了.

本書和原著不同底,還有一點,是前後一律改用近時張量算學的寫法和記法,有時也應用歐氏空間的初等的向量解析.

爲便利檢閱起見,更集合前四篇中各重要公式,附於書末,成爲公式一覽.

羅馬, 1926 八月　　Tullio Levi-Civita 原著

維也納, 1928 九月　　Adalbert Duschek 翻譯

武昌, 1931 五月　　湯璪眞　　重譯

重譯者序

(和羅馬大學教授 Levi-Civita 氏討論絕對微分學的經過及其主要內容)*

羅馬大學力學教授 Levi-Civita (以下簡稱利氏) 所著之絕對微分學又可名為張量(亦譯引量)計算學，就其內容觀之，更可視為黎曼微分幾何學，乃現代數學界中之名著也，已有若干學者由意文譯成英，法，德諸國文字，風行於全世界矣.

予既譯之成中文，發覺其中第四篇論輪回變位 (zyklische Verschiebung, Cyclic displacement) 之一節須應用下式

$$\delta'(\Phi+\delta\Phi)=\delta'\Phi+\delta'\delta\Phi$$

所代表之微分的分配性質. 此點實絕對微分學之一難關，最易引人誤入迷途，因予意以為此性質必須改為

(1) $$\delta'(\Phi+\delta\Phi)=\delta\Phi+\delta\delta'\Phi$$

也. 此關不能渡過，則絕對微分學斷無眞正了解之希望. 因此三致書於德文譯者 Duschek 博士. 雖有復書而皆反對予之意見. 其復書中以為予提之異議，不獨與利氏之說相反，且與 Weyl 及 Schouten 二大著作家之意見亦不相容，此外則

*國立武漢大學理科季刊第四卷第三期中業已登載. 其標題為「絕對微分學的一個難關」.

攻擊予提之異議,並另舉其他問題以相難.博士旣不以予之說爲然,予乃另致一書於英文譯者 Long 女士,然久未得覆.於是決定直接與利氏通信,請其以英文或德文答覆.歷時近兩載,往復逾十函.其以前寄來各函亦無一贊成予之意見者,甚至有

Wenn man Ihrer Rechnung folgt, findet man alles in Ordnung bis auf die Formel (1).

一語,即謂"依子之算法,一切合理,惟(1)式須除外耳."夫其人已享如彼之盛名,而其言又復如此之堅決,且予最近所去之第五函彼亦遲遲未復,予因之而愈疑惑不解矣.不意以後卒得其復函,略謂予言有理,且將樂爲予發表之云云,予心乃大慰,今追記其討論之經過於上,所以示予業已打破絕對微分學之一難關也.後之讀此書者,或不至到此仍誤入迷途乎.

予所欲言之經過已止於此,其他瑣碎皆非重要,故可從略.以下所應補敍者爲上文(1)式必須成立之理由.但此項理由已見予致利氏各函中,故將原函錄之於後即可.凡欲讀此函者須略有準備:因此先說明利氏所創之平行變位的學說於下:

設有一向量場,其在 P 點(或命其 n 坐標爲 x^a 再呼其點爲 x^a 點)之向量爲 Φ(或命其分量爲 u^r 而呼其向量爲 u^r 向量)而在其隣點 $P+dP$(或 x^a+dx^a 點)之向量爲 $\Phi+d\Phi$(或 u^r+du^r),則此二向量所生之差計有三種:

$a.$ 其一曰 u^ν 之相對微分亦即尋常微分，乃 u^ν 變成 $u^\nu+du^\nu$ 時所增之 du^ν 也. 此時坐標腿從 P 點至隣點 $P+dP$ 宜視爲無變化.

$b.$ 其二曰 u^ν 之輸荷微分亦即 Führungsdifferential，乃視 u^ν 不變而視坐標腿從 P 點至隣點 $P+dP$ 有變化時所生之 $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}u^\lambda dx^\mu$ 也. 此處之 $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ 係三字記號 $\{^{\lambda\mu}_{\nu}\}$ 之別寫，在下文並以適用於黎曼幾何學者爲限.

