郭永怀文集

中国力学学会
中国科学院力学研究所 编

科学出版社

郭 永 怀 文 集

中 国 力 学 学 会
中国科学院力学研究所
编

科 学 出 版 社
1 9 8 2

内容简介

郭永怀同志是我国著名的力学家，是发展我国力学事业的开拓者之一。在发展气体动力学、爆轰学以及新兴的力学学科方面，有重要贡献。在高速空气动力学方面尤有精深的造诣。1968年12月5日郭永怀同志为祖国的科技事业不幸牺牲。本文集汇集了郭永怀同志生前自1943年至1957年先后在国内外发表的18篇论文。内容包括：可压缩流体二维无旋亚声速和超声速混合型流动和上临界马赫数；光滑跨声速绕流及其稳定性；利用小参数展开法求解高超声速流动与边界层相互作用；以及高超声速流的一些基本理论等方面的研究成果。郭永怀同志对小参数展开法的发展，被国际上称为 PLK 方法。

本书可供力学工作者、工程技术人员和高等院校有关专业师生阅读。

郭永怀文集

中国力学学会
中国科学院力学研究所 编

（编辑组 石光漪 戴世强 李家春 谈庆明）

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1982年12月第一版　开本：787×1092 1/16

1982年12月第一次印刷　印张：21

印数：精 1—1,550　插页：精 3 平 1

　　　平 1—1,950　字数：492,000

统一书号：13031·2026

本社书号：2765·13—2

定价：布脊精装 4.30 元；平装 3.40 元

郭 永 怀

（1909—1968）

目　　录

纪念郭永怀同志 ……………………………… 中国力学学会、中国科学院力学研究所（1）
物体在剪切流中所受的力和力矩(1943年)………………………………（4）
可压缩粘性流体在直管中的流动(1943年)………………………………（7）
可压缩流体二维无旋亚声速和超声速混合型流动和上临界马赫数（1946年）……（22）
论跨声速流的稳定性（1946—1947年）………………………………（100）
有限振幅球面波或柱面波的传播和激波的产生（1947年）………………………（102）
可压缩流体二维无旋跨声速流动（1948年）………………………………（112）
关于速度图方法（1949年）………………………………（166）
绕翼型的二维跨声速流（1951年）………………………………（168）
论二元光滑跨声速流的稳定性（1951年）………………………………（191）
关于中等雷诺数下不可压缩粘性流体绕平板的流动（1953年）……………………（199）
弱激波从沿平板的边界层的反射
I. 用动量积分方法分析弱激波与层流和湍流边界层的相互作用（1953年）…（212）
II. 用微分方程方法分析斜激波与层流边界层的相互作用（1953年）…………（246）
沿高超声速运动平板的粘性流动 [I]（1956年）………………………………（276）
沿高超声速运动平板的粘性流动 [II]（1956年）………………………………（296）
Prandtl 数对绕平板高速粘性流的影响（1956年）………………………………（299）
楔的高超声速可压缩粘性绕流（1956年）………………………………（302）
高超声速粘性流动中的离解效应（1957年）………………………………（313）
现代空气动力学的问题（1957年）………………………………（321）
写在《郭永怀文集》的后面………………………………钱学森（331）

纪念郭永怀同志

郭永怀同志是中国共产党的优秀党员，是我国卓越的力学家．1968年12月5日，他为着祖国的科学技术事业，不幸牺牲，被授予烈士称号．我们深切地怀念他．我们要学习他无限忠诚于党的科学事业的崇高精神，学习他高贵的品质和谦虚、严谨的治学态度，学习他密切联系群众的作风．他是我国科学工作者的榜样．

郭永怀同志于1909年出生在山东省荣成县西滩郭家村一个农民的家庭里．他少年好学，在青岛大学附中毕业后，1929年进入南开大学预科理科班，1935年在北京大学物理系毕业并继续在该系作研究生．1940年公费出国留学，在加拿大多伦多大学应用数学系辛格（J. L. Synge）教授的指导下进修．辛格认为，郭永怀是他一生中很少遇到的优秀青年学者．1941年5月，郭永怀同志在多伦多大学以优异成绩取得硕士学位．1941年底，他到了美国加州理工学院航空系，在著名力学家冯·卡门的指导下从事可压缩流体力学，特别是跨声速流体力学解的不连续性问题的研究，再次以优秀成绩获得博士学位．1946年，他受聘于美国康奈尔大学，担任教授．1956年回国后，任中国科学院力学研究所副所长、《力学学报》主编等职务．他是全国人民代表大会代表、政治协商会议全国委员会委员．

