

自動控制系統詳解

(习题)

曉園出版社
世界圖書出版公司

TP 273-44

1

内 容 简 介

本书是美国伊利诺州立大学B.C.库奥教授所著大学教材,“Automated Control System 5th-Ed”一书的
全部问题习题详解。

自动控制系统详解(习题)

1987年第五版

曾钟立 译著

晓园出版社 出版

世界图书出版公司 北京分公司重印

(北京朝内大街 137 号)

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1992年2月重印 850 × 1168 毫

1992年2月第1次印刷 印张: 14

印数: 0,601—1,660

ISBN 7-5062-1181.5/TN.9

定价: 10.00 元

世界图书出版公司通过中华版权代理公司

购得重印权限国内发行

TP273-44

自

371544

前 言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

Kuo 自動控制系統詳解(习题)

(目 錄)

第二章	數學基礎.....	1
第三章	轉移函數與信號流程圖.....	17
第四章	物理系統的數學模式化.....	45
第五章	線性動態系統之狀態變數分析.....	85
第六章	控制系統的時域分析.....	181
第七章	根軌跡圖.....	229
第八章	控制系統的時域設計.....	293
第九章	控制系統的頻域分析.....	349
第十章	控制系統的頻域設計.....	407

第二章 數學基礎

2-1 試求出下列函數的極點和零點（包括在無窮遠處的）：

$$(a) G(s) = \frac{5(s+1)}{s^2(s+2)(s+5)}$$

$$(b) G(s) = \frac{s^2(s+1)}{(s+2)(s^2+3s+2)}$$

$$(c) G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s^2+s+1)}$$

$$(d) G(s) = \frac{Ke^{-2s}}{(s+1)(s+2)}$$

解 (a) $G(s) = \frac{5(s+1)}{s^2(s+2)(s+5)}$

極點：0, 0, -2, -5

零點：-1, ∞ , ∞ , ∞ ,

$$(b) G(s) = \frac{s^2(s+1)}{(s+2)(s^2+3s+2)}$$

極點：-2, -1, -2

零點：0, 0, -1

$$(c) G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s^2+s+1)}$$

極點：0, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

零點：-2, ∞ , ∞

$$(d) G(s) = \frac{Ke^{-2s}}{(s+1)(s+2)}$$

極點：-1, -2, $-\infty$

零點：在 ∞ 處有無窮多個零點

2-2 試求出下列函數的拉氏轉換：

(a) $g(t) = te^{-2t}$

(b) $g(t) = t \cos 5t$

(c) $g(t) = e^{-t} \sin \omega t$

(d) $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) \delta(t - kT)$; $\delta(t)$ = 單位脈衝函數

解 (a) $g(t) = te^{-2t}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g(t)] &= \int_0^{\infty} t \cdot e^{-2t} \cdot e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{(s+2)^2}\end{aligned}$$

(b) $g(t) = t \cos 5t$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g(t)] &= \int_0^{\infty} t \cos 5t e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t}{2} (e^{5jt} + e^{-5jt}) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{2} e^{-(s-5j)t} + \frac{t}{2} e^{-(s+5j)t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2(s-5j)^2} + \frac{1}{2(s+5j)^2} \\ &= \frac{s^2 - 25}{(s^2 + 25)^2}\end{aligned}$$

(c) $g(t) = e^{-t} \sin \omega t$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g(t)] &= \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-(s+1)t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-(s+1)t} dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{-(s+1-j\omega)t} - e^{-(s+1+j\omega)t}) dt\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{(s+1-j\omega)} - \frac{1}{(s+1+j\omega)} \right]$$

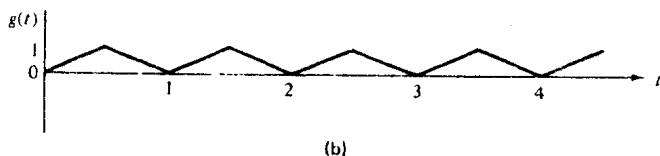
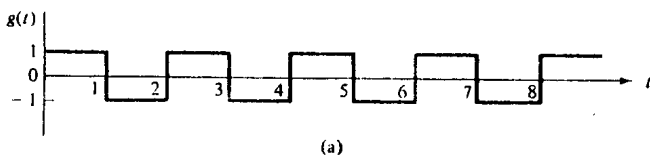
$$= \frac{\omega}{(s+1)^2 + \omega^2}$$