$c.$ 其三曰 u^ν 之絕對微分，乃上述兩種微分之總和也. 因之得

$$u^\nu \text{之絕對微分} = du^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}u^\lambda dx^\mu$$

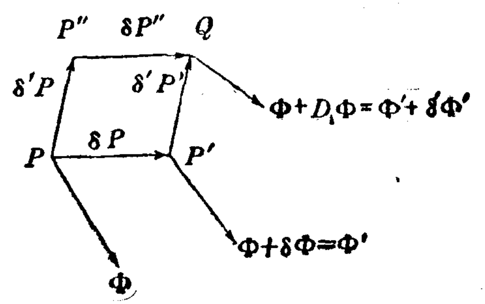
此公式可適用於任意之向量場，反之從此公式命 u^ν 之絕對微分 $=0$，則得一部分之向量場，其場中每兩相隣之向量 u^ν 與 $u^\nu+du^\nu$ 名曰平行向量，其所受之條件由上述公式亦可寫爲

$$du^\nu = -\Gamma^\nu_{\lambda\mu}u^\lambda dx^\mu,$$

其名曰平行之微分方程. 此即利氏之絕對平行概念. 由此產生種種理論，所謂輪回變位不過其中之一種耳.

輪回變位之意義即謂一向量漸漸平行移動使其始點沿任意閉合曲線環轉一周回至原處也，其向量是否還至原位置，則須視空間之性質而決定之，在歐氏空間能還至原位置者也，在其他空間則通例不如是之簡單. 欲知其理自可利用上述平行之微分方程以研究之. 但利氏則否. 氏之方法係

先取一無窮小之平行四邊形 $PP'QP''$ 爲閉合曲線考之(看參下圖). 命 $P'=P+\delta P$, $P''=P+\delta' P$, 於是由平行四邊形之性質可命 $Q=P'+\delta' P'=P''+\delta P''$. 次假設平行移動之向量 $\Phi(=w^r)$ 之始點自 P 點起沿四邊形上 $PP'QP''P$ 之方向回至 P 點,於是向量 Φ 通例必起變化. 命其所增之量爲 $\Delta\Phi$, 則 $\Delta\Phi$ 可視爲由兩部分合成:



其第一部分爲向量 Φ 之始點,自 P 點起沿 $PP'Q$ 路變至 Q 止,所增之量 $D_1\Phi$, 其第二部分可不贅述. 欲算 $\Delta\Phi$ 必須先算 $D_1\Phi$. 而算 $D_1\Phi$ 時又可分爲二部分,其一爲 Φ 平行變至 $\Phi+\delta\Phi$ 時所增之 $\delta\Phi$, 其二爲 $\Phi'(=\Phi+\delta\Phi)$ 平行變至 $\Phi+D_1\Phi$ 時所增之 $\delta'\Phi'$,亦即 $\delta'(\Phi+\delta\Phi)$. 予與利氏所爭之點即在此處. 利氏計算此第二部分之法係先承認

$$\delta'(\Phi+\delta\Phi)=\delta'\Phi+\delta'\delta\Phi$$

所代表之微分的分配性質,而予則反對之. 其始予以爲係利氏一時之筆誤耳,然就其前後文觀之,則又非成爲一種錯

誤不可. 而 Duschek 博士反不以予之言爲然, 又著向量計算之 Lagally 教授博士(於其書之 330 面) 以及著同類書籍之不少著作家亦皆陷於同一之錯誤而不自覺, 予以爲此項錯誤若不更正, 則學絕對微分學者必至誤入迷途, 終乃發生種種疑問矣. 因此鼓其勇氣以與利氏爭. 玆將予之第五次去函(另附以中文, 以便閱讀), 錄之於下:

予之第五次去函曰:

(前略)

In Ihrem werten Brief vom 13. Juli (先生七月十三號之尊函中) haben Sie geschrieben, dass die Gleichung (曾言下列等式)

$$\delta'(\Phi+\delta\Phi)=\delta'\Phi+\delta'\delta\Phi$$

gilt (成立), weil sie eine notwendige Folge der additiven Eigenschaft

$$\delta'(A+B)=\delta' A+\delta' B$$

ist (因其爲上式中加法的性質之必然結果故也). Das macht mich nicht klar (此則使予不明瞭矣), weil diese Eigenschaft (蓋此性質) in nichteuklidischen Fall (在非歐氏場合) nicht bewiesen wird (曾未加以證明), ……(中略)……故也.

Ich kann mit Ihren Bezeichnungen, Annahmen, Erklärungen, u.s.w. in Ihrem Werke (予能用先生著作中之記法, 假設, 定義等) die Gleichung.