郭永怀同志无限热爱祖国，热爱中国共产党，他一生刚直不阿．早在求学时期，他鄙视国民党的行径，把国民党反动政府偷偷塞在“考取公费通知书”中的加入国民党的“申请书”撕成碎片，扔进了大海；为了抗议日寇侵略中国，以及国民党反动派的屈辱卖国，他和他的同学毅然拒绝日寇的签证，从即将开航的轮船上走下来，宁愿丢失出国求学的良机，也绝不丧失中国人的骨气．郭永怀同志早年怀着“科学救国”的愿望，身在国外，苦读寒窗，念念不忘苦难的祖国，关心着国内的情况．新中国诞生的前夕，他参加了康奈尔大学进步的科学工作者协会．他常常把朋友们邀到他的家里，从可能得到的一切消息中，欣喜地研究着、讨论着祖国的沧桑巨变．中国人民从此站起来了！他——一个远在海外，尝过洋人白眼的游子；一个身经国内贫穷、战乱、忧患的爱国学者，极其敏感地体验到中国共产党的英明、伟大与正确．他感到了无限的光明、温暖与希望．1956年，祖国发出了向科学进军的伟大号召．郭永怀同志毅然放弃了优越的工作和生活条件，冲破重重阻力，回到了祖国．

郭永怀同志回国后，就竭尽全力地投入了实现社会主义祖国第一个五年建设计划的紧张工作．他担任全国自然科学规划力学专业组副组长的职务，与其他科学家一起，为祖国力学科学事业的发展，制订了近期计划与长远奋斗目标，使我国近代力学科学技术从一起步就发展很快．他对中国共产党的政策和指示，衷心拥护，身体力行．他努力钻研马列主义和毛泽东思想，多次谈到，不掌握辩证唯物主义，就搞不好自然科学．他严于解剖自己，实行批评与自我批评．在三年困难时期，作为一个长期在国外生活过的高级知识分子，他与全国人民一道，同甘共苦，努力奋斗，毫无难色．他曾激动地说：“在国家遭受自然灾害的三年中，亲眼看到全国人民，紧密团结在党的周围，同甘共苦，我从内心受到感动．从

这样伟大的党、伟大的人民，我看到我们国家的前途，世界革命的前途.”1961年，这位毕生追求科学真理的学者，终于光荣地成为中国共产党党员. 从此，他作为无产阶级先锋战士的一员，在党的领导下，更加兢兢业业，忘我地工作.

郭永怀同志最为难能可贵的品质是，在政治风浪中，他敢于坚持真理，实事求是，不东摇西摆. 当林彪、“四人帮”反革命修正主义路线猖獗一时的时候，力学研究所的许多研究课题被迫停止，队伍被拆散，人员被改行. 郭永怀同志平时为人是很和蔼、耐心的，这时，他愤怒了. 他大声疾呼：力学研究所不能“散”，基础研究必须搞下去！他顶着压力，采取各种措施，让一些科研项目继续进行，保护着一些专业的骨干不被改行. 今天，当我们排除了阻力，继续发展力学科学研究事业的时候，事实证明了郭永怀同志的远见卓识.

郭永怀同志一直从事流体力学、空气动力学、跨声速方面的研究，对于发展气体动力学、爆轰学以及新兴的力学学科，作出了重要贡献.

他在高速空气动力学方面，有很深的造诣. 四十年代后期，他大力研究了亚声速和超声速混合流动问题. 在物体绕流中，是否存在连续的跨声速流动解，这在理论上和实用上都是十分重要的课题. 他与钱学森同志一起，发表了《可压缩流体二维无旋亚声速和超声速混合型流动和上临界马赫数》的论文，用超几何函数展开，发展了查普雷金的速度图法，使解在整个流场中很快收敛. 以后，郭永怀同志又把该工作进一步推广到包括有曲率的流动情况，以及绕儒可夫斯基薄翼流动的情况. 他还研究了绕物体跨声速流动的稳定性问题. 对于高超声速可压缩粘性流体绕尖劈运动和高超声速粘性流中的离解效应等，他也进行了成功的研究. 在突破“声障”，并进一步提高超声速飞行速度这一科学成就中，郭永怀同志创造性的作出了自己的一份贡献，受到了国际上的普遍重视与公认.

1953年前后，郭永怀同志研究了激波与边界层的相互作用，特别是求出了远场超声速流与近场边界层的相互作用，推导出速度场和压力场的完整表达式，得到了与实验一致的理论分析结果. 这个开创性的工作，把由彭加勒（H. Poincaré）开始，并由莱特希尔（J. M. Lighthill）进一步发展成为在全区域一致有效的小参数展开渐近求解的方法，运用到需要对接远场解和近场解的复杂情况，被称为 PLK 方法. 回国后，他继续指导学生研究湍流边界层方面的工作，对钝体头部湍流传热给出了较好的计算方法.

郭永怀同志所提出的超高速气体动力学的名词和概念，在国内已被广泛应用. 他利用激波层理论，给出了钝体声速线以前区域的计算，得到了较满意的结果. 以后他又指导研究了钝体后身的绕流，提出了熵层分析的方法，在钝锥锥面上，获得了满意的压力分布和其它物理量的分布；并且解释了压力过度膨胀和回升的现象. 1963年，郭永怀同志指出，对于钝锥绕流，在一定情况下，在后身流场，可能产生“悬挂”激波，通过理论分析，阐明了这一问题，给出了产生二次激波的条件. 对于钝体高超声速绕流最大熵值线问题，钝体超高速绕流高温气体效应问题，以及钝体绕流激波形状的研究，也都作出了成绩.

