高等学校教学用書

解析函数論

A. И. 馬庫雪維奇著

高等教育出版社

高等学校教学用書

解析函数論

A. И. 馬庫雪維奇著
黃正中 莫紹揆
周伯壎 徐家福 譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы) 1950年出版的馬庫雪維奇 (A. II. Маркушевич) 著“解析函数論”(Теория аналитических функций) 譯出的。原書經苏联高等教育部审定为高等学校用的教学参考書。

本書系南京大学数学系黃正中、莫紹揆、周伯壎、徐家福合作譯出的。

解　析　函　数　論

A. II. 馬庫雪維奇著

黃正中　莫紹揆　周伯壎　徐家福譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

商務印書館上海廠印刷　新華書店總經售

統一書號 13010·240　開本 787×1092 1/16　印張 37 6/8　字數 863,000

一九五七年五月第一版

一九五七年五月上海第一次印刷

印數 1—8,000　　定價(8) ¥4 10

原　　序

本書系由著者連年对莫斯科大学数学力学系学生的授課講稿編輯而成。它包括解析函数論的基础課程的材料，橢圓函数論概要，以及解析函数論的一些补充資料，如致密性原則、保角映射問題、漸近法与插补法、整函数論初步、黎曼曲面的概念、解析延拓的理論。

所有这些材料都有系統地放入書中，並連成一气。凡在基础課程大綱以外的节段，悉用小字排印，初讀时可將其略去。与大学基础課程的要求比較，本書引导讀者略为深入。著者照例將書中討論引到如此地步，再深入便須閱讀現有的俄文專集。凡需要勒貝格測度与勒貝格积分方能討論的問題，本書全未触及。关於这些問題，請讀者参考 И. И. 普利瓦洛夫的專著"單値解析函数論的边値問題"与其他專門論文，前書的第二版很快就会在苏联技术理論書籍出版社出版。書中未放入調和測度論，与半純函数的一般理論；关於这一部分，讀者可閱讀 P. 湼瓦林那的"單値解析函数論"。本書內沒有对黎曼曲面的解析函数，作有系統的討論；这部分似应作为專著的題材。这些問題的討論，讀者可在 P. 柯朗的"函数的几何理論"和 Н. Г. 傑波达略夫的"代数函数論"中找到。

著者在此不再提本書所沒有涉及或仅略涉及的題目，而这些題目或許是讀者希望在解析函数論的巨著中找到。即使只在大体上来滿足这样的要求，本書的篇幅也势將增加一倍。关於这些材料，也不得不限於介紹文献，附於書末。

著者在本書中力求指出祖国科学在解析函数論方面有重要意义的成就。与此有关的有 Н. И. 罗巴切夫斯基的几何学，它和分式線性变換有密切关联，它在任意黎曼曲面的解析函数論中以及自同構函数論中，也曾起決定性的作用；其次有：上一世紀七十年代初 Ю. В. 索霍茨基建立的哥西型积分的边値理論（据我所知，Ю. В. 索霍茨基的首創权系第一次在这里指出），Ю. В. 索霍茨基关於函数在本性奇点鄰域內的性狀定理（此定理常誤以为是外尔斯特拉斯的），Н. Е. 朱哥夫斯基与 С. А. 查布列金关於水力学的經典結果，С. Н. 伯恩斯坦、М. А. 拉弗仁切夫、М. В. 刻勒德施在函数的逼近論上一連串的結果，以及其它。

著者也力圖強調指出解析函数論上先鋒——彼德堡科学院著名学者欧拉——的功績。特别是，著者不用基本方程的傳統命名——哥西-黎曼方程，而引入从历史上看更正确的称呼——达朗貝尔-欧拉方程。

关於解析函数論的更詳細的發展史，和祖国科学在这方面所起的作用，讀者可参閱著者的"解析函数論發展簡史"；此書將緊接本書之后出版。

本書的特点不再多談了。这些特点部分地可以从目录看出。此地仅仅指出，作者已完全放棄通常教科書上从个别例子来認識黎曼曲面概念的那种办法，而改用頗为抽象的，而在这些問題上似乎又不可避免的 Г. 外尔思想来講。为說明这思想，引入"抽象黎曼曲面"的术語；此外，討論