(1) $$\delta'(\Phi+\delta\Phi)=\delta'\Phi+\delta\delta'\Phi$$

beweisen (以證明上式), wenn man $\Phi=u^\nu$ setzt (惟此時以 $\Phi=u^\nu$ 爲限耳).

Beweis (證). Aus der Erklärungen folgt es, dass (由定義得)

(a) $$\Phi+\delta\Phi=\Phi',$$

und (及)

(b) $\delta'\Phi'=$ der Änderung von Φ' beim Übergang von P' zu Q (由 P' 平行變至 Q 時 Φ' 所增之量).

Setzen wir (若命)

(c)
$\Phi'=u'^\nu$

$\Gamma'^\nu_{\lambda\mu}=$ den werten von $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ in P' (在 P' 點 $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ 所取之值)

$\delta' x'^\nu=$ den kontravarianten Komponenten von $\overrightarrow{P'Q}$ ($\overrightarrow{P'Q}$ 之抗變分量),

so haben wir (則得)

(d)
$u'^\nu=u^\nu+\delta u^\nu$, wo (此處) $\delta u^\nu=-\Gamma^\nu_{\lambda\mu}u^\lambda\delta x^\mu$ ist,

$\delta' x'^\nu=\delta' x^\nu+\delta\delta' x^\nu$, wo (此處) $\delta\delta' x^\nu=-\Gamma^\nu_{\lambda\mu}\delta' x^\lambda\delta x^\mu$ ist,

$\Gamma'^\nu_{\lambda\mu}=\Gamma^\nu_{\lambda\mu}+\delta\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, wo (此處) $\delta\Gamma^\nu_{\lambda\mu}=\delta x^\alpha\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ ist.

Aus (b) [由 (b)] müssen wir $\delta'\Phi'$ (od. $\delta' u'^{\nu}$) berechnen aus der Differentialgleichungen des Parallelismus [可知必由平行之微分方程以算 $\delta'\Phi'$ (或 $\delta' u'^{\nu}$)]——aber nicht aus (然不能由)

$$\delta' u'^{\nu} = -\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} u'^{\lambda} \delta' x^{\mu}$$

sondern aus (而祇能由)

$$(e) \qquad \delta' u'^{\nu} = -\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} u'^{\lambda} \delta' x'^{\mu},$$

weil Φ' und $\Phi'+\delta'\Phi'$ nicht länges PP'' sondern länges $P'Q$ parallel sind (因 Φ' 與 $\Phi'+\delta'\Phi$ 之互相平行不沿 PP'' 路而祇沿 $P'Q$ 路故也). Aus (e) und (d) haben wir [由 (e) 及 (d) 得]

$$(f) \qquad \begin{aligned} \delta' u'^{\nu} &= -(\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \delta\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu})(u^{\lambda}+\delta u^{\lambda})(\delta' x^{\mu}+\delta\delta' x^{\mu}) \\ &= -\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} u^{\lambda}\delta' x^{\mu} + (-\delta\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} u^{\lambda} x^{\mu} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\delta u^{\lambda}\delta' x^{\mu} \\ &\qquad -\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} u^{\lambda}\delta\delta' x^{\mu}) + \cdots\cdots \\ &= \delta' u^{\nu} + \delta\delta' u^{\nu} + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Da das Glieder von 3. Ordnung vernachlässigt werden kann (因三次項可以省略), so haben wir aus (f) [故由 (f) 得]

$$(g) \qquad \delta' u'^{\nu} = \delta' u^{\nu} + \delta\delta' u^{\nu},$$

oder (卽)

$$(h) \qquad \delta'\Phi' = \delta'\Phi + \delta\delta'\Phi.$$

Aus (h) und (a) bekommen wir dann (1) [由 (h) 及 (a) 於是得 (1)].

Steckt kein Fehler in (a) bis (h), [如 (a) 至 (h) 絕無錯誤] so ist (1) sicher richtig [則 (1) 必成立無疑]. Steckt mindestens ein Fehler in (a) bis (h) [如 (a) 至 (h) 至少有一錯誤], so werde ich Sie nicht mehr mit solcher kleinen Sache immer fragen (則予以後決不復以此小事常問先生矣).

(後略).

