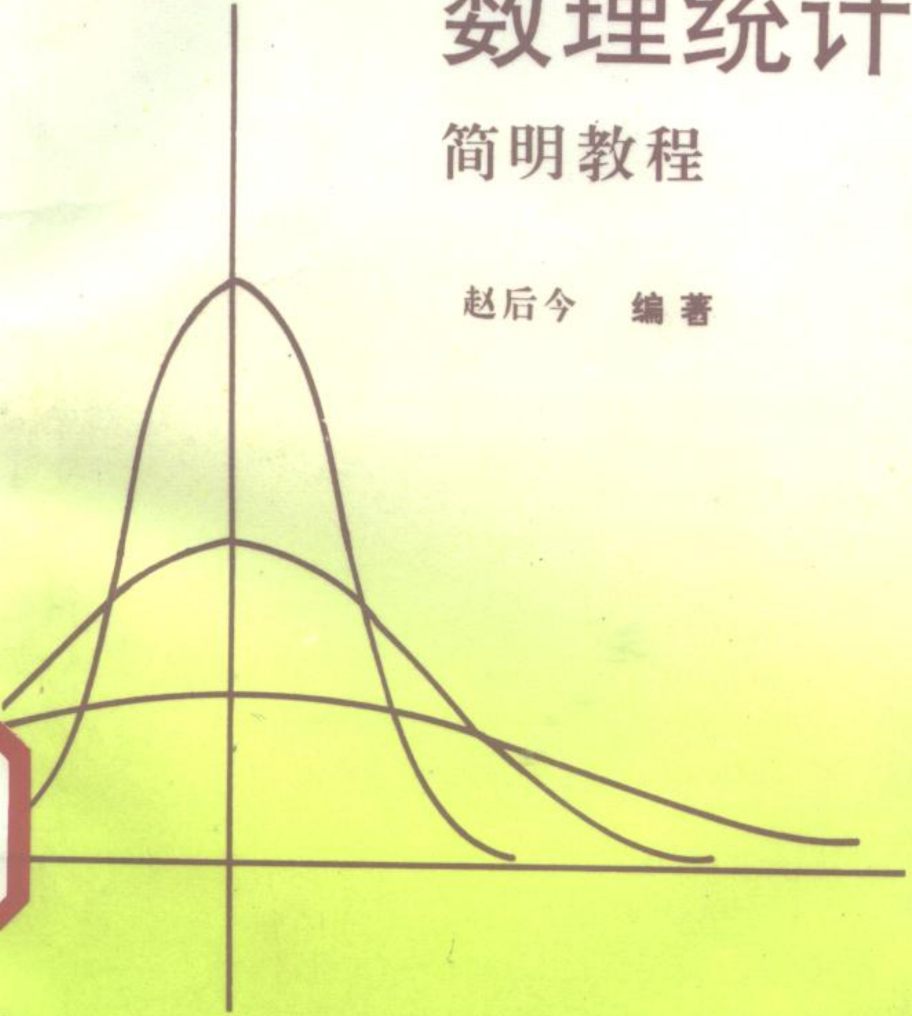
概率论与数理统计

简明教程

赵后今　编著



天津科技翻译出版公司

概率论与数理统计
简明教程

赵后今　　编著

天津科技翻译出版公司

津新登字(90)010号

概率论与数理统计简明教程

编　　著　赵后今
责任编辑　朱金华
天津科技翻译出版公司出版
(邮政编码:300192)
新华书店天津发行所发行
天津闻达信息公司激光照排
河北省霸州市印刷厂印刷
*　*　*
开本:787×1092毫米　1/32　印张:10　字数:236千字
1994年9月第1版　1994年9月第1次印刷
印数:1—4000册
ISBN 7-5433-0697-2
O·29　定价:8.50元

内 容 简 介

本书是一本简明而通用的教材，介绍概率论与数理统计的初等理论和方法. 其内容包括事件与概率、随机变量及其分布、数字特征、极限定理、参数估计、假设检验、回归分析和方差分析等.