在进行这些研究的同时，他与钱学森同志一起，对我国高超声速和超高速气动实验研究十分重视. 在他们的倡议指导下，我国开始建立了激波管实验室，风洞实验基地以及很多超高速实验设备.

郭永怀同志关心高超声速气动力学的应用研究，对于弹头外形也提出过很好的建议，对烧蚀、热环境和气动特性的分析与研究非常重视. 理论研究的成果，不断地推荐到生产部门采用，对发展我国导弹、宇航事业，做出了贡献.

1964 年，郭永怀同志开始注意到带灰尘粒子的高超声速流动，当时他解释说："我总觉得弹头穿过核爆区时，灰尘粒子会有影响". 在他的指导下，他的学生开始研究带灰尘气体穿过激波的运动. 现在看来，"云粒子侵蚀"问题已成为实现"高超声速再人"相当重要的课题，国外在这方面已取得很大进展，而国外的工作比郭永怀同志的想法晚了四年. 他们是在 1968 年之后才开始的.

在核爆震力学方面，他为国防科学事业，做出了贡献.

郭永怀同志在力学领域中的兴趣是多方面的. 例如，在开创我国的磁流体力学与化学流体力学研究方面，他也作了不少工作.

郭永怀同志是我国力学科学事业的开拓者之一. 自他回国直到牺牲前的十余年中，他把全副精力献给了祖国的力学科研事业；献给了中国科学院力学研究所的建设与发展工作；献给了我国力学科学技术队伍的培养与教育事业.

对于研究所的建设，他从学科的设置、研究室方向与任务的确定，科学人才的选拔与使用，甚至连图书馆桌椅与灯光的设计，大楼的水、电、气管道配置，都亲自提出建议，仔细审查，付出了许多心血. 他把自己比喻为"一颗铺路的石子"，把大量的时间放在培养青年一代的身上. 他与周培源、钱学森、钱伟长等同志一起，规划了全国高等学校力学专业的设置；组织了全国第一届力学研究班，并亲自担任"流体力学概论"的教学工作. 他兼任中国科学技术大学化学物理系的主任，为该系的创立，操劳筹划. 他亲自带研究生，经常与年青人一起切磋. 他循循善诱、诲人不倦，以渊博的学识和出色的诱导艺术，为祖国培养了一大批力学科学研究的骨干.

郭永怀同志为人严谨，以至诚待人，对自己严格，要求别人也严格. 在学术问题上，他从不以权威自居，而是认真地开展学术民主. 他经常教育《力学学报》编辑人员，注意在学术刊物上建立正确的学风与文风，扶植新生的事物，爱护幼苗. 他本人就是这方面的模范. 对于年青人送来的文稿、译稿，他总是反复推敲，逐字逐句加以批注和修改. 郭永怀同志是勤奋学习的好榜样. 他常说："天才是没有的，关键在于刻苦学习". 他几十年如一日，从来不休假、不午休；早出晚归，埋头书案，工作就是他最大的乐趣. 他在个人生活上，简单朴素，淡泊明志. 他把稿酬作为党费上缴，把电冰箱、电风扇等交给公家使用. 他所用的一支黑色的钢笔，还是中学时代的，直到牺牲，仍然用的是这一支.

郭永怀同志的牺牲，是我国力学界的很大损失. 今天，当我们纪念他的时候，不禁忆起他在 1965 年说的话："我作为一个中国人，特别是作为革命队伍中的一员，衷心希望象我们这样一个大国早日实现四个现代化，早日建成繁荣富强的社会主义国家，来鼓舞全世界革命人民."

郭永怀同志的遗言将成为鼓舞我们前进的动力，他的遗愿，我们一定能实现.

中 国 力 学 学 会
中国科学院力学研究所
一九七八年十二月五日

物体在剪切流中所受的力和力矩[1)]

最近,钱学森解决了绕 Joukowsky 翼型常涡量分布的定常二维流动问题[1]. 值得注意的是,流体动力可以同样用类似于众所周知的 Blasius 定理的形式来表达,它包含有复势函数的环路积分. 下面方程的推导比起钱氏的要简单.

1. 运 动 方 程 式

设 u 和 v 分别为平行于 x 和 y 轴的速度分量. 在二维定常运动的情况下,欧拉动力学方程为:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}-v\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{1.2}$$

这里 p 是压力,ρ 是流体的密度. 连续方程是

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1.3}$$

对于钱氏[1]所考虑的剪切流,流场中的涡量处处恒定,并等于 $-k$, 这就是

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=-k,\quad k>0 \tag{1.4}$$

乍看起来, 对于三个变量却有四个方程, 这样的问题似乎是不定的. 然而, 在式(1.1)和(1.2)之间消去 p, 其结果依据式(1.4)可以化为方程(1.3). 这就表明,满足方程(1.3)和式(1.4)的任何一个解都与方程(1.1)和(1.2)相一致.

为简化问题,解写成下面的形式:

$$u=ky+u' \tag{1.5}$$

$$v=v' \tag{1.6}$$

于是,方程(1.3)和(1.4)化为

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=0 \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial y}=0 \tag{1.8}$$

这些方程由下列各式满足:

$$u'=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v'=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.9}$$

$$u'=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v'=-\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{1.10}$$

---

1) 原文名: On the Force and Moment Acting on a Body in Shear Flow.
发表于: Quart. Appl. Math., **1** (1943), 273.