了更特殊的，同时在函数論上又是更重要的概念"本义的黎曼曲面"，它是作为球面的掩蔽曲面而引出的。著者採用的观点，使讀者在本書末尾才熟悉黎曼曲面。但这並不影响初等多值函数及其分支点在本書前几章所佔有的适当位置。此处利用了次一事实，即半純函数的反函数的黎曼曲面可以表示为單叶域；这單叶域已按某种方式分为子域，使在这些子域上面，可以区分各个單值支。

本書根本上異於著者在1944年由 Учпедгиз 出版的"解析函数論初步"，該書的目的系供未来的初等数学教师参考之用。但在本書內，著者也自該"初步"內取用了个别材料。现在要指出的是，根据著者的观点，作为中学数学教师应該掌握的复变函数知識，本書前三章的内容是"最最起碼的"。

物理数学科学博士 Д. А. 拉伊葛夫閱讀本書原稿时，曾給予宝貴的指示和意見，又承研究生 Г. А. 佛里德曼閱讀全部原稿，並作了一系列有用的註釋，著者深致謝意。

著者

譯者序

馬尔庫雪維奇教授所著解析函数論一書內容丰富，証理严謹，討論深入細致，尤其是它包含了不少俄国及苏联数学家們的研究成果，以及解析函数理論在其他学科諸如天文、力学上的应用，这都是在同类書籍中少見的。因此，我們在譯完之后，都感到学到了不少东西。

我們費了差不多一年的时間来譯完这本書。我們的办法是分头負責，由徐家福同志負責第一、二兩章，周伯壎同志三、四兩章，莫紹揆同志五、六兩章，黃正中同志七、八兩章。开始时，我們在教学之余每星期抽出半天来交換翻譯的經驗，並报告在各人所譯部分內的精彩材料，可是，后来因为教学工作过忙，这項工作就不得已而停止了。

在譯这本書的时候，我們曾开过不少次会来討論各人在翻譯时所碰到的問題。近四、五个月来，我們又彼此傳閱譯稿，互提意見，目的在力求譯文恰当，前后名詞統一，所用語气基本上相同，並且最重要的是要使讀者能看得懂。虽然我們曾作了相当的努力，各人也都修改了原譯稿达七、八次之多，可是到底是四个人譯的，四个人的写作習慣不尽全同，而且我們又是初次合作，我們主观上覺得現在的定稿还不完全像是一个人写的。如有不妥之处，希望讀者們指出。我們誠恳地希望同志們向我們提出意見，使我們在俄文与数学方面都能有所提高，謝謝。

譯者 南京大学数学系 1955年1月

目　录

高等学校教学用書

解析函数論

A. И. 馬庫雪維奇著
黃正中　莫紹揆
周伯壎　徐家福　譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы) 1950年出版的馬庫雪維奇 (А. И. Маркушевич) 著“解析函数論” (Теория аналитических функций) 譯出的。原書經苏联高等教育部审定为高等学校用的教学参考書。

本書系南京大学数学系黃正中、莫紹揆、周伯壎、徐家福合作譯出的。

解　析　函　数　論

A. И. 馬庫雪維奇著

黃正中　莫紹揆　周伯壎　徐家福譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

商務印書館上海廠印刷　新華書店總經售

統一書號 13010·240　開本 787×1092 1/16　印張 37 6/8　字數 863,000

一九五七年五月第一版

一九五七年五月上海第一次印刷

印數 1—8,000　　定價(8) ¥4 10

原　序

本書系由著者連年对莫斯科大学数学力学系学生的授課講稿編輯而成。它包括解析函数論的基础課程的材料，橢圓函数論概要，以及解析函数論的一些补充資料，如致密性原則、保角映射問題、漸近法与插补法、整函数論初步、黎曼曲面的概念、解析延拓的理論。

所有这些材料都有系統地放入書中，並連成一气。凡在基础課程大綱以外的节段，悉用小字排印，初讀时可將其略去。与大学基础課程的要求比較，本書引导讀者略为深入。著者照例將書中討論引到如此地步，再深入便須閱讀現有的俄文專集。凡需要勒貝格測度与勒貝格积分方能討論的問題，本書全未触及。关於这些問題，請讀者参考 И. И. 普利瓦洛夫的專著"單值解析函数論的边值問題"与其他專門論文，前書的第二版很快就会在苏联技术理論書籍出版社出版。書中未放入調和測度論，与半純函数的一般理論；关於这一部分，讀者可閱讀 Р. 涅瓦林那的"單值解析函数論"。本書內沒有对黎曼曲面的解析函数，作有系統的討論；这部分似应作为專著的題材。这些問題的討論，讀者可在 Р. 柯朗的"函数的几何理論"和 Н. Г. 傑波达略夫的"代数函数論"中找到。

