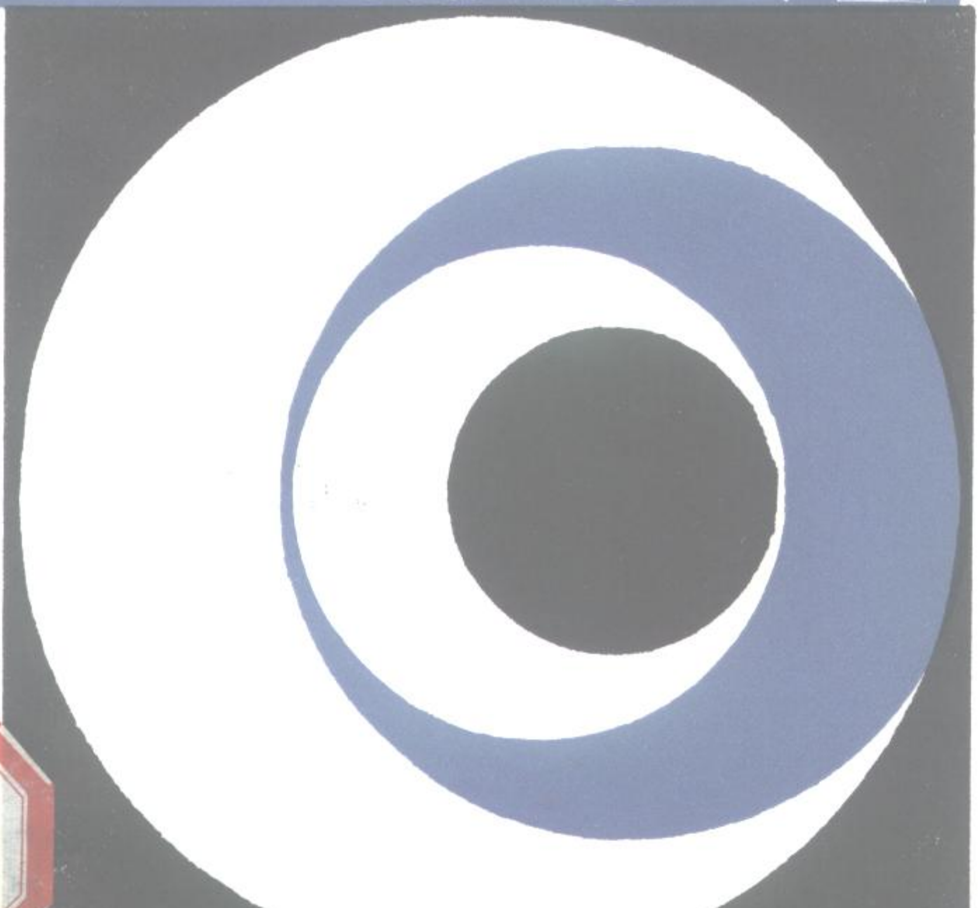
丘维声 编

# 高等代数讲义/上



北京大学出版社

# 高等代数讲义

## 上册

丘维声 编

北京大学出版社

D498/12

## 内容简介

本书是中央广播电视大学的一套试用教材。

全书分上下两册出版。上册包括线性代数的基本内容，有行列式、线性方程组、矩阵、矩阵的标准形及二次型等。本书阐述详细，力求通俗易懂，深入浅出，并附有较多的例题，便于自学。每节末附有习题，每章末附有补充题，书末附有习题和补充题答案。

本书也可作为大专院校线性代数教材或参考书，以及工程技术人员自学线性代数用书或函授教材。

**高等代数讲义（上）**

丘维声 编

责任编辑：郎淑清

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
新华书店北京发行所发行
北京大学印刷厂排版
中国科学院印刷厂印刷
787×1092毫米 32开本 10.25印张 225千字
1983年5月第一版 1988年5月第六次印刷
印数：255,001—310,400册

统一书号：13209·66 定价：1.95元
ISBN 7-301-00084-7/O·010

# 前 言

《高等代数讲义》是中央广播电视大学的一套试用教材，其中上册包括线性代数的基本内容，有行列式、线性方程组、矩阵、矩阵的标准形及二次型等；下册包括线性代数的抽象部分（线性空间、线性变换、欧氏空间等）以及一元多项式理论和近世代数简介。

本书（上册）以矩阵理论为主线。由于广播电视大学线性代数的大纲要求及学时限制，此书沒有介绍抽象的线性空间和线性变换的理论。但是本书在第二章中介绍了 $n$ 维向量空间——线性空间的具体模型；第四章讨论了矩阵的特征值和特征向量以及矩阵的相似标准形，这是线性变换理论所研究的基本问题；第三章引入了内积的概念，讨论了正交矩阵，并且第四、五章分别讨论了用正交矩阵化实对称矩阵为对角形，以及用正交替换化实二次型为标准形，这是欧氏空间理论研究的重要课题。因此可以这样说：本书包括了线性代数的基本内容。

考虑到广播电视大学远距离教学的特点，本书在编写过程中注意到以下几点：

1. 对每章要讨论的主要问题一开始即交待清楚，使读者心中有数，了解所讨论问题的来龙去脉。

2. 概念和结论的引入由具体到抽象，由特殊到一般。阐述比较详细，力求通俗易懂，深入浅出，便于自学。

3. 本书有较多的例题，有助于读者加深对概念、定理的理解和运用，并且掌握一些解题方法，以弥补无习题课的

不足。

4. 每节后附有习题，这些习题反映了教学的基本要求。此外每章末附有补充题，以加深和加宽知识面，但不作基本要求。书末附有答案或提示。

5. 章末有内容简要，便于读者复习及作小结时参考。

本书是按教学时数40学时（不包括习题课）编写的。书中加“*”号的定理的证明或内容不作为教学要求，学员可根据情形，自行选择学习.