式中 ψ 和 φ 是复势函数 $F(z)$ 的虚部和实部，也就是

$$\varphi + i\psi = F(z), \quad z = x + iy \tag{1.11}$$

和

$$u' - iv' = w'(z) \tag{1.12}$$

对一个给定的问题，函数 $F(z)$ 由垂直于物体外形的速度分量等于零的条件来确定。

根据方程(1.4)，(1.5)和(1.6)，方程(1.1)和(1.2)给出

$$p = -\frac{\rho}{2} q'^2 - \rho k u' y + \rho k \psi \tag{1.13}$$

式中 $q'^2 = u'^2 + v'^2$，且积分常数包含在 ψ 中。

2. 力 和 力 矩

如果这种运动是二维定常流，作用在物体上的流体动力学的分力和分力矩[2] 由以下各式给出：

$$X = -\oint p dy - \rho \oint u(udy - vdx) \tag{2.1}$$

$$Y = \oint p dx + \rho \oint v(vdx - udy) \tag{2.2}$$

$$M = \oint p(xdx + ydy) - \rho \oint (-v^2 x dx - u^2 y dy + uvydx + uvxdy) \tag{2.3}$$

其中，沿包围物体的封闭曲线取线积分。用方程(1.5)，(1.6)和(1.13)，上述方程可写成

$$X = -\frac{\rho}{2} \oint [(u'^2 - v'^2)dy - 2u'v'dx] - \rho k \oint [(\psi + u'y)dy - v'ydx] \tag{2.4}$$

$$Y = -\frac{\rho}{2} \oint [(u'^2 - v'^2)dx + 2u'v'dy] + \rho k \oint [(\psi - u'y)dx - v'ydy] \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} M = &-\mathrm{Re}\left[\frac{\rho}{2} \oint z w'^2 dz\right] + \rho k \oint [(\psi - u'y)(xdx + ydy) \\ &- (v'yx - 2u'y^2)dy + v'y^2 dx] \end{aligned} \tag{2.6}$$

假如只考虑具有封闭边界的物体，则流场中不存在源项。那么，流函数 ψ 是单值的，且

$$\oint \psi dx = \oint x(v'dx - u'dy)$$

$$\oint \psi dy = \oint y(v'dx - u'dy)$$

由这些关系不难推出

$$X = -\frac{\rho}{2} \oint [(u'^2 - v'^2)dy - 2u'v'dx] \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} Y = &-\frac{\rho}{2} \oint [(u'^2 - v'^2)dx + 2u'v'dy] \\ &+ \rho k \oint [v'(xdx - ydy) - u'(ydx' + xdy)] \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} M = &-\mathrm{Re}\left[\frac{\rho}{2} \oint z w'^2 dz\right] + \frac{\rho k}{2} \oint [-u'\{(x^2 - y^2)dy + 2xydx\} \\ &+ v'\{(x^2 - y^2)dx - 2xydy\}] \end{aligned} \tag{2.9}$$

由此可立即得出下列表达式:

$$X - iY = \frac{i\rho}{2}\oint w'^2 dz + iI_m\left[\rho k \oint w' z dz\right] \tag{2.10}$$

和

$$M = -\mathrm{Re}\left[\frac{\rho}{2}\oint z\left(w' - \frac{ikz}{2}\right)^2 dz\right] \tag{2.11}$$

方程式(2.10)和(2.11)可视为 Blasiu 定理的推广.容易证实这与钱氏[1]的表达式是一致的.因而,利用这些新的公式在一定程度上能简化其力和力矩的计算.

作者向钱学森博士表示感谢,因为在公开发表之前使用了他的论文,并与他作了有益的讨论.

参　考　文　献

[1] H. S. Tsien, Symmetrical Joukowski airfoils in shear flow, Quarterly Appl. Math., 1, 129(1943)
[2] W. F. Durand, Aerodynamic Theory, Vol. 2, Springer, Berlin, 1935, pp. 31—33

(石光漪译,呼和敖德校)

可压缩粘性流体在直管中的流动[1)]

引　　言

解不可压缩粘性流体在任意截面的直管中的定常流动问题容易化为 Dirichlet 问题. 这就是大家熟悉的 Hagen-Poiseuille流[1],而圆管的流动则更是众所周知的. 然而,若是可压缩的定常流,则问题会困难得多. 虽然曾经从实验上[2]、并用比较粗略的水力学方法探讨过[3],但在这之前,还从没有发表过任何数学的论述.

本文的方法是基于低马赫数下的幂级数展开. 用级数运算是有效的. 这里不打算讨论其收敛性.

管壁速度为零的边界条件与关于压降的数据还不足以使这个数学问题有确定的解. 事实上,这是寻找一个解而非定解的问题,象在不可压缩流体的这样一种经典情形中一样,我们取最简单的解. 对于不可压缩流体,也同样会发生部分的不确定.