(d) $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) \delta(t-kT)$; $\delta(t)$ 是單位脈衝函數。

$$\mathcal{L}[g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) \int_0^{\infty} \delta(t-kT) e^{-st} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) e^{-skT}$$

2-3 試求出圖 2P-3 中函數的拉氏轉換



解 (a) $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 2(-1)^k u_s(t-k) - u_s(t)$

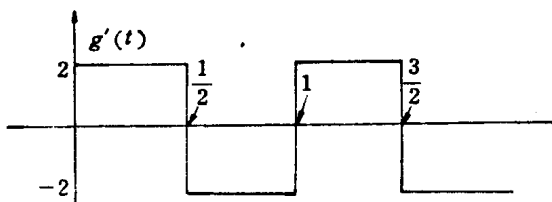
$$\therefore \mathcal{L}u_s(t-k) = \frac{e^{-ks}}{s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} 2(-1)^k \cdot \frac{e^{-ks}}{s} - \frac{1}{s}$$

$$= \frac{2}{s(1+e^{-s})} - \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}$$

(b) 如圖 $g(t)$ ，得其微分的圖如下：



$$g'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 4(-1)^k u_s\left(t - \frac{k}{2}\right) - 2u_s(t)$$

$$\mathcal{L}[g'(t)] = \frac{2(1-e^{-\frac{s}{2}})}{s(1+e^{-\frac{s}{2}})}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[g'(t)] = \frac{2(1-e^{-\frac{s}{2}})}{s^2(1+e^{-\frac{s}{2}})}$$

2-4 試求出下列函數的拉氏轉換：

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ t+1 & 1 \leq t < 3 \\ 4 & 3 \leq t \leq 4 \\ 0 & 4 < t \end{cases}$$

解

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ t+1 & 1 \leq t < 3 \\ 4 & 3 \leq t \leq 4 \\ 0 & 4 < t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_1^3 (t+1) e^{-st} dt + \int_3^4 4 \cdot e^{-st} dt$$

$$= \left. \frac{(t+1)e^{-st}}{-s} \right|_1^3 + \frac{1}{s} \int_1^3 e^{-st} dt + \left. \frac{4e^{-st}}{-s} \right|_3^4$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4e^{-3s}}{s} + \frac{2e^{-s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{4e^{-4s}}{s} + \frac{4e^{-3s}}{s} \\
&= \left(\frac{2s+1}{s^2} \right) e^{-s} - \frac{e^{-3s}}{s^2} - \frac{4}{s} e^{-4s}
\end{aligned}$$

2-5 以拉氏轉換法解下列的微分方程式：

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 5 \frac{df(t)}{dt} + 4f(t) = e^{-t} u_s(t)$$

假設所有的起始狀態爲零。

解 $\frac{d^2 f}{dt^2} + 5 \frac{df}{dt} + 4f = e^{-t} u_s(t)$

$$\Rightarrow s^2 F(s) + 5sF(s) + 4F(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+4)}$$

$$= \frac{1}{9(s+4)} + \frac{1}{3(s+1)^2} - \frac{1}{9(s+1)}$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{9} e^{-4t} - \frac{1}{9} e^{-t} + \frac{1}{3} t e^{-t}$$

2-6 試求出下列函數的反拉氏轉換：

(a) $G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$

(b) $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+4)}$

(c) $G(s) = \frac{10}{s(s^2+4)(s+1)}$

(d) $G(s) = \frac{2(s+1)}{s(s^2+s+2)}$

$$(a) \quad G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

$$\therefore g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = e^{-2t} - e^{-3t}$$

$$(b) \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+4)}$$

$$= \frac{1}{9(s+4)} + \frac{1}{3(s+1)^2} - \frac{1}{9(s+1)}$$

$$\therefore g(t) = \frac{e^{-4t}}{9} + \frac{te^{-t}}{3} - \frac{e^{-t}}{9}$$

$$(c) \quad G(s) = \frac{10}{s(s^2+4)(s+1)}$$

$$= \frac{5}{2s} - \frac{2}{s+1} - \frac{1}{4} \left[\frac{1+2j}{s+2j} + \frac{1-2j}{s-2j} \right]$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{5}{2} - 2e^{-t} - \frac{1+2j}{4} e^{-2jt} - \frac{1-2j}{4} e^{2jt}$$