本书力求符合现代科学技术的要求和当前有关各类专业大学生的实际水平. 可作为大专院校概率统计课的通用教材，也可供自学者阅读和科技工作者参考.

序

由于科学技术发展的需要，原来只有少数专业开设的《概率统计》课程现已普遍“开花”. 不但工科开设，而且文、理、经、管许多专业也都开设. 概率统计知识已成为科技人员的必备常识. 教材内容现代化刻不容缓.

本书手稿在南开大学自动化、计算机等专业长期讲用，几经修改. 力求符合当前学生的实际水平；力求内容规范、简明实用.

在初等概率论中有三组最基本的概念：事件与概率的概念、随机变量及其分布的概念和数学期望的概念. 本书用较小的篇幅，由具体到抽象，从特殊到一般，既给出直观定义，又给出严格的抽象定义，充分体现了由实践到理论的科学认识规律. 既有利于广泛的实际应用，又有利于进一步的讨论和发展.

本教材以随机变量的概率特性及其数字特征为中心展开教学内容，加强基本概念、基本知识，基本方法和基本技能的学习和训练. 这一部分内容，无论从理论上、方法上讲还是从应用上来讲，都是最重要的. 前面以事件与概率的知识为基础，后面以数理统计为应用. 极限定理部分则当作承上启下的环节，完善某些基本概念和基本方法.

加强了作为应用基础的实际推断原理等基本概率统计思想方法的教学，增加了应用最为广泛的正态分布的内容，以提高学生认识和解决随机问题的能力.

去掉不适当、不必要的证明和推导；去掉不严格的证明和推导；去掉过于繁杂的证明和推导；去掉或简化起点过低的内容.使教材内容适合当前学生的实际水平，有一定的梯度，重在能力的培养.

古典型概率的计算，不宜难度过大；复杂的积分计算，应当减少.例题和习题要体现方法，应密切结合基本内容.

杨胜友参加了本书的编写工作，编写了第6章.

赵后今

1994年9月

目　录

第一章　事件与概率

§1.1　随机事件与样本空间

（一）概率论的研究对象

自然界和社会上有许多现象，在一定条件下必然会发生. 例如，向上抛一石子必然下落；在标准大气压下水加热到100℃时必定沸腾等. 这类现象称为确定性现象. 微积分学和线性代数等都是研究这类现象的数学工具. 然而自然界和社会上也还存在着另外一类现象. 例如，在相同的条件下，抛掷同一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面，呈现出不肯定性，但在大量重复试验中，得正面和得反面的次数大致相等. 掷骰子观察出现的点数，也呈现出不肯定性，大量重复的观察又会表明出现各点的次数大致相等. 用同一门炮向同一目标射击，各次弹着点不尽相同，但按一定的规律分布. 一般地说，这类现象在一次试验中可能出现这样或那样的结果，呈现出不肯定性，但在大量重复试验中，又呈现出固有的规律性. 这类现象称为随机现象，这种固有规律称为随机现象的统计规律. 概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律性的一门数学学科.

概率统计的理论与方法应用非常广泛，几乎遍及所有科学技术领域以及工农业生产和国民经济各个部门之中.

随机现象的统计规律性，只有通过大量重复的试验才能揭示. 这种试验称为随机试验. 随机试验是对随机现象进行的观测试验.

它具有以下特性：

1° 可以在相同的条件下重复进行；

2° 每次试验的可能结果不止一个，事先能明确试验的所有可能结果；

3° 试验之前不能肯定出现哪种结果.

（二）样本空间

随机试验通常用 E 表示. 随机试验 E 的每一个可能的基本结果，称为 E 的基本事件. 通常以 ω(或 e) 表示.

随机试验 E 的所有基本事件组成的集合，称为 E 的基本事件空间，或样本空间，通常记为 Ω(或 S). 基本事件也称样本点.