第一部分对一般截面管问题进行处理. 给出了以动量矢量、比容表达的运动方程,阐明了幂级数展开的过程. 对于低马赫数流动,这种方法可以认为是一种逐次逼近的过程.

零级近似是 Hagen-Poseuille 流.

在一级近似里,流动仍然与管壁平行,速度的确定再一次化为 Dirichlet 问题(5.3).

在二级近似里,速度不再平行于管壁. 平行于管壁的动量分量是沿管长的线性函数(6.3),这个函数的系数又根据 Dirichlet 问题(6.8),(6.9)确定. 横向动量分量与(6.13)中的 $f_\alpha^{(2)}$ 成正比,而与管长无关;将其化为 Dirichlet 问题(6.14)和双调和问题(6.15)求解.

在零级近似里,压力是管长的线性函数(4.7),在一级近似里,是二次函数(5.8),在二级近似里,是三次函数(6.27).

阻力和流量在第 7 节中考虑.

第二部分给出圆管的显解.

第一部分　一般截面管

1. 运动方程

考虑在管两端压差的作用下,可压缩粘性定常流流经任意一个定截面管的情况. 设该管具有很圆滑的管口,致使不产生最初的扰动. 数学理论范围是在相距 l' (管长)的两个垂直截面之间的管内;这两个截面称为"入口"和"出口".

令 x'_i 为以入口截面中心为原点的笛卡儿坐标系, x'_0 轴位于管中心线; 令 u'_i 为速度分量. 则管中流体的运动满足在没有体积力情况下的一般定常运动方程[4,5].

---

1) 原文名: The Flow of a Compressible Viscous Fluid Through a Straight Pipe.
发表于: Jour. Math. Phy., 22 (1943), PP. 13—30.

$$\rho' u'_j u'_{i,j} = -P'_{,i} + \mu \Delta' u'_i + \frac{\mu}{3} \theta'_{,i} \tag{1.1}$$

式中 $\theta' = \partial u'_j / \partial x'_j$，$\Delta'(=\partial^2/\partial x'_i \partial x'_j)$ 是拉普拉斯算子，ρ' 是密度，p' 是压力，μ 是粘性系数，它是温度的函数，并在很大程度上与压力无关．与这些量相关联的连续方程为

$$(\rho' u'_j)_{,j} = 0 \tag{1.2}$$

此处方程是按照指数符号表示的，拉丁文下标的范围为 0，1，2，逗号表示偏导数，以重复下标表示求和． 假设运动或为等温的、或为绝热的，因此存在一个确定的压力-密度关系．在上述两种情况下都将 μ 当作常数，即当压力改变时，忽略 μ 的变化；而在绝热状态下，当温度改变时，μ 的变化也被忽略．

为简便起见，我们定义一些常数．这些常数将在以后的计算中有用．令 $\bar{p}'$ 为出口截面的平均压力，定义为

$$\bar{p}' = \frac{1}{A} \iint p' dx'_1 dx'_2, \qquad \text{当 } x'_0 = l' \text{ 时}, \tag{1.3}$$

其中，A 是横截面面积．按照流体的压力-密度关系，令 $\bar{\rho}'$ 为相应于 $\bar{p}'$ 的密度．最后，令 $\bar{u}'$ 为以密度加权的横截面的平均速度，因此，平均速度与具体截面的选择无关，即

$$\bar{u}' = \frac{1}{\bar{\rho}' A} \iint \rho' u'_0 dx'_1 dx'_2, \qquad \text{对任意 } x'_0 \tag{1.4}$$

现在可以用下面的变换式将方程表示为无量纲形式：

$$x_i = \frac{x'_i}{2m}, \qquad u_i = \frac{u'_i}{\bar{u}'}$$

$$p = \frac{p' - \bar{p}'}{\bar{\rho}' \bar{u}'^2}, \quad \rho = \frac{\rho'}{\bar{\rho}'} \tag{1.5}$$

式中 m 为截面的平均水力半径，即 $m = A/P$，这里的 P 是边界曲线 C 的长度．将式(1.5)代入式(1.1)和(1.2)，得到

$$\rho u_\beta u_{\alpha,\beta} + \rho u_0 u_{\alpha,0} = -p_{,\alpha} + \frac{2}{R} \Delta u_\alpha + \frac{2}{3R} \theta_{,\alpha} \tag{1.6}$$

$$\rho u_\beta u_{0,\beta} + \rho u_0 u_{0,0} = -p_{,0} + \frac{2}{\mathrm{Re}} \Delta u_0 + \frac{2}{3\mathrm{Re}} \theta_{,0} \tag{1.7}$$

$$(\rho u_\beta)_{,\beta} + (\rho u_0)_{,0} = 0 \tag{1.8}$$

希文下标范围为 1，2；式中 $\theta = \partial u_j / \partial x_j$，Re 是雷诺数，即 $\mathrm{Re} = 4m\bar{u}'/\nu$，这里的 $\nu\left(=\frac{\mu}{\bar{\rho}'}\right)$ 是平均运动粘性系数．

u_i 满足边界条件

$$u_i = 0, \qquad \text{在边界 } C \text{ 上} \tag{1.9}$$

这些看起来仅是主要的边界条件，如下所示，这些边界条件一般讲不足以确定一个定解．我们用这些部分的不定性来得到简单的解析解，以期望这些解的物理真实性得以证明，就像弹性力学中的 Saint Venant 解被证明一样．