著者在此不再提本書所沒有涉及或仅略涉及的題目，而这些題目或許是讀者希望在解析函数論的巨著中找到。即使只在大体上来滿足这样的要求，本書的篇幅也勢將增加一倍。关於这些材料，也不得不限於介紹文献，附於書末。

著者在本書中力求指出祖国科学在解析函数論方面有重要意义的成就。与此有关的有 Н. И. 罗巴切夫斯基的几何学，它和分式線性变換有密切关联，它在任意黎曼曲面的解析函数論中以及自同構函数論中，也曾起决定性的作用；其次有：上一世紀七十年代初 Ю. В. 索霍茨基建立的哥西型积分的边值理論（据我所知，Ю. В. 索霍茨基的首創权系第一次在这里指出），Ю. В. 索霍茨基关於函数在本性奇点鄰域內的性狀定理（此定理常誤以为是外尔斯特拉斯的），Н. Е. 朱哥夫斯基与 С. А. 查布列金关於水力学的經典結果，С. Н. 伯恩斯坦、М. А. 拉弗仁切夫、М. В. 刻勒德施在函数的逼近論上一連串的結果，以及其它。

著者也力圖強調指出解析函数論上先鋒——彼德堡科学院著名学者欧拉——的功績。特别是，著者不用基本方程的傳統命名——哥西-黎曼方程，而引入从历史上看更正确的称呼——达朗貝尔-欧拉方程。

关於解析函数論的更詳細的發展史，和祖国科学在这方面所起的作用，讀者可參閱著者的"解析函数論發展簡史"；此書將紧接本書之后出版。

本書的特点不再多談了。这些特点部分地可以从目录看出。此地仅仅指出，作者已完全放棄通常教科書上从个别例子来認識黎曼曲面概念的那种办法，而改用頗为抽象的，而在这些問題上似乎又不可避免的 Г. 外尔思想来講。为說明这思想，引入"抽象黎曼曲面"的术語；此外，討論

了更特殊的，同时在函数論上又是更重要的概念"本义的黎曼曲面"，它是作为球面的掩蔽曲面而引出的。著者採用的观点，使讀者在本書末尾才熟悉黎曼曲面。但这並不影响初等多值函数及其分支点在本書前几章所佔有的适当位置。此处利用了次一事实，即单純函数的反函数的黎曼曲面可以表示为單叶域；这單叶域已按某种方式分为子域，使在这些子域上面，可以区分各个單值支。

本書根本上異於著者在1944年由 Учпедгиз 出版的"解析函数論初步"，該書的目的系供未来的初等数学教师参考之用。但在本書內，著者也自該"初步"內取用了个別材料。现在要指出的是，根据著者的观点，作为中学数学教师应該掌握的复变函数知識，本書前三章的内容是"最最起碼的"。

物理数学科学博士 Д. А. 拉伊葛夫閱讀本書原稿时，曾給予宝貴的指示和意見，又承研究生 Г. А. 佛里德曼閱讀全部原稿，並作了一系列有用的註釋，著者深致謝意。

著者

譯者序

馬尔庫雪維奇教授所著解析函数論一書內容丰富，証理严謹，討論深入細致，尤其是它包含了不少俄国及苏联数学家們的研究成果，以及解析函数理論在其他学科諸如天文、力学上的应用，这都是在同类書籍中少見的。因此，我們在譯完之后，都感到学到了不少东西。

我們費了差不多一年的时間来譯完这本書。我們的办法是分头負責，由徐家福同志負責第一、二兩章，周伯壎同志三、四兩章，莫紹揆同志五、六兩章，黃正中同志七、八兩章。开始时，我們在教学之余每星期抽出半天来交換翻譯的經驗，並报告在各人所譯部分內的精彩材料，可是，后来因为教学工作过忙，这項工作就不得已而停止了。

