北京大学数学丛书

# 微分动力系统导引

张锦炎　钱　敏　著

北京大学出版社

北京大学数学丛书

# 微分动力系统导引

张锦炎 钱 敏 著

北京大学出版社

新登字(京)159号

北京大学数学丛书
微分动力系统导引
张锦炎　钱　敏　著
责任编辑：王明舟
*
北京大学出版社出版
(北京大学校内)
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
850×1168 毫米　32 开本　7 印张　200 千字
1991 年 4 月第一版　1991 年 4 月第一次印刷
印数：00001—3,000 册
ISBN 7-301-01682-4/O·267
定价：5.80 元

# 内 容 简 介

动力系统把丰富的物理内容与近代数学的抽象方法有机地结合在一起，是古典力学的数学形式．本书深入浅出地对微分动力系统的基本内容进行了阐述，主要研究微分同胚在其不变集上的运动特性及其结构稳定性．全书共八章，内容包括：结构稳定性与双曲性、Smale 马蹄定理及结构稳定性、Hartman 定理与稳定流形定理、Morse-Smale 向量场的结构稳定性、Markov 分割、公理A的 $\Omega$ 稳定性．本书采用的观点和论证方法都尽可能从较为初等的角度来引导读者进入这个领域．因此，本书给准备进入这个数学领域从事研究工作的读者提供了一本比较合适的读物．

本书可作为高等学校数学专业研究生教材，也可供高等学校理工科专业师生及研究工作者参考．

## 说　　明

此丛书是以数学、计算数学、概率统计及有关专业的高年级学生、研究生、青年教师及数学研究工作者为读者对象的出版物．丛书特点是内容新颖，力图反映现代数学的新成就；叙述精练，约相当于一学期周学时为3的研究生课程的取材．我们编辑出版此丛书的主要目的是为了适应我们国家培养研究生的需要，同时，又可作为数学及有关系科高年级选修课程的参考书，为提高本科生的教学质量贡献一份力量．

我们诚恳地希望：广大读者对于书目的选择，内容的取材提出宝贵意见，作为我们今后出版或再版时的参考．

《北京大学数学丛书》编委会

一九八一年元月

# 序　言

动力系统作为古典力学的数学形式是一门历史悠久的学科．近三十年来，由于它的丰富的物理内容与近代数学提供的抽象方法相结合，出现了群峰竞秀、蓬勃发展的局面．大致说来，它的内容有两个部分，即保守动力系统与微分动力系统．本书以后者为主题，主要研究微分同胚在其不变集上的运动特性及其结构稳定性．

编写本书的目的有二，一是阐述微分动力系统的基本理论；二是为近年来在自然科学界引起了广泛兴趣的紊动（Chaos）现象提供可参考的数学模型．表现在内容的选取上包括谱分解与$\Omega$稳定性，详细介绍 Markov 分割的理论．

考虑到本书的读者除数学专业研究生之外还有其它自然科学研究工作者，因此，在编写本书时我们力图做到以下两点：（1）在数学上论证是严格的，基本自封；（2）深入浅出，使具有一定数学基础的读者可以看懂本书所讨论的主要问题的眉目．

当然这些都只是作者的愿望．由于水平有限，缺点错误一定不少，欢迎读者批评指正．

本书初稿曾在北京大学数学系研究生的动力系统选修课上讲授过．原稿的一些章节以许连超、刘张炬两同志在讨论班上的讲稿为基础，因此本书现在能与读者见面是与他们的努力分不开的．

张锦炎　钱　敏

1986 年春于北京大学

# 目　　录

# 第一章 基础知识

在本章的 §1.1 中我们不加证明地叙述了古典常微分方程定性理论的几个基本定理，这些定理在以后各章中将直接或间接地用到。§1.2 中我们在古典常微分方程的基础上讨论 $\boldsymbol{R}^n$ 与 Banach 空间中的线性系统、线性向量场与线性自同构。§1.3 中引进一些微分动力系统中常用的概念，为以后各章作准备。