以无量纲变量积分式表示流体通过任意截面的流量不变是方便的．表示为

$$\iint \rho u_0 dx_1 dx_2 = \frac{P^2}{4A} \tag{1.10}$$

只要已知速度 u_i，则可由式(1.6)和(1.7)解出 p. 因为包含 p 的微分方程是一阶方程，有一个任意常数要由我们进行选择时，此常数以出口条件确定之，即

$$\iint p\,dx_1\,dx_2 = 0, \qquad \text{对于}\ x_0 = l = \frac{l'}{2m} \tag{1.11}$$

2. 压力-密度关系

公式(1.6)，(1.7)和(1.8)包含了五个未知数，不用 p 与 ρ 的关系式则不能求解．如上所述，假定不是等温就是绝热变化．则必须将气体状态与液体状态分别处理．由下文可见，从物理的观点证明有效近似的一般处理方法是可行的．

令M表示马赫数，定义为流体的速度 $\bar{u}'$ 与该流体中的声速之比，即

$$\mathrm{M} = \frac{\bar{u}'}{c_0} \tag{2.1}$$

式中 c_0 为在压力 $\bar{p}'$ 时流体的声速，即

$$c_0^2 = (dp'/d\rho')_{p=\bar{p}'}$$

假定处理等温条件下的理想气体，则压力-密度关系是 Boyle 定律．

$$\rho' = \kappa p'$$

其中 κ 是常数．按此定律，相应于 $\bar{p}'$ 的 $\bar{\rho}'$ 值为

$$\bar{\rho}' = \kappa \bar{p}'$$

取这两个方程之差并转换为无量纲变量，得到

$$\rho = 1 + M^2 p \tag{2.2}$$

同样地，在绝热条件下，压力一密度关系式取

$$\rho^\gamma = 1 + \gamma M^2 p \tag{2.3}$$

γ 是比热比．

于数学的理由，我们只研究在粘性系数 μ 是常数的情况，这肯定是气体的等温运动状态．当绝热变化时，由于温度不再保持恒定，计算将不精确．然而在气体中，例如空气，温度对其粘性系数的变化仅有轻微的影响，当温度从 0 °增加到 20℃ 时，μ 仅增加 6% 左右[6]，所以，当温度变化很小时，我们可以把气体的 μ 看作常数．

在液体情况下，一般的热力学特性比较含糊不清，也从未建立过明确的定律．然而实验表明[7]，水流经管子时，只要管内保持层流，则管子各处的温度显然是相同的；在恒定温度下，压力为中常范围时，压力-密度的关系近似于线性关系[8]．由此，假定等温定律(2.2)对于液体亦为有效．

为了数学处理的方便，我们可以把式(2.2)看作是(2.3)的特殊情况，虽然它们表示的是完全不同的物理过程．因此，我们将采用式(2.3)，必要时，令 $\gamma=1$，就可化为式(2.2)．

3. 近 似 方 法

在式(1.6)，(1.7)，(1.8)和(2.3)里，对于变量 u_i，p 和 ρ 有了一个完整的二阶非线性偏微分方程组．现在我们用逐次逼近的方法进一步求解，在此近似中，通过适当的假定，使方程线性化．

由式(1.6)和(1.7)消去 p 并引进动量矢量 V_i

$$u_i = \sigma V_i \tag{3.1}$$

其中 $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$，则得到两个方程

$$\{V_B(\sigma V_\alpha)_{,\beta} + V_0(\sigma V_\alpha)_{,0}\}_{,0} - \{V_\beta(\sigma V_0)_{,\beta} + V_0(\sigma V_0)_{,0}\}_{,\alpha}$$
$$= \frac{2}{\mathrm{Re}} \Delta\{(\sigma V_\alpha)_{,0} - (\sigma V_0)_{,\alpha}\} \tag{3.2}$$

以及连续方程

$$V_{\beta,\beta} + V_{0,0} = 0 \tag{3.3}$$

设上式的因变量可以 M^2 的升幂级数展开：

$$V_i = V_i^{(0)} + M^2 V_i^{(1)} + M^4 V_i^{(2)} + \cdots \tag{3.4}$$

$$\sigma = 1 + M^2 \sigma^{(1)} + M^4 \sigma^{(2)} + \cdots \tag{3.5}$$

$$p = p^{(0)} + M^2 p^{(1)} + M^4 p^{(2)} + \cdots \tag{3.6}$$

由于式(2.3)可写作

$$\sigma = (1 + \gamma M^2 p)^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{3.7}$$

则式(3.5)与(3.6)可用二项式展开给出下列关系：

$$\sigma^{(1)} = -p^{(0)}, \qquad \sigma^{(2)} = -p^{(1)} + \frac{\gamma + 1}{2}(p^{(0)})^2,$$
$$\sigma^{(3)} = -p^{(2)} + (\gamma + 1)p^{(1)}p^{(0)} - \frac{(\gamma + 1)(2\gamma + 1)}{6}(p^{(0)})^3, \ \cdots \tag{3.8}$$