在譯这本書的时候，我們曾开过不少次会来討論各人在翻譯时所碰到的問題。近四、五个月来，我們又彼此傳閱譯稿，互提意見，目的在力求譯文恰当，前后名詞統一，所用語气基本上相同，並且最重要的是要使讀者能看得懂。虽然我們曾作了相当的努力，各人也都修改了原譯稿达七、八次之多，可是到底是四个人譯的，四个人的写作習慣不尽全同，而且我們又是初次合作，我們主观上覺得現在的定稿还不完全像是一个人写的。如有不妥之处，希望讀者們指出。我們誠恳地希望同志們向我們提出意見，使我們在俄文与数学方面都能有所提高，謝謝。

譯者 南京大学数学系 1955年1月

目　录

第一章　基本概念

§1. 理論的对象

1.1. 本書中所講的这門数学課程有兩种名称：解析函数論与复变函数論。兩种名称都与問題的本質相符。

在某一区間(a, b)內定义的实变函数，若在該区間內某一点x_0的某一鄰域內，可表为一个依$x-x_0$的冪展开的收斂冪級数

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

的和，則称該函数在該区間的点x_0处是解析的。

在一区間內每一点处都是解析的函数，称为在該区間內是解析的。在分析学中研究的所有初等函数，在其定义域內处处都是解析的，但可能有个别的点例外。例如，多項式$P_m(x)=a_0+$ $+a_1x+\cdots+a_mx^m$，指数函数e^x，三角函数($\sin x$与$\cos x$)都是处处解析的，这是因为对於任意的x_0，都成立下列諸展开式的緣故：

$$P_m(x)=P_m(x_0)+\frac{P'_m(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{P_m^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m,$$

$$e^x=e^{x_0}+\frac{e^{x_0}}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,$$

$$\sin x=\sin x_0+\frac{\cos x_0}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{\sin\left(x_0+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,$$

$$\cos x=\cos x_0+\frac{\sin x_0}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{\cos\left(x_0+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots;$$

函数$\frac{1}{a-x}$当$x\neq a$时是解析的，因为若$x_0\neq a$且$\left|\frac{x-x_0}{a-x_0}\right|<1$时

$$\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a-x_0}\frac{1}{1-\frac{x-x_0}{a-x_0}}=\frac{1}{a-x_0}+\frac{1}{(a-x_0)^2}(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{(a-x_0)^{n+1}}(x-x_0)^n+\cdots;$$

函数$\sqrt[3]{x}$当$x\neq 0$时是解析的，因为若$x_0\neq 0$且$\left|\frac{x-x_0}{x_0}\right|<1$时

$$\sqrt[3]{x}=x_0^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}=x_0^{\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{3}}{x_0^{\frac{2}{3}}}(x-x_0)+\cdots+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!\cdot x_0^{n-\frac{1}{3}}}(x-x_0)^n+\cdots;$$

函数$\ln x$，在其全部定义域內是解析的，因为若$x_0>0$且$\left|\frac{x-x_0}{x_0}\right|<1$时

$$\ln x = \ln x_0 + \ln\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) =$$

$$= \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0) - \frac{1}{2x_0^2}(x - x_0)^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{nx_0^n}(x - x_0)^n + \cdots$$

等等。

由於对冪級数作基本的代数运算或分析运算（加，減，乘，除，微分法，积分法）后，其結果一般①也可用收斂冪級数表示。这一事实已足使我們感到解析函数类的广泛与重要了。事实上，它的意义尙不止於此，因为，例如，解析函数的解析函数，解析函数的反函数，满足方程

$$P_0(x) + P_1(x)f(x) + \cdots + P_n(x)[f(x)]^n = 0$$

[$f(x)$的 n 次代数方程]的函数，或者满足方程

$$p_0(x)f(x) + p_1(x)\frac{df(x)}{dx} + \cdots + p_n(x)\frac{d^n f(x)}{dx^n} = q(x)$$

[$f(x)$ 的 n 阶線性微分方程]的函数[其中 $p_0(x)$，$p_1(x)$，$\cdots$，$p_n(x)$，$q(x)$ 均为解析函数]，在其对应区間內都是解析的。

