物探工人自学参考读物

数 学

第二卷

微积分

上 册

张秋光 主编

地质出版社

物探工人自学参考读物

数　学

第 二 卷

微 积 分

上　册

张秋光　主编

地 质 出 版 社

物探工人自学参考读物

数　　学

第　二　卷

微　积　分

上册

张秋光　主编

地质部书刊编辑室编辑

责任编辑　唐光后

地 质 出 版 社 出 版

（北京西四）

地 质 出 版 社 印 刷 厂 印 刷

（北京海淀区学院路29号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本：787×1092 1/32印张：19 7/8字数：437,000

1982年3月北京第一版·1982年3月北京第一次印刷

印数1—3,330册·定价3.00元

统一书号：15038·新704

编 者 说 明

本书第二卷的内容为一元及多元函数微积分。作为一本自学参考读物，编者力图将微积分的基本概念和分析方法写得比较清晰易懂，使之便于自学；同时，作为一本应用数学读物，也力求在阐明基本原理的同时，把微积分理论和物探实践结合起来，以期学以致用。

1974年以前，由于教学需要，编者曾写过《微积分基础》讲义，尔后又修改、补充为《微积分》讲义。本卷前四章的讨论稿就是在上述油印本的基础上重新修编的。加上新编的后六章，全部讨论稿于1978年 3 月完成，并油印寄部份物探队、地质院校和科研单位征求意见。根据书面的以及审稿会上的意见，对讨论稿又进行了修改。卢国雄老师参加了讨论稿的修改工作，并编写了基本数学理论中的若干节、段。本卷的习题答案初稿是由唐岫雯老师和陈宇同同志提供的。

冶金部地球物理探矿公司王继伦同志审阅了本卷的修改稿。

在编写过程中，得到许多物探队、地质院校和研究单位的大力支持。1978 年 10 月，在本卷的审稿会议上，云南大学、长春地质学院、成都地质学院、桂林冶金地质研究所、湖北物探队（协编单位）、云南物探队（协编单位）、陕西第二物探队、安徽 322 队、中南冶金勘探公司 606 队、桂林冶金地质学院等十个单位的同志对讨论稿提出了许多宝贵的意见和建议，不少单位寄来了宝贵的书面意见。李世民老师在

数字校核、审图、誊稿方面，周加贤老师及陈宇同同志在讨论稿油印本的校对方面，都做了许多工作。插图的上墨和贴字是由马靖宇、李婉平、何惠乾等同志完成的。对此，谨一并致谢。

特别需要提出的是：本卷的全部编写工作是在我院（桂林冶金地质学院）领导和同志们的深切关怀下进行的；如果没有领导和同志们的教育、帮助和大力支持，这一卷的编写工作是不可能完成的。

限于水平，本卷的错误和缺点一定不少，恳请读者批评指教。

编者　1980.5

目　录

引　言

"科学的发生和发展一开始就是由生产决定的"❶。微积分是由于实践中需要研究变量而产生的一种数学方法，在生产和科学研究中有着广泛的应用。

在引言中，准备对微积分的特点作一鸟瞰，使读者从总体上对微积分有一个初步的认识，这对于以后分章深入学习微积分的内容是有帮助的。

§1 微积分与初等数学的比较

什么是微积分？它和初等数学相比有什么不同？初学微积分的读者很自然会提出这些问题。

革命导师恩格斯对此有过深刻的论述："初等数学，即常数的数学，是在形式逻辑的范围内活动的，至少总的说来是这样；而变数的数学——其中最重要的部份是微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的运用。"❷这就清楚地告诉我们，微积分和初等数学两者的主要区别在于：

第一，研究对象不同。初等数学主要是研究常量，微积分主要研究的是变量及变量之间的函数关系。

第二，分析方法不同。初等数学总的说来是在形式逻辑的范围内活动的，而微积分则本质上不外是辩证法在数学方

❶ 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社1971年版第162页。

❷ 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社1970年版第132页。

面的运用。

为了加深对恩格斯这段论述的理解，下面通过几个典型例子作些说明。

§2　微积分是变量的数学

客观世界是辩证地发展的。作为研究现实世界的工具，数学从主要是研究常量发展到研究变量，这是一大进步。正如恩格斯所指出的："数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生。"❶

【问题】 有一块边长为100厘米的正方形铁皮，打算剪去四个正方形的角，然后卷起来，制成一无盖方盒(图1)。试问应该怎样剪法，才能使制成的方盒体积最大？

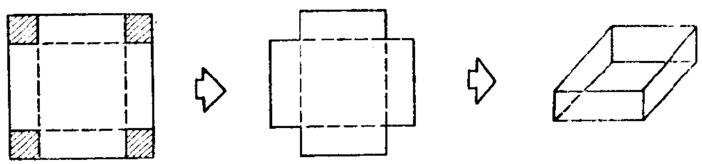

图 1

解：设剪去四个边长为10厘米的正方角，这时方盒底的边长为$100-2\times10=80$（厘米），底面积为$80\times80=6400$（平方厘米），高显然是10厘米（图2），于是算出铁盒的体积$=6400\times10=64000$（立方厘米）。

❶ 《自然辩证法》，第236页。

用同样的方法，求出几种不同的剪法所制成的铁盒体积，如表 1 所示。

表 1

剪角的边长（厘米）	5	10	20	30	40
铁盒的体积（立方厘米）	40500	64000	72000	48000	16000

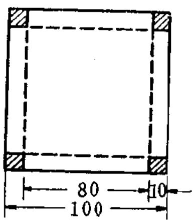

图 2

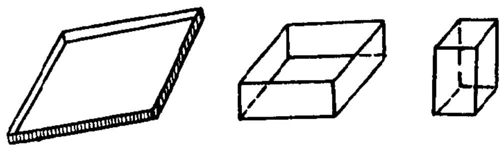

图 3

剪角边长分别为 5 厘米、20 厘米、40 厘米时的铁盒形状见图 3 。

能否根据表 1 作出“剪角边长为 20 厘米时，铁盒体积最大”的结论呢？显然不能！因为只研究了五种方案，还有好多种别的剪法哩！比如，当剪去 15 厘米的四个角时，容易算出，盒子的体积将达到 73500 立方厘米，比 72000 立方厘米大。