在具体问题中，十分重要的是：认清基本事件和基本事件空间. 举例如下：

E_1：抛掷一枚硬币，观察正、反面出现的情况.

基本事件：$\omega_1 =$ “出正面”，$\omega_2 =$ “出反面”

样本空间：$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$

E_2：掷一颗骰子，观察出现的点数.

基本事件：$\omega =$ 出现点数

样本空间：$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

E_3：观测某电话交换台在每天某段时间内接到的呼叫次数。

基本事件：$\omega =$ 呼叫次数

样本空间：$\Omega = \{0,1,2,\cdots\cdots\}$

E_4：同一门炮向同一目标射击，观察弹着点.

基本事件：$\omega =$ 弹着点

样本空间：$\Omega =$ 射弹散布区域

E_5：在一批灯炮中任意抽取一只，测试它的寿命.

基本事件：$\omega =$ 灯泡寿命 t

样本空间：$\Omega = \{t \mid t \geqslant 0\}$

E_6：记录某地一昼夜的最高气温(℃)和最低气温.

基本事件：$\omega=(x,y)$

样本空间：$\Omega=\{(x,y)\mid T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}$

其中 x 表示最低气温，y 表示最高气温，并设这个地区的温度不会小于 T_0. 不会大于 T_1.

E_7：一个盒子中有完全相同的 10 个球，分别标以号码 1，2，…，10，从中随机抽取一球，观察球的标号的奇偶性.

基本事件：$\omega_1=$“取得球的标号为偶数”

$\omega_2=$“取得球的标号为奇数”

样本空间：$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$

E_8：在随机试验 E_7 中，把“观察球的标号的奇偶性”改为“观察球的标号”.

试验要求变了，基本事件要发生相应的变化. 令

$i=$“取得球的标号为 i”

基本事件：1，2，…，10

样本空间：$\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$

(三) 随机事件

在随机试验 E_1 中“出正面”，

在随机试验 E_8 中，“取得球的标号为 6”(记为 A)，

“取得球的标号为偶数”(记为 B)，

“取得球的标号 $\leqslant 3$”(记为 C)

均为随机事件. 这些随机事件的共同特性是，在一次试验中，可能出现也可能不出现，而在大量重复试验中，又呈现出一定的规律性. 我们把具有这种特性的事件称为随机事件，简称事件. 常用 A，B，C 等表示.

随机事件是随机试验的结果. 在随机试验的结果中，除了基本事件之外，还有由基本事件组成的其它随机事件. 一般随机事件可

以看作是基本事件的集合，样本空间的子集，如

$$B=\{2,4,6,8,10\}\subset\Omega$$

$$C=\{1,2,3\}\subset\Omega$$

可用集合的观点来研究随机事件. 当发生的基本事件 ω 属于某个事件 A 时，就称 A 发生(或出现)，记为 $\omega\in A$.

在随机试验 E 中，必然会发生的事情叫做必然事件；不可能发生的事情叫做不可能事件. 例如在 E_3 中"点数不大于 6"是必然事件；"点数大于 6"是不可能事件. 必然事件是样本空间 Ω，不可能事件是空集 Φ. 必然事件和不可能事件都是确定性事件，但是，为了讨论的方便，作为随机事件的极端情况，约定为随机事件.

(四) 事件之间的关系与运算

以 A,B,A_k, $k=1,2,\cdots$，表示 Ω 中的事件.

1° 事件间的包含与相等

若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A.

事件 B 包含事件 $A\Leftrightarrow$ 集合 B 包含集合 A

证 "$\Rightarrow$" 设 $\omega\in A$，若 ω 发生，

则 A 发生，从而 B 发生，

$\therefore\omega\in B$ 即 $A\subset B$

"$\Leftarrow$" 设 A 发生，则发生的基本事件 $\omega\in A$，从而发生的基本事件 $\omega\in B$

$\therefore$ B 发生

即事件 B 包含事件 A

事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 和事件 B 相等，记为 $A=B$

对于任给事件 A，约定 $\Phi\subset A$，

显然 $A\subset\Omega$

2° 事件的和、积、差

事件"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"，称为事件 A 和事件 B 之和. 记为 $A \cup B$.