将式(3.4),(3.5)代入式(3.2)和(3.3)，并把M的等幂次项归并在一起，取M的所有幂次方系数为零,从而得到一组方程．这组方程是复杂的，但必须列出，以便对后面的研究容易理解．与 M^0, M^2, M^4 相对应的方程如下：

$$\{V_\beta^{(0)} V_{\alpha,\beta}^{(0)} + V_0^{(0)} V_{\alpha,0}^{(0)}\}_{,0} - \{V_\beta^{(0)} V_{0,\beta}^{(0)} + V_0^{(0)} V_{0,0}^{(0)}\}_{,\alpha} = \frac{2}{\mathrm{Re}} \Delta\{V_{\alpha,0}^{(0)} - V_{0,\alpha}^{(0)}\} \tag{3.9}$$

$$V_{\beta,\beta}^{(0)} + V_{0,0}^{(0)} = 0 \tag{3.10}$$

$$\{V_\beta^{(0)} u_{\alpha,\beta}^{(1)} + V_\beta^{(1)} V_{\alpha,\beta}^{(0)} + V_0^{(0)} u_{\alpha,0}^{(1)} + V_0^{(1)} V_{\alpha,0}^{(0)}\}_{,0}$$
$$- \{V_\beta^{(0)} u_{0,\beta}^{(1)} + V_\beta^{(1)} V_{\alpha,\beta}^{(0)} + V_0^{(0)} u_{0,0}^{(1)} + V_0^{(1)} V_{0,0}^{(0)}\}_{,\alpha} = \frac{2}{\mathrm{Re}} \Delta\{u_{\alpha,0}^{(1)} - u_{0,\alpha}^{(1)}\} \tag{3.11}$$

$$V_{\beta,\beta}^{(1)} + V_{0,0}^{(1)} = 0 \tag{3.12}$$

$$\{V_\beta^{(0)} u_{\alpha,\beta}^{(2)} + V_\beta^{(1)} u_{\alpha,\beta}^{(1)} + V_\beta^{(2)} V_{\alpha,\beta}^{(0)} + V_0^{(0)} u_{\alpha,0}^{(2)} + V_0^{(1)} u_{\alpha,0}^{(1)} + V_0^{(2)} V_{\alpha,0}^{(0)}\}_{,0}$$
$$- \{V_\beta^{(0)} u_{0,\beta}^{(2)} + V_\beta^{(1)} u_{0,\beta}^{(1)} + V_\beta^{(2)} V_{0,\beta}^{(0)} + V_0^{(0)} u_{0,0}^{(2)} + V_0^{(1)} u_{0,0}^{(1)} + V_0^{(2)} V_{0,0}^{(0)}\}_{,\alpha}$$
$$= \frac{2}{\mathrm{Re}} \Delta\{u_{\alpha,0}^{(2)} - u_{0,\alpha}^{(2)}\} \tag{3.13}$$

$$V_{\beta,\beta}^{(2)} + V_{0,0}^{(2)} = 0 \tag{3.14}$$

其中

$$u_i^{(m)} = \sum_{n=0}^{n=m} \sigma^{(m)} V_i^{(m-n)}$$

求压力也需要建立一组方程，这组方程是由将式(3.4),(3.5),(3.6)代入运动方程(1.6),(1.7),(1.8)导出．这些与 M^0, M^2, M^4 相对应的方程如下：

$$V_i^{(0)}V_{i,j}^{(0)} = -p_{,i}^{(0)} + \frac{2}{\mathrm{Re}}\Delta V_i^{(0)} \tag{3.15}$$

$$V_j^{(0)}u_{i,j}^{(1)} + V_j^{(1)}V_{i,j}^{(0)} = -p_{,i}^{(1)} + \frac{2}{\mathrm{Re}}\Delta u_i^{(1)} + \frac{2}{3\mathrm{Re}}\theta_{,i}^{(1)} \tag{3.16}$$

$$V_j^{(0)}u_{i,j}^{(2)} + V_j^{(1)}u_{i,j}^{(1)} + V_j^{(2)}V_{i,j}^{(0)} = -p_{,i}^{(2)} + \frac{2}{\mathrm{Re}}\Delta u_i^{(2)} + \frac{2}{3\mathrm{Re}}\theta_{,i}^{(2)} \tag{3.17}$$

式中 $\theta^{(m)} = u_{j,j}^{(m)}$

我们从零级近似开始解这组方程．对于零级近似可作简单的假设使方程线性化，我们在求出零级近似速度之后，将它代入式(3.17)和(3.18)，由此计算出压力 $p^{(0)}$．$\sigma^{(1)}$ 是由式(3.8)的第一式给出．再将 $V_i^{(0)}$ 和 $\sigma^{(1)}$ 代入式(3.11)，就能计算出相应的次一级近似的量，等等．以此类推，可以进行到所需要的任一级近似．

对于全部近似的动量分量在边界线 C 上的边界条件是

$$V_0^{(n)} = V_a^{(n)} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.18}$$