同样，我们也没有充分的根据断言 73500 立方厘米是可能制成的最大体积，因为还有无数种设计方案尚未经过计算和对比。事实上，如果剪角边长为 16 厘米，体积将比73500 立方厘米还要大，达到 73984 立方厘米！

但是，我们仍然不能保证 73984 立方厘米就是最大的体积。

这样，岂不是问题无法解决了吗？是的，如果用孤立静止的方法一个一个地检验，是找不出体积最大的设计方案的。

如果从联系变化的观点进行分析研究，这个问题却是不难解决的。作为变量的数学，微积分分析研究问题的方法正是这样。本问题中，有两个变量，一个是剪角的边长（记作x），另一个是铁盒的体积（记作y）。这两个变量是互相联系的：剪角的大小不同，铁盒的体积也就各异。y随x变化的规律为

$$y=x(100-2x)^2, \qquad (1)$$

其中x是方盒的高，$(100-2x)^2$是它的底面积。对这两个变量之间的函数关系进行的分析研究表明：随着剪角边长的连续增长，铁盒的体积并不是一直增加的，而是首先逐步增加，然后开始下降。因此，用全力捉住从升到降的转折点，最佳方案也就找到了。学完微分学之后，读者将能迅速判定，剪去边长为$16\frac{2}{3}$厘米的四个方角，铁盒的体积将达到最大值。将$x=16\frac{2}{3}$代入（1）式，可算出最大的体积为$74074\frac{2}{27}$立方厘米。

§3 微积分是辩证法在数学中的运用

毛泽东同志指出："事物的矛盾法则，即对立统一的法则，是唯物辩证法的最根本的法则"[1]。认真分析事物的矛盾，创造条件促使矛盾转化，这正是微积分的主导思想。

---

[1] 《矛盾论》，《毛泽东选集》，第一卷，第274页。

下面举两个实例加以说明。

一、曲边梯形的面积

【问题】 计算由抛物线 $y=x^2$、直线 $x=1$、$x=4$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积（图 4）。

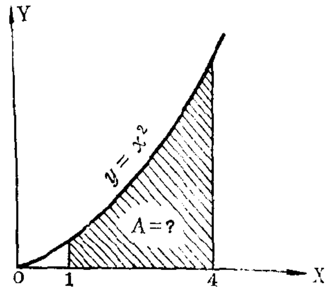

图 4

1．分析矛盾

在初等数学中，我们学过计算矩形面积的公式：

矩形面积＝高×底。

请注意矩形是直边图形，它的高是不变的。

与矩形不同，曲边梯形的一条边是曲线，它的“高”(即抛物线上点的纵坐标）是不断变化的，我们不能直接用初等数学的矩形面积公式来计算曲边梯形的面积。

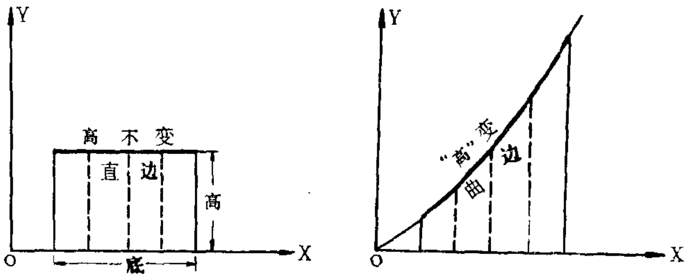

图 5

因此，问题的主要矛盾是“曲”与“直”的矛盾，或“变”与“不变”的矛盾。

2．解决矛盾

在形而上学看来，直线就是直线，曲线就是曲线，它们

是一成不变的、截然不同的两个事物。和形而上学相反，唯物辩证法认为，“矛盾着的对立的双方互相斗争的结果，无不在一定条件下互相转化”[1]，“曲”与“直”是对立的统一，也可以在一定的条件下互相转化。“曲直转化”正是微积分方法的一个主要基础。就像恩格斯指出的那样，“高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾：在一定条件下直线和曲线应当是一回事。”[2]

劳动人民在长期生产斗争实践中，积累了解决“曲”与“直”这对矛盾、实现“曲直转化”的丰富经验。

例如，钳工师傅用平锉加工圆形工件时（图 6），通常先粗锉成一个多边形，再把角锉去，还是一个多边形，边长愈短，就愈接近于圆。这个过程的实质是把整个圆周分成很多小弧段（它是曲的），在每一小段上，可以近似地用直线（每锉一下都是直的）代替曲线，简称“以直代曲”。

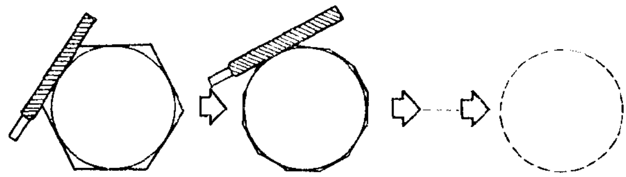

图 6

又如，七世纪初，我国隋代建造的赵州桥（图 7）是用一块块长方形的条石砌成的、跨度达 37 米的大石拱桥，条石是一段段直线，但是砌成的拱圈却是一条近似的弧形曲线。

---

[1] 《关于正确处理人民内部矛盾的问题》，《毛泽东选集》第五卷，第398页。

[2] 《反杜林论》，第118页。