事件"事件 A 和事件 B 同时发生"，称为事件 A 与事件 B 之积（交）. 记为 $A \cap B$ 或 AB.

事件"事件 A 发生而事件 B 不发生"，称为事件 A 与事件 B 之差. 记为 $A - B$.

事件"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生"，称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之和. 记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，简记为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

事件"事件 $A_1, A_2, \cdots$ 中至少有一个发生"称为事件 $A_1, A_2, \cdots$ 之和. 记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$，简记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

事件"事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 同时发生"，称为事件 $A_1, A_2 \cdots A_n$ 之积. 记为 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$，或 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

事件"事件 $A_1, A_2, \cdots$ 同时发生"，称为事件 $A_1, A_2 \cdots$ 之积. 记为 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots$，或 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

使用 1°中类似的方法可以证明，事件间的和、积、差与集合中的并、交、差一致.

3° 互不相容事件

若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $A \cap B = \Phi$ 则称 A 与 B 是互不相容的.

基本事件是互不相容的.

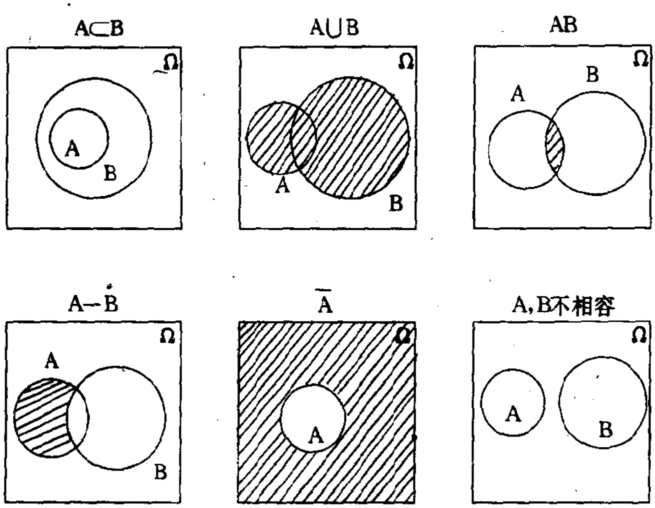
4° 对立事件

若事件 A 与 B 不能同时发生，且必有一个发生，即

$$\begin{cases} A \cup B = \Omega \\ A \cap B = \Phi \end{cases}$$

则 A 与 B 互为对立事件. A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

事件间的关系既然与集合间的关系一致，我们可以用图形来表达，如下图：



(A∪B，A－B，Ā分别为图中阴影部分)

图 1—1

例 1 用事件 A、B、C 之间的运算关系表示事件.

(1) "A 与 B 发生而 C 不发生"

$=$"A 与 B 发生且 $\overline{C}$ 发生"

$= AB\overline{C}$

(2) "A、B、C 中至少有两个发生"

$=$"AB 发生或 AC 发生或 BC 发生"

$= AB \cup AC \cup BC$

(3) “A、B、C 中恰有两个发生”

$=$“$AB\overline{C}$ 发生或 $A\overline{B}C$ 发生或 $\overline{A}BC$ 发生”

$= AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$

例 2 证明对偶原则 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证 先证 $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$：

$\overline{A \cup B}$ 发生 $\Rightarrow A \cup B$ 不发生

$\Rightarrow A$ 与 B 均不发生

$\Rightarrow \overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 同时发生

$\Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B}$ 发生.