此书也可作为大专院校教学时数为40学时左右的线性代数教材或参考书，以及工程技术人员自学线性代数用书或函授教材。

本书是在王萼芳编的《高等代数》和丘维声在中央广播电视大学给八〇级学员讲授线性代数讲稿的基础上编写成的。

本书在编写过程中得到中央广播电视大学数学组的大力支持，冯泰、梁映森等同志仔细阅读了本书的初稿，并且提出了宝贵意见。在此特向他们表示衷心感谢。

限于编者的水平和经验，书中定有不少缺点错误，诚恳地希望读者批评指正。

编　　者

一九八二年十月于北京大学



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

# 目　　录

# 第一章 行 列 式

行列式是研究线性代数的一个重要工具，在线性方程组、矩阵、二次型中都需要用到行列式。在数学的其他分支里也常常要用到行列式。因此我们在第一章就向大家介绍行列式。

## §1 二级和三级行列式

行列式的概念是从解线性方程组的问题中引进来的。所谓线性方程组是指未知量的最高次数是一次的方程组。例如，解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

用加减消元法，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

于是，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，此方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (3)$$

为了便于记忆上述公式，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{①}{:=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (4)$$

---

① 符号“:=”表示规定或定义。

这样规定的$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$称为 2 级行列式。利用 2 级行列式的概念，公式（3）中的分子 $b_1a_{22}-b_2a_{12}$ 与 $b_2a_{11}-b_1a_{21}$ 可分别写成

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

于是上述结论可叙述为：二元一次方程组当它的系数组成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，有唯一解，并且这个解可以用公式表示：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{5}$$

类似地，为了讨论三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{6}$$

的解，引进记号

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &:= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{7}$$

由(7)式定义的记号称为 3 级行列式。

例1 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

$$=2\times4\times6+1\times7\times0+5\times3\times8$$
$$-5\times4\times0-1\times3\times6-2\times7\times8=38.$$

用消元法解三元一次方程组(6)，可以得到与二元一次方程组类似的结论：三元一次方程组(6)，当它的系数组成的行列式

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，有唯一解，并且这个解可以用公式表示：

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{d}, \quad x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{d}, \\ x_3=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{d}. \end{array}\right. \qquad (8)$$

公式(8)容易记忆，分母是方程组(6)的系数按原来次序组成的3级行列式，称为方程组(6)的系数行列式。$x_1$的分子是把系数行列式的第1列换成常数项，其余列不动所得到的行列式；$x_2$，$x_3$的分子有类似的规律。

例2　解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$$

**解** 先计算系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2-2+8-1+8-4=11.$$

由于系数行列式不等于零，所以此方程组有唯一解。再计算 $x_1, x_2, x_3$ 的分子行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 33, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 11,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -22.$$

于是

$$x_1 = \frac{33}{11} = 3, \quad x_2 = \frac{11}{11} = 1, \quad x_3 = \frac{-22}{11} = -2.$$

在实际问题中往往会遇到未知量不止三个的线性方程组，为了研究它们的解的情况，需要把 2 级、3 级行列式加以推广，引进 $n$ 级行列式的概念，并且讨论其性质和计算方法，这就是本章的主要内容。

## 习 题 1.1

1 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$；



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$； (6) $\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

2. 解三元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

## §2 排 列

为了引进 $n$ 级行列式的概念，需要用到关于排列的一些知识。

**定义1** 由自然数1,2,…, $n$ 组成的一个有序数组称为一个 $n$ 元排列。

**例1** 写出所有的3元排列。

**解** 自然数1,2,3组成的有序数组共有下列六个：

123， 132， 213， 231， 312， 321。

这就是全部3元排列。

我们知道，$n$ 元排列一共有 $n!$ 个。

5元排列12345，它的各个数是按照由小到大的自然顺序排列的，称它为5元**自然序排列**。而5元排列31452中，3比1大，但是3排在1的前面，它们跟自然顺序（由小到大）相反，这时称3和1这对数构成一个逆序。在排列31452中，构成逆序的数对还有32,42和52。因此排列31452共有4个逆序，称