因此，在古典分析及其对力学与物理問題的应用中所遇到的所有最重要的函数，除去在这些函数的一些个別的奇点处外，处处都是解析的这种情形，也就不足为奇了。

由此可知，專門研究解析函数的一般性質，是特別重要的一件事。

1.2. 虽然解析函数类是广泛的，但它仅是無穷次可微函数（也就是具有任意阶导数的函数）类中的一部分。这里我們来証明下面的命題：定义於点 x_0 的鄰域內的函数 $f(x)$ 在該点处为解析的必要充分条件是：（1）它在这点的某一鄰域內無穷次可微，（2）有这样的正数 δ 与 M 存在，使得对於区間$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$中的任意 x 与对於任意自然数 k，成立不等式

$$\left|f^{(k)}(x)\right| < M\frac{k!}{\delta^k}。 \tag{1.2:1}$$

証：条件是必要的。实际上，若 $f(x)$ 在点x_0处是解析的，則此时在某一区間 $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ 內，它可表为冪級数

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots, \tag{1.2:2}$$

在数学分析中我們已經知道：这冪級数可以逐項微分任意次，因此它的任意阶 k 阶的导数存在，並且这 k 阶导数也可以表示成冪級数，也就是：

$$f^{(k)}(x) = k!a_k + \frac{(k+1)!a_{k+1}}{1!}(x - x_0) + \frac{(k+2)!a_{k+2}}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \tag{1.2:3}$$

$(|x - x_0| < \rho)$。我們这样来固定 δ，使得 $0 < 2\delta < \rho$。於是級数(1.2:2)当 $x = x_0 + 2\delta$ 时將为收斂；因此，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n(2\delta)^n = 0$，由此推知：敍列 $\{a_n(2\delta)^n\}$ 是有界的，也就是說

$$|a_n(2\delta)^n| < M' \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)。 \tag{1.2:4}$$

現在我們在区間$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$內来估計 $|f^{(k)}(x)|$ 的值；利用(1.2:3)与不等式(1.2:4)，我們將得

① 在除法的情形下，只須除去那些使除式为零的个別点。

$$|f^{(k)}(x)|<k!|a_k|+\frac{(k+1)!|a_{k+1}|}{1!}\delta+\frac{(k+2)!|a_{k+2}|}{2!}\delta^2+\cdots<k!\frac{M'}{(2\delta)^k}+$$
$$+\frac{(k+1)!}{1!}\frac{M'}{(2\delta)^{k+1}}\delta+\frac{(k+2)!}{2!}\frac{M'}{(2\delta)^{k+2}}\delta^2+\cdots=\frac{k!M'}{2^k\delta^k}\left[1+\frac{k+1}{1!}\frac{1}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(k+1)(k+2)}{2!}\frac{1}{2^2}+\cdots\right]=\frac{k!M'}{2^k\delta^k}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-(k+1)}=2M'\frac{k!}{\delta^k}。$$

这里，只須置 $2M'=M$，便得不等式(1.2:1)。

现在証明定理的条件也是充分的，設在区間$(x_0-\delta, x_0+\delta)$內，$f(x)$ 是一个可求导数無穷次的函数，並且不等式(1.2:1)成立。依照余項为拉格朗日型的泰勒公式，把 $f(x)$ 写成下列形狀：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n \quad (1.2:5)$$

便有：

$$\left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\right||x-x_0|^n<\frac{M\cdot n!}{\delta^n\cdot n!}|x-x_0|^n=M\left(\frac{|x-x_0|}{\delta}\right)^n,$$

因此，若 $|x-x_0|<\delta$，則当 $n\to\infty$ 时，余項趋於零。由此推知，在区間 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 內，函数 $f(x)$ 可用冪級数的和

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\cdots$$

来表示，就是說，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是解析的。

用这定理作为判别解析性的方法，从其确定性与完备性来說，是再好也沒有的了。但是，它是以任意阶导数在已知点的某鄰域內的性狀的知識[不等式(1.2:1)]为依据的，所以，無論在应用上或理論問題上，这个方法都是不方便的。

1.3. 由於跨出实数域而进入复变数域中，發展了解析函数的一般理論基础，这是哥西的功績。对於解析函数来說，要跨出实数域是很自然和容易办到的。只要將極限論的基本法則推广到复数域中，並且注意，对一切滿足 $|x-x_0|<\rho$ 的实数 x 都收斂的級数

$$a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots,$$

对一切滿足 $|z-x_0|<\rho$ 的复数 $z=x+iy$ 也都收斂，因而該級数給定了复变数 z 的某一函数，該函数就可当作是实变数的解析函数在复数域中的延拓(推广)，像这类的延拓用之已久。例如，代数里面多項式延拓到复数域的情形是我們所熟知的，不过那里毋須考虑收斂性的問題，只要建立复数的代数运算便可；又如，分析教程里面的指数函数 e^x，在那里，可用类似的延拓法推出古典的欧拉公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x。$$