$\therefore \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

再证 $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$：

$\overline{A} \cap \overline{B}$ 发生 $\Rightarrow \overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 同时发生

$\Rightarrow A$ 与 B 均不发生

$\Rightarrow A \cup B$ 不发生

$\Rightarrow \overline{A \cup B}$ 发生

$\therefore \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

（五）事件域

事件是样本空间 Ω 的子集.

事件的全体是 Ω 上的集类，记为 $\mathscr{F}$. 由以上的分析和规定知，$\mathscr{F}$ 满足下列条件：

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$；

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$ 则 $\overline{A} \in \mathscr{F}$；

(3) 若 $A_n \in \mathscr{F}$，$n = 1, 2, \cdots$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$$

一般称满足上述三个条件的 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的 σ-代数. 从而事件

的全体是样本空间上的 σ-代数.以此为依据,我们可以给出随机事件的严格数学定义:

定义 样本空间 Ω 上的 σ-代数称为事件域,记为 $\mathscr{F}$.事件域中的元素称为事件.

事件域举例:

$$\mathscr{F} = \{\Omega, \Phi\}$$

$$\mathscr{F} = \{\Omega, A, \overline{A}, \Phi\}$$

$$\mathscr{F} = \{\Omega\text{ 的一切子集}\}$$

对于每个随机试验而言,不但有一个相应的样本空间,而且还应有一个相应的事件域.在实际问题中,往往选取我们关心的事件构成事件域.

§1.2 概率与频率

(一)频率的稳定性与概率

在前一节中,从认识典型的具体随机事件开始,找出随机事件的本质属性,给出随机事件的直观定义,然后上升到抽象的严格数学定义.充分体现了科学的认识规律.现在仍然遵照由具体到抽象的思路来完成对概率这一最基本的概念的认识.

首先从典型事件的概率谈起.

掷硬币,"出正面"与"出反面"的可能性各占 50%,称"出正面"的概率为 $\frac{1}{2}$,"出反面"的概率也是 $\frac{1}{2}$.

掷骰子,"出 1 点"的可能性为 $\frac{1}{6}$,称"出 1 点"的概率为 $\frac{1}{6}$.

在上节随机试验 E_8 中,

"标号为偶数"的可能性为 $\frac{1}{2}$,

"标号为 2"的可能性为 1/10,

分别称其概率为$\frac{1}{2}$和 1/10.

从以上典型事件的概率中，可以看出，事件的概率反应了事件发生的可能性大小. 由此，导出事件概率的直观意义：

定义 表示事件 A 发生可能性大小的数字，称为事件 A 的概率.

这个定义，有助于我们认识一些具体事件的概率，有助于解决实际问题. 但是，作为理论分析的出发点，尚需进一步完善. 要找出概率的基本属性，以便根据简单事件的概率导出较复杂事体的概率. 而且还存在这样一个问题：每个事件发生的可能性大小是否都能用一个数字表示？如果能用一个数字表示，那么，用什么数字来表示呢？

为了回答上述问题，引进频率的概念.

频率：如果在 n 次独立重复试验中，事件 A 出现 n_A 次，则称

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

为事件 A 在 n 次试验中的频率.

例如掷硬币 100 次，若出现 51 次正面，那么“出正面”这一事件在 100 次试验中的频率为$\frac{51}{100}$.

容易想到，一般来说，A 出现的可能性愈大，频率 $f_n(A)$ 也愈大，反之，如果 $f_n(A)$ 愈大，那么可以设想 A 出现的可能性也愈大. 因此，事件的频率反映了事件发生的可能性大小. 尽管随着试验次数的变化频率会有所波动，但实践证明事件的频率具有稳定性：当 n 充分大时，每个事件的频率都在某个常数附近摆动，该常数称为频率的稳定值. 频率的稳定值是介于 0 与 1 之间的数字，这个数字可用来表示事件发生的可能性大小. 频率的稳定性说明，事件发生的可能性大小是客观存在的，是事件本身固有的属性. 就好象一根木棒有长度、一块土地有面积一样.