如前所述，这些条件对确定由于解方程产生的所有任意函数一般来说是不充分的．我们将引进由式(1.10)导出的"标准化条件"，即对任一 x_0

$$\iint V_0^{(0)}dx_1dx_2 = \frac{P^2}{4A} \tag{3.19}$$

$$\iint V_0^{(n)}dx_1dx_2 = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{3.20}$$

对于压力，仅有终端条件，即它要求常数 n 在任何情况下与式(1.11)相一致，即对 $x_0 = l$

$$\iint p^{(n)}dx_1dx_2 = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.21}$$

4. 零级近似

为解零级近似方程，设 $V_a^{(0)} = 0$；则式(3.9)与(3.10)化为

$$\Delta V_{0,a}^{(0)} = 0 \tag{4.1}$$

$$V_{0,0}^{(0)} = 0 \tag{4.2}$$

对 $V_0^{(0)}$ 取 x_1, x_2 的任意函数使上述方程得到满足，$V_0^{(0)}$ 满足

$$\underset{2}{\Delta} V_0^{(0)} = -\Pi \tag{4.3}$$

这里 $\underset{2}{\Delta}$ 是二维拉普拉斯算子，而 Π 是常数．此解应满足条件

$$V_0^{(0)} = 0 \quad 在边界 C 上 \tag{4.4}$$

$$\iint V_0^{(0)}dx_1dx_2 = \frac{P^2}{4A} \tag{4.5}$$

由于式(4.5)，常数 Π 是确定的，解是唯一的．

如果把 $V_0^{(0)}$ 代回式(3.15)，得到

$$\Pi = -\frac{R}{2}p_{,0}^{(0)} \tag{4.6}$$

对这个方程的积分，我们由式(3.21)获得

$$p^{(0)} = \frac{2\Pi}{\text{Re}}(l - x_0) \tag{4.7}$$

零级近似是大家所熟知的 Poiseuille 流动.

已知 $p^{(0)}$，由式(3.8)的第一式得到

$$\sigma^{(1)} = -\frac{2\Pi}{\text{Re}}(l - x_0) \tag{4.8}$$

5. 一 级 近 似

为求一级近似，再设除沿 x_0 轴之外，速度分量为零. 因此，通过令 $V_\alpha^{(0)} = 0$，方程(3.11)和(3.12)化简为

$$\{V_0^{(0)}(V_0^{(1)} + \sigma^{(1)}V_0^{(0)})_{,0}\}_{,\alpha} = \frac{2}{\text{Re}}\Delta V_{0,\alpha}^{(1)} \tag{5.1}$$

$$V_{0,0}^{(1)} = 0 \tag{5.2}$$

对 $V_0^{(1)}$ 取 x_1，x_2 任意函数，使上述这些方程得到满足，$V_0^{(1)}$ 满足

$$\underset{2}{\triangle} V_0^{(1)} = \Pi\{V_0^{(0)}\}^2 + C_0^{(1)} \tag{5.3}$$

这里 $C_0^{(1)}$ 是个任意常数，边界条件

$$V_0^{(1)} = 0, \quad \text{在边界} C \text{上} \tag{5.4}$$

与另外的条件

$$\iint V_0^{(1)} dx_1 dx_2 = 0, \quad \text{对任意 } x_0 \tag{5.5}$$

结合，是满足唯一解的充分条件.

用这样计算出的 $V_0^{(1)}$，可以继续由式(3.16)求解 $p^{(1)}$，即

$$0 = -p_{,\alpha}^{(1)} + \frac{2}{3\text{Re}}(\sigma_{,0}^{(1)}V_0^{(0)})_{,\alpha} \tag{5.6}$$

$$0 = -p_{,0}^{(1)} + \frac{2C_0^{(1)}}{\text{Re}} + \frac{4\Pi^2}{\text{Re}^2}(l - x_0) \tag{5.7}$$

积分得到

$$p^{(1)} = -\frac{2\Pi^2}{\text{Re}^2}(l - x_0)^2 - \frac{2C_0^{(1)}}{\text{Re}}(l - x_0) + \frac{4\Pi}{3\text{Re}^2}(V_0^{(0)} - 1) \tag{5.8}$$

其中积分常数由式(1.11)确定. 由式(3.8)的第二式，得到

$$\sigma^{(2)} = \frac{2\Pi^2(\gamma + 2)}{\text{Re}^2}(l - x_0)^2 + \frac{2C_0^{(1)}}{\text{Re}}(l - x_0) - \frac{4\Pi}{3\text{Re}^2}(V_0^{(0)} - 1) \tag{5.9}$$

6. 二 级 近 似

用以上所得结果，方程(3.13)化为

$$V_0^{(0)}V_{\alpha,00}^{(2)} - (V_\beta^{(2)}V_{0,\beta}^{(0)} + V_0^{(0)}V_{0,0}^{(2)})_{,\alpha} = \frac{2}{\text{Re}}\Delta(V_{\alpha,0}^{(2)} - V_{0,\alpha}^{(2)})$$

$$+ \frac{4(\gamma + 1)\Pi^2}{\text{Re}^2}x_0\{V_0^{(0)}\}^2 + F_{,\alpha} \tag{6.1}$$

其中