利氏之第五次復函曰:

(前略)

Ich habe die von Ihnen gestellte Frage (予已將先生所提出之問題) etwas sorgfältiger geprüft (小心查驗矣). Erstens haben Sie Recht (第一先生之言實有理由), dass in Ihrem Beweise der Formel (因先生於下列公式之證明中)

$$\delta'(\Phi+\delta\Phi)=\delta'\Phi+\delta\delta'\Phi$$

(wo Φ eine kontravariante Komponente u^ν eines Vektors bezeichnet) (當Φ表示向量之一抗變分量u^ν時) alles formell in Ordnung (推理上一切合法故也).

Ich denke (予思), dass auch das Resultat ganz richtig ist (其結果亦係完全正確) wenn man (倘吾人), für die Vektorverschiebung $\delta'\Phi'$ (於算此向量變位$\delta'\Phi'$之際), Ihre vektorielle Definition und die daraus entspringende Rechnung anwendet (而應用先生之向量定義及其所發生之記算者). Ich habe dagegen ein analytisches Verfahren gebraucht (惟予未用此法而已用一解析方法矣). Da die zwei Verfahren sich auf verschiedene Definitionen der Operatoren $\delta\delta'$ und $\delta'\delta$ stützen (此兩方法既根據於兩算子$\delta\delta'$及$\delta'\delta$定義之不同), werden sie zu verschiedene Resultate führen (則其導出不同之結果自屬必然之理); jedoch hat vermutlich auch das Ihrige invarianten Charakter (然而先生之方法似乎尙含有不變性), so dass die Folgerungen nützlich sein können (故其推論當有裨益); und namentlich fähig zu eine Begruendung der Riemannschen Kruemmungen führen (而適宜於黎曼氏曲率之誘導也).

Wenn es eigentlich so ist (果眞如是者), so werde ich mich freuen Ihre Resultate irgendwo veröffentlichen zu lassen (予將樂於取先生之結果於任何處公表之).

(後略)

予與利氏之討論,其經過及其主要內容大略如上.其中不明不白之處,諒所難免.世有願加入而共同硏究者,予甚所歡迎也.

湯璪眞

一九三六年五月,於

武昌國立武漢大學

重譯者再序

抗戰軍興,本書延未出版.目前學術研究空氣,日趨濃厚,故今仍將本書付印.書中若干處已儘量校正,此外又新增若干註解,無非欲使讀者增加閱讀之便利而已.

本書第118面中論向量沿初等平行四邊形平行變位一周以後所起之變化.此點乃絕對微分學之一難關,以前重譯者曾與原著者 Levi-Civita 氏(氏已於1941年去世)多次討論之,其經過情形已見重譯者序中.此外重譯者以爲於該118面之後尚有增加附頁之必要;增附頁之意乃欲保存原著譯文於該118面上,而將討論以後更改之新形式另刊於附頁,以便讀者互相參照,自行評判知所取捨.此法當有益於讀者.

讀本書以後可知歐空 R_n 之外尚有一般的量空 M_n 而絕對微分,則恰爲適宜於研究其幾何學(即所謂黎曼幾何學)之工具.此類量空之曲率 K 通例應依位置與方位而起變化,至普通所論之非歐量空不過爲其中之有定曲率(正或負)者而已.

從數學觀點而言,相對論本爲力學與光學的幾何化,

讀至本書第八篇以後卽知其詳.但在特別相對論中所化得者爲僞歐幾何,其四度量空曲率處處爲零;而在普遍相對論中所化得者,爲與僞歐接近之黎曼幾何,其量性張量$g_{\alpha\beta}$須適合由引力,張力及電磁等作用所表示之著名引力方程,因之其四度量空曲率可能處處爲零可能成正或負之定曲率,惟通例不如此.

一種學術思想每因作合理之推廣而獲得新成就,例如普通微分可推廣爲絕對微分,普通平行可推廣爲Levi-Civita的絕對平行,歐氏幾何學可推廣爲黎曼幾何學,牛頓力學可推廣爲愛因斯坦的相對論,等等皆是.重譯本書爲中文之意,卽在介紹此等理論,正與將本書由意文譯成英文,德文,法文等外國文之意義相同.至關於此方面更加推廣而深刻之著作,應請讀者另行參考.

本書由重譯以至出版費時頗久,旣非一氣呵成,如有應改良處,極盼讀者不吝指示以利更正.最後敬向校閱排印以及助本書出版諸同志致謝.

湯璪眞

一九五〇年於北京師範大學