$$= \frac{5}{2} - 2e^{-t} - \frac{1}{2} \cos 2t - \sin 2t$$

$$(d) \quad G(s) = \frac{2(s+1)}{s(s^2+s+2)}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{2(1-\sqrt{7}j)}{\sqrt{7}j(1+\sqrt{7}j)} \cdot \frac{1}{s + \frac{1+\sqrt{7}j}{2}} +$$

$$\frac{2(1+\sqrt{7}j)}{-\sqrt{7}j(1-\sqrt{7}j)} \cdot \frac{1}{s + \frac{1-\sqrt{7}j}{2}}$$

$$\therefore g(t) = 1 + \frac{2(1-\sqrt{7}j)}{\sqrt{7}j(1+\sqrt{7}j)} e^{-\frac{1+\sqrt{7}j}{2}t} +$$

$$+ \frac{2(1+\sqrt{7}j)}{-\sqrt{7}j(1-\sqrt{7}j)} e^{-\frac{1-\sqrt{7}j}{2}t}$$

$$= 1 + \left(\frac{3}{\sqrt{7}} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t - \cos \frac{\sqrt{7}}{2} t \right) e^{-\frac{t}{2}}$$

2-7 計算出下列矩陣的和與差：

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 15 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & s+1 \\ s & \frac{1}{s-3} & s^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 10 & -s \\ s & \frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix}$$

 (a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

$$(b) \begin{bmatrix} 15 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & s+1 \\ 5 & \frac{1}{s-3} & s^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 10 & -s \\ s & \frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 10 & 1 \\ s+5 & \frac{2s-3}{s(s-3)} & s^2 \end{bmatrix}$$

2-8 試判斷下列矩陣可否運算矩陣乘積 $\mathbf{AB}$ 和 $\mathbf{BA}$ 。並求出正確的乘積。

$$(a) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 9 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{解 (a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 9 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 21 & 1 & 18 \\ 30 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

BA無意義

2-9 將下列代數方程組以矩陣形式表示

$$5x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

$$3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0$$

$$\text{解} \quad 5x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

$$3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2-10 將下列微分方程組以 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t)$ 形式來表示：

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) - 3x_3(t) + u_1(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -x_1(t) - 5x_2(t) - 3x_3(t) + u_2(t)$$

$$\text{解} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

2-11 試求出下列矩陣的反矩陣：

$$(a) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \quad (b) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{解} \quad (a) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{52} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(c) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \because \det[\mathbf{A}] = 0, \text{ 所以無反矩陣}$$

2-12 試找出下列矩陣的秩 (rank)：

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{解} \quad (a) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{秩} = 2$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{秩}=2$$

2-13 下列的訊號是經一取樣週期為 T 秒的理想取樣器取樣過。試求出取樣器的輸出 $f^*(t)$ 並求出 $f^*(t)$ 的拉氏轉換 $F^*(s)$ 。將 $F^*(s)$ 以較熟悉的形式表示。

$$(a) f(t) = t e^{-at}$$

$$(b) f(t) = e^{-at} \sin \omega t$$

解 (a) $f(t) = t \cdot e^{-at}$

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t-kT)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} kT e^{-akT} \delta(t-kT)$$

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} kT e^{-akT} e^{-skT}$$

$$\Rightarrow \left(1 - e^{-(s+a)T}\right) F^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} T \left[e^{-(s+a)T} \right]^k = \frac{T e^{-(s+a)T}}{1 - e^{-(s+a)T}}$$

$$\therefore F^*(s) = \frac{T e^{-(s+a)T}}{[1 - e^{-(s+a)T}]^2}$$

$$(b) f(t) = e^{-at} \sin \omega t$$

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin \omega kT e^{-akT} \delta(t-kT)$$

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin \omega kT e^{-akT} e^{-skT} = I_m \left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{j\omega kT} \cdot e^{-(a+s)kT} \right]$$

$$= \frac{e^{-(s+a)T} \sin \omega T}{e^{2(s+a)T} - 2 \cos \omega T e^{-(s+a)T} + 1}$$