上述哥西具有历史意义的功績，並不在於他首先在冪級数中用复变数 z 来代替实变数 x。在他以前的十八世紀已經有人这样做了。他的功績乃在於：他仿照实变数理論的基础(这里指古典分析而言)建立了复变函数的有系統的理論基础，其中包括極限論，連續，导数，积分等概念与級数論。在建立这种理論时，弄明白了一个基本事实：在一个域 G 內是解析的复变函数的概念，換句話說，在域內每一点 z_0 的某一鄰域內可表示为

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots \qquad (1.3:1)$$

的那种函数的概念，是与在同一域内的可微函数的概念完全一致的（这里的数全是复数，只在特殊情形才是实数）。其中每一个概念包括了另一个概念，而函数 $f(z)$ 具有一阶导数的事实就說明了它可展为冪級数。在1.2段中我們已經看到，若自变数限於取实数值，則函数的可微性和解析性之間的关系就有那样复杂。在复平面上研究函数和局限於实数域中的研究相比較，还有許多其它的好处。在复平面上研究函数的結果發現：复函数 $f(z)$ 的解析性可以用很簡單的方式来鑑定：可借助於考察它的积分，也可借助於它依任意多項式展成的級数，或用其他方法。

这种种的性質以及它們之間的簡單关系，就是复变解析函数——通常也簡称为复变函数——的一般理論的眞正基础。若复变函数 $f(z)$ 的表达式 (1.3:1) 內 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots, z_0$ 全为实数且变数 z 取实数值，則复变解析函数就成为实变解析函数，而从 $f(z)$ 所得的結果，当然也使有关該实变解析函数的問題明朗化。

本教程專討論复变解析函数理論。

§2. 复数

2.1. 我們假定讀者已在代数教程① 內知道复数的几何表示法及其运算，为使讀者方便計，我們在这里还概括地敍述一下复数的基本定义和事实。

每一个复数有 $a+bi$ 的形狀，其中 a 与 b 均为实数。第一个数 a 称为复数的实部，而第二个数 b 称为复数的虛部。若用 c 表示 $a+bi$，我們写成：

$$a=R(c) \quad 与 \quad b=I(c)$$

其中 R 为拉丁字 realis（实的）的第一个字母，而 I 为 imaginarius（虛的）字的第一个字母。二复数認作相等，当且仅当：其实部与实部，虛部与虛部分別相等。虛部为零的数：$c=a+0i$ 写作 $c=a$ 且看作与实数 a 全同。特別的，把数 $0+0i$ 看作与零全同。这样，实数便可看作复数的特殊情形。实部等於零的复数 $c=0+bi$ 写作 $c=bi$。若 $b=0$，則由前面得知：c 等於零 $(a=b=0)$。若 $b\neq 0$，則 c 称为純虛数。特别是，当 $b=1$ 时，得到虛数單位：$1i=i$。一般說来，若虛部不等於零时，复数 $a+bi$ 称为虛数。因此，純虛数是虛数的特殊情形（卽实部等於零的情形）。

复数構成一个数体。这就是說，对於它們定义了加法与乘法运算，服从交换、結合、分配（乘法对加法的）三定律，並且对加法有一逆运算——减法——存在，对乘法，有一逆运算——除法——存在。換句話說，对未知数 x 而言。方程 $a+x=b$ 和 $ax=b$ 都恆有解（要第二个方程有解还須除数 $a\neq 0$）。

复数体的零元与么元分别为实数 0 与 1。从复数体中的运算的观点来看，每一純虛数均可解释为实数 b 与虛数單位 i 的乘积，而每一复数 $a+bi$ 乃是实数 a 与純虛数 bi 的和。

2.2. 用几何来表示复数，最簡單的办法是，在平面上选擇一笛卡兒直角坐标系，然后用这平面上的点或矢量来表示复数。这时作为复数 $c=a+bi$ 的几何圖像的，可以同样方便地利用横坐标为 a、縱坐标为 b 的点（数 $a+bi$ 称为該点的附标，这字拉丁文 affixus 原意是指附屬物），或用

① А. Г. Курош，高等代数教程，第二版，苏联国立技术理論書籍出版社。1949 第一章（有柯召的中譯本——譯者）