## §1.1 古典常微分方程中的一些结论

考虑系统

$$\dot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x), \quad x \in M, \tag{1.1}$$

其中$M$是紧流形，$f: M \to TM$（$M$ 的切丛）是定义在$M$上的 $C^1$ 向量场。

**定理 1.1（解的局部存在唯一性定理）** 设$M$是一个紧流形（或 $n$ 维欧氏空间$\boldsymbol{R}^n$），$U \subset M$，$U$是开集，$f: U \to TM$ 是 $C^1$ 映射，则对任意 $x_0 \in U$，存在常数 $c > 0$ 与一个唯一的解 $\varphi_t(x_0) \equiv \varphi(t, x_0)$，$\varphi(\cdot, x_0): (-c, c) \to U$，满足微分方程 $\dot{x} = f(x)$ 与初条件 $\varphi(0, x_0) = x_0$。

**定义** 称点 $x_0 \in M$ 为系统(1.1)的**平衡点**，如果 $x_0$ 是向量场 $f(x)$ 的奇点，即 $f(x_0) = 0$。平衡点 $x_0$ 称为是**稳定的**，如果对于 $x_0$ 的任一邻域$W \subset U$都存在 $x_0$ 的一个邻域 $W_1 \subset W$，使得从 $W_1$ 中的点出发的解 $\varphi(t, x_1)$，$x_1 \in W_1$，当 $t > 0$ 都有意义，且 $\varphi(t, x_1) \in W$，当 $t \geqslant 0$。进一步，若能取到 $W_1$ 还使得当 $x_1 \in W_1$ 有 $\varphi(t, x_1) \to x_0$（当 $t \to +\infty$），则称 $x_0$为**渐近稳定的**。

判断平衡点的稳定性有下述 Liapunov 定理：

**定理 1.2** 设 $x_0$ 是系统(1.1)的平衡点，$W$ 是 $x_0$ 的邻域，$W \subset U$，若存在函数 $V: W \to \boldsymbol{R}$ 在 $W$ 上连续，在 $W - \{x_0\}$ 上可微，满足

(1) $V(x_0) = 0$；$V(x) > 0$，当 $x \in W - \{x_0\}$，

(2) $\dot{V}(x) \leqslant 0$，当 $x \in W - \{x_0\}$，

则 $x_0$ 是稳定平衡点。若函数 $V$ 还满足

(3) $\dot{V}(x) < 0$，当 $x \in W - \{x_0\}$，

则 $x_0$ 是渐近稳定的。

其中 $\dot{V}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x)$（$x_j$ 是局部坐标）是函数 $V$ 沿系统(1.1)的解曲线的导数。$V$ 称为 Liapunov 函数。

在 $\boldsymbol{R}^n$ 上考虑系统(1.1)时，解存在的最大区间不一定是整个实数轴，但是在紧流形 $M$ 上，有以下定理：

**定理 1.3** 紧流形 $M$ 上系统(1.1)的解整体存在，即 $\varphi(t, x)$ 对一切 $t \in \boldsymbol{R}$，$x \in M$ 都有意义。

**定义** 称 $\varphi(t,x)$ 为由向量场 $f$ 导出的**流**。

流在 $\boldsymbol{R} \times M$ 上连续，且具有性质：

对 $\forall t_1, t_2 \in \boldsymbol{R}$，$x \in M$，

(i) $\varphi(t_1 + t_2, x) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x))$；

(ii) $\varphi(0, x) = x$。

特别，在 $\boldsymbol{R}^n$ 上有以下定理：

**定理 1.4** 令 $U \subseteq \boldsymbol{R}^n$ 是开集，函数 $f: U \to \boldsymbol{R}^n$ 满足 Lipschitz 条件，Lipschitz 常数为 $K$。系统(1.1)的解 $\varphi(t, x_0)$ 在区间 $[0, T]$ 上有定义，则存在 $x_0$ 的邻域 $W \subset U$，使对一切 $x \in W$，$\varphi(t, x)$ 也在区间 $[0, T]$ 上有定义，且当 $t \in [0, T]$ 时，

$$|\varphi(t, x) - \varphi(t, x_0)| \leqslant |x - x_0| e^{Kt}. \tag{1.2}$$

## §1.2 线性系统

考虑系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Lx, \quad x \in \boldsymbol{R}^n, \tag{1.3}$$