2-14 試求出下列函數的 z 轉換：

$$(a) G(s) = \frac{1}{(s+a)^n}$$

$$(b) G(s) = \frac{1}{s(s+5)^2}$$

$$(c) G(s) = \frac{1}{s^3(s+2)}$$

$$(d) g(t) = t^2 e^{-2t}$$

$$(e) g(t) = t \sin \omega t$$

$$\text{解 (a)} \quad G(s) = \frac{1}{(s+a)^n}$$

$$g(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-at}$$

$$\Rightarrow g^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (kT)^{n-1} e^{-akT} \delta(t-kT) / (n-1)!$$

$$\Rightarrow G^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (kT)^{n-1} e^{-akT} e^{-skT} / (n-1)!$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (kT)^{n-1} e^{-akT} z^{-k} / (n-1)!$$

$$(b) G(s) = \frac{1}{s(s+5)^2}$$

$$= \frac{1}{25s} + \frac{-\frac{1}{25}s - \frac{2}{5}}{(s+5)^2}$$

$$= \frac{1}{25s} - \frac{1}{25(s+5)} - \frac{1}{5} \frac{1}{(s+5)^2}$$

$$g(t) = \frac{1}{25} - \frac{1}{25} e^{-5t} - \frac{1}{5} t e^{-5t}$$

$$\therefore G^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{25} e^{-5kT} - \frac{1}{5} kT e^{-5kT} \right) e^{-skT}$$

$$\therefore G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{25} e^{-5kT} - \frac{1}{5} kT e^{-5kT} \right) z^{-k}$$

$$(c) \quad G(s) = \frac{1}{s^3(s+2)}$$

$$= -\frac{1}{8(s+2)} + \frac{1 \cdot 1}{2s^3} - \frac{1}{4s^2} + \frac{1}{8s}$$

$$g(t) = -\frac{1}{8} e^{-2t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{4} t + \frac{1}{8}$$

$$G^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{e^{-2kT}}{8} + \frac{(kT)^2}{4} - \frac{(kT)}{4} + \frac{1}{8} \right) e^{-skT}$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{e^{-2kT}}{8} + \frac{(kT)^2}{4} - \frac{(kT)}{4} + \frac{1}{8} \right) z^{-k}$$

$$(d) \quad g(t) = t^2 e^{-2t}$$

$$g^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (kT)^2 e^{-2kT} \delta(t - kT)$$

$$G^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (kT)^2 e^{-2kT} e^{-skT}$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (kT)^2 e^{-2kT} z^{-k}$$

$$= \frac{T^2 z^{-1} e^{-2T}}{(1 - z^{-1} e^{-2T})^2} + \frac{2e^{-4T} z^{-2} \cdot T^2}{(1 - z^{-1} e^{-2T})^3}$$

$$(e) \quad g(t) = t \sin \omega t$$

$$g^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} kT \sin \omega kT \delta(t - kT)$$

$$G^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} kT \sin \omega kT e^{-ks}$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kT \sin \omega kT z^{-k}$$

2-15 試以下列方法求出 $G(z)$ 的反 z 轉換：

$$G(z) = \frac{10z(z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)}$$

(a) 反轉換公式。

(b) 部分分式展開法。

解 $G(z) = \frac{10z(z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)}$

$$(a) \quad g(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{10z(z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)} z^{k-1} dz$$

$$\therefore \frac{10z(z+1)z^{k-1}}{(z-1)(z^2+z+1)} = \frac{10z^k(z+1)}{(z-1)(z-e^{\frac{2\pi}{3}j})(z-e^{\frac{4\pi}{3}j})}$$

$$\begin{aligned} g(kT) &= \left. \frac{10z(z+1)}{z^2+z+1} \right|_{z=1} \\ &\quad + \left. \frac{10z(z+1)}{(z-1)\left(z-\frac{-1+\sqrt{3}j}{2}\right)} z^{k-1} \right|_{z=\frac{-1-\sqrt{3}j}{2}} \\ &\quad + \left. \frac{10z(z+1)}{(z-1)\left(z-\frac{-1-\sqrt{3}j}{2}\right)} z^{k-1} \right|_{z=\frac{-1+\sqrt{3}j}{2}} \\ &= \frac{20}{3} + \frac{-10}{\frac{-3+3\sqrt{3}j}{2}} \left[\frac{-1-\sqrt{3}j}{2} \right]^{k-1} \\ &\quad + \frac{-10}{\frac{-3+3\sqrt{3}j}{2}} \left[\frac{-1+\sqrt{3}j}{2} \right]^{k-1} \\ &= \frac{20}{3} - \frac{10}{3} \left[\frac{-1-\sqrt{3}j}{2} \right]^k - \frac{10}{3} \left[\frac{-1+\sqrt{3}j}{2} \right]^k \end{aligned}$$

(b) 部分分式法