其中 $L \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$. $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 表示所有 $\boldsymbol{R}^n$ 到自身的线性算子在通常的算子加法与数乘下所组成的线性空间。在 $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 上定义范数如下：

$$\|L\| \equiv \sup_{|x|=1} |Lx|, \tag{1.4}$$

$\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 是一个 Banach 空间。

由 $Lx$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上定义的向量场，称为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的**线性向量场**，也简称 $L$ 是线性向量场。

下面指出(1.3)的解是整体存在的，并且具体写出向量场 $L$ 导出的流。

考虑 $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 中的线性算子序列 $E_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} L^k$，其中

$$L^k = \underbrace{L\circ\cdots\circ L}_{k个},$$

$L^0$ 定义为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的恒同算子，记作 $I$ 或 id. 应用不等式 $\|L^k\| \leqslant \|L\|^k$ 不难证明以下命题：

**命题 1.5** 算子序列 $E_m$ 收敛于一线性算子，记作 $\mathrm{e}^L$，即

$$\mathrm{e}^L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} L^k.$$

**定义** 由 $\mathrm{Exp}(L) \equiv \mathrm{e}^L$ 所定义的映射 $\mathrm{Exp}: \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n) \to \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 称为**指数映射**.

**命题 1.6** 设 $\alpha: \boldsymbol{R} \to \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 是由 $\alpha(t) = \mathrm{e}^{tL}$ 所定义，则 $\alpha$ 是可微的，且

$$\alpha'(t) = L\mathrm{e}^{tL}.$$

**推论** $\varphi(t,x) = \mathrm{e}^{tL}x$ 是向量场 $L$ 导出的流.

**命题 1.7** 若 $L_1, L_2 \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$, $L_1L_2 = L_2L_1$, 则

$$\mathrm{e}^{L_1+L_2} = \mathrm{e}^{L_1}\mathrm{e}^{L_2} = \mathrm{e}^{L_2}\mathrm{e}^{L_1}. \tag{1.5}$$

**推论** $\mathrm{e}^L$ 有逆 $\mathrm{e}^{-L}$.

设 $\boldsymbol{C}^n$ 是 $n$ 维复向量空间，$\boldsymbol{C}^n$ 中的元素可以表示为 $u + \mathrm{i}v$,

$u, v \in \boldsymbol{R}^n$. 若 $a+\mathrm{i}b \in \boldsymbol{C}$, $u+\mathrm{i}v \in \boldsymbol{C}^n$, 则

$$(a+\mathrm{i}b)(u+\mathrm{i}v) = (au-bv)+\mathrm{i}(av+bu).$$

以 $\mathscr{L}(\boldsymbol{C}^n)$ 表示从 $\boldsymbol{C}^n$ 到自身的复线性算子的集合. 若 $T \in \mathscr{L}(\boldsymbol{C}^n)$, 定义 $T$ 的范数如下:

$$\|T\| = \sup\{|Tz|;\ z \in \boldsymbol{C}^n, |z| = 1\},$$

于是 $\mathscr{L}(\boldsymbol{C}^n)$ 是 Banach 空间. 对于算子 $L \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$, 定义它在 $\boldsymbol{C}^n$ 上的扩张算子 $\tilde{L}$: $\boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$ 如下:

$$\tilde{L}(u+\mathrm{i}v) = L(u)+\mathrm{i}L(v). \tag{1.6}$$

不难验证 $\tilde{L}$ 是复线性的. 复指数映射的定义与实指数映射相同. 令 $\mathscr{C}$: $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n) \to \mathscr{L}(\boldsymbol{C}^n)$ 是由 $\mathscr{C}(L) = \tilde{L}$ 定义的映射, 则显然有以下命题:

**命题 1.8** 映射 $\mathscr{C}$ 具有下列性质:

(1) $\mathscr{C}$ 是线性映射;

(2) $\mathscr{C}(L_1 \circ L_2) = \mathscr{C}(L_1) \circ \mathscr{C}(L_2)$;

(3) $\mathscr{C}(\mathrm{Exp} L) = \mathrm{Exp}\,\mathscr{C}(L)$;

(4) $\|\mathscr{C}(L)\| = \|L\|$.

**例 1** 设 $L \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^2)$, $\{e_1, e_2\}$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中一组基. 对于这组基, $L$ 有形式

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

则 $\tilde{L} = \mathscr{C}(L)$ 在 $\boldsymbol{C}^2$ 的基 $\{e_1+\mathrm{i}e_2,\ e_1-\mathrm{i}e_2\}$ 下具有形式

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda = \alpha+\mathrm{i}\beta$, $\lambda = \alpha-\mathrm{i}\beta$. 由上命题 $\widetilde{\mathrm{e}^L} = \mathrm{e}^{\tilde{L}}$, 所以 $\mathrm{e}^L$ 对于基 $\{e_1, e_2\}$ 的矩阵是

$$\mathrm{e}^{\alpha}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

设 $L \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$, 称 $\tilde{L}$ 的**谱**(即 $\tilde{L}$ 的特征值的集合)为 $L$ 的**复谱**(即 $L$ 的特征多项式的复根的集合).

大家熟知，复算子 $\tilde{L}$ 的 Jordan 标准型为

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

其中

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \cdots, r,$$

$\lambda_i$ 是 $L$ 的复特征值。

关于实标准型有下面的定理:

**定理 1.9** 如果 $L \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$，则在 $\boldsymbol{R}^n$ 中存在一组基，使得 $L$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & A_r & & & \\ & & & B_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & B_s \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

其中

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \cdots, r, \ \lambda_i \in \boldsymbol{R};$$

$$B_j = \begin{pmatrix} C_j & & \\ I & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I & C_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \cdots, s,$$

$$C_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_j, \beta_j \in \boldsymbol{R}.$$

若不考虑排列次序，则 $A_1, \cdots, A_r, B_1, \cdots, B_s$ 是唯一确定的。

**推论** 令 $L \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$，给定 $\varepsilon > 0$，存在 $\boldsymbol{R}^n$ 的一组基使得 $L$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & A_r & & & \\ & & & B_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & B_s \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

其中

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ \varepsilon & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \cdots, r;$$

$$B_j = \begin{pmatrix} C_j & & & 0 \\ \varepsilon I & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon I & C_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \cdots, s.$$

**命题 1.10** 如果 $L \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$，$\lambda$ 是 $L$ 的 $m$ 重复谱，则 $\mathrm{e}^{\lambda}$ 是 $\mathrm{e}^{L}$ 的 $m$ 重复谱。

**证明** 设 $\tilde{L}$ 的标准型为(1.7)，于是

$$\widetilde{\mathrm{e}^{L}} = \mathrm{e}^{\tilde{L}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{A_r} \end{pmatrix}.$$

所以我们不妨设 $\tilde{L}$ 只有一个特征值 $\lambda$，其重数是空间的维数 $n$，即 $\tilde{L}$ 的标准型为

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

令

$$D=\begin{pmatrix}\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0 & & & 0\\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0\end{pmatrix},$$

于是 $\tilde{L}=D+N$. 显然 $N^n=0$, $ND=DN$, 由命题 1.7 得知 $e^{\tilde{L}}=e^De^N$. 而

$$e^D=\begin{pmatrix}e^\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^\lambda\end{pmatrix},$$

$$e^N=I+N+\frac{N^2}{2!}+\cdots+\frac{N^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 & 1\end{pmatrix},$$

所以 $\widetilde{e^{\tilde{L}}}=e^{\tilde{L}}=e^\lambda e^N$. 显然, $e^\lambda$ 是 $\widetilde{e^{\tilde{L}}}$ 的 $n$ 重特征值,是 $e^L$ 的 $n$ 重复谱. ∎

**定义** 线性向量场 $L\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 称为是**双曲的**, 如果 $L$ 的复谱与虚轴不交. 若 $L\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 是双曲的, 则 $L$ 的有负实部的特征值的个数称为 $L$ 的**指数**.

显然双曲线性向量场仅有一个奇点——原点.

**定理 1.11** 若 $L\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$ 是双曲的,则存在 $\boldsymbol{R}^n$ 的唯一直和分解 $\boldsymbol{R}^n=E^s\oplus E^u$,其中 $E^s$, $E^u$ 是 $L$ 的不变子空间, $L^s=L|E^s$, $L^u=L|E^u$ 的特征值实部分别小于零、大于零. 分别称 $E^s$, $E^u$ 为 $L$ 的**稳定子空间**,**不稳定子空间**.

**证明** 令 $e_1,\cdots,e_n$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一组基, 使得在这组基之下, $L$ 的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & A_{s'} & & & & & \\ & & & B_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & B_{s''} & & \\ & & & & & & C_1 & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & C_{r'} & & \\ & & & & & & & & & D_1 & \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & D_{r''} \end{pmatrix},$$

其中

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad \lambda_i < 0, \ i = 1, \cdots, s';$$

$$B_j = \begin{pmatrix} M_j & & & 0 \\ I & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & I & M_j \end{pmatrix},$$

$$M_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \quad \alpha_j < 0, \ j = 1, \cdots, s'';$$

$$C_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad \lambda_k > 0, \ k = 1, \cdots, r';$$

$$D_l = \begin{pmatrix} M_l & & & 0 \\ I & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & I & M_l \end{pmatrix},$$

$$M_l = \begin{pmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ -\beta_l & \alpha_l \end{pmatrix}, \quad \alpha_l > 0, \ l = 1, \cdots, r''.$$

令 $E^s$ 是由 $e_1,\cdots,e_{s'}$, $e_{s'+1},\cdots$, $e_{s'+2s''}$ 生成的子空间，$E^u$ 是由 $e_{s'+2s''+1},\cdots$, $e_n$ 生成的子空间. 显然 $E^s$, $E^u$ 都是 $L$ 不变的子空间,且 $L^s$ 对于基 $\{e_1,\cdots, e_{s'+2s''}\}$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & A_{s'} & & & \\ & & & B_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & B_{s''} \end{pmatrix},$$

而 $L^u$ 对于基 $\{e_{s'+2s''+1},\cdots, e_n\}$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} C_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & C_{r'} & & & \\ & & & D_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & D_{r''} \end{pmatrix}.$$

从而 $L^s$ 的特征值都有负实部，$L^u$ 的特征值都有正实部. 存在性证完,唯一性显然. ▌

对于一般的 $L\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$，类似于上述定理,有

**定理 1.12** 若 $L\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n)$，则 $\boldsymbol{R}^n$ 可分解成稳定子空间 $E^s$，不稳定子空间 $E^u$ 与中心子空间 $E^c$ 的直和,即 $\boldsymbol{R}^n = E^s\oplus E^u\oplus E^c$ 使得

$$L^s = L|E^s,\ L^u = L|E^u,\ L^c = L|E^c$$

的特征值实部分别小于零、大于零、等于零.

**例 2** 设

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

则 $E^s = \mathrm{span}\{(1,-4)\}$，$E^c = \mathrm{span}\{(1,0)\}$ ($\mathrm{span}\{x\}$ 表示由向量 $x$ 生成的子空间)，$E^u = \varnothing$.

**例 3** 设