排列31452的逆序数是 4。一般地，有

**定义2** 在一个排列中，一对数如果较大的数排在较小的数之前，就称这对数构成一个**逆序**。一个排列包含的逆序的总数，称为这个排列的**逆序数**。

一个排列的逆序数用记号 $\tau$ 表示。例如，排列31452的逆序数是 4，就记作 $\tau(31452)=4$。

**例2** 求 5 元排列35412的逆序数。

**解** 构成逆序的数对共有 31，32，54，51，52，41，42等七对，因此，$\tau(35412)=7$。

**例3** 求 $n$ 元排列 $123\cdots n$ 的逆序数。

**解** 由于这个排列是按自然顺序排的，其中任一对数都不构成逆序，因此 $\tau(123\cdots n)=0$。

$n$ 元排列 $123\cdots n$ 称为 $n$ 元自然序排列。

**例4** 求 $n$ 元排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数。

**解** 因为在这个排列中，$n$ 后面比它小的数有 $n-1$ 个，$(n-1)$ 后面比它小的数有 $n-2$ 个，…，3 后面比它小的数有 2 个，2 后面比它小的数有 1 个，所以

$$\tau(n(n-1)\cdots321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

一个排列的逆序数在一定程度上刻划了这个排列的性质。

**定义3** 逆序数是偶数的排列称为**偶排列**；逆序数是奇数的排列称为**奇排列**。

例如，$\tau(31452)=4$，因此，31452是偶排列；$\tau(35412)=7$，因此，35412是奇排列；$\tau(12345)=0$，12345也是偶排列。

在许多问题中，需要把一个 $n$ 元排列变成另一个 $n$ 元排

列，最简单的变换是：把某两个数互换位置，而其余数不动。例如，排列31452，把1和5互换位置，其余数不动，就得到排列35412。

**定义4** 把一个排列的某两个数互换位置，而其余数不动，就得到另一个排列，这样一种变换称为**对换**。

排列31452经过1和5对换，变成排列35412，记作$31452\xrightarrow{(1,5)}35412$。由于31452是偶排列，35412是奇排列，因此对换(1,5)改变了排列31452的奇偶性。一般地，有

**定理1** 对换改变排列的奇偶性。

这就是说，偶排列经过一次对换变成奇排列，而奇排列经过一次对换变成偶排列。

**证明** 首先讨论对换的两个数在排列中处于相邻位置的情形。即

$$\begin{array}{cr} \cdots\cdots\ i\ \ j\ \cdots\cdots & (\text{I}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle (i,j)} & \\ \cdots\cdots\ j\ \ i\ \cdots\cdots & (\text{II}) \end{array}$$

显然，$i$，$j$以外的数彼此间的逆序状况在排列(Ⅰ)和(Ⅱ)中是一样的；$i$，$j$以外的数与$i$(或$j$)的逆序状况在排列(Ⅰ)和(Ⅱ)中也是一样的；如果$i$与$j$在排列(Ⅰ)中构成逆序，则它们在排列(Ⅱ)中是顺序，这时(Ⅱ)的逆序数比(Ⅰ)的逆序数少1；如果$i$与$j$在排列(Ⅰ)中是顺序，则它们在(Ⅱ)中构成逆序，这时(Ⅱ)的逆序数比(Ⅰ)的逆序数多1。总之，排列(Ⅰ)与(Ⅱ)的逆序数相差1个，所以排列(Ⅰ)与(Ⅱ)的奇偶性相反。这就证明了：相邻两数的对换会改变排列的奇偶性。

现在看一般情形，设对换的两个数$i$与$j$之间还有$s$个数$k_1,k_2,\cdots,k_s$。即

$$\cdots, i, k_1, k_2, \cdots, k_s, j, \cdots \tag{Ⅲ}$$

$$\downarrow (i,j)$$

$$\cdots, j, k_1, k_2, \cdots, k_s, i, \cdots \tag{Ⅳ}$$

排列(Ⅲ)变成排列(Ⅳ)也可以通过一系列相邻两数的对换来实现，先把排列(Ⅲ)经过 $s+1$次相邻两数的对换变成排列(Ⅴ)：

$$\cdots, k_1, k_2, \cdots, k_s, j, i, \cdots \tag{Ⅴ}$$

再把排列(Ⅴ)经过 $s$ 次相邻两数的对换变成排列(Ⅳ)。于是总共经过$2s+1$次相邻两数的对换把排列(Ⅲ)变成了排列(Ⅳ)。由于一次相邻两数的对换会改变排列的奇偶性，从而$2s+1$次相邻两数的对换会改变排列的奇偶性，因此排列(Ⅲ)与(Ⅳ)的奇偶性相反。这就证明了：在一般情形下，对换会改变排列的奇偶性。

利用定理1可以证明下面一个重要结果。

**定理2** 在全部 $n$ 元排列中，偶排列和奇排列各占一半，都是 $n!/2$个($n\geqslant2$)。

**证明** 设$n$元偶排列共有 $p$ 个，$n$ 元奇排列共有 $q$ 个。对于每个 $n$ 元排列都作对换$(1,2)$，则每个偶排列都变成了奇排列。并且显然不同的 $n$ 元偶排列变成了不同的$n$元奇排列，由于偶排列共有 $p$ 个，于是这样就得到 $p$ 个不同的 $n$ 元奇排列，又由于 $n$ 元奇排列总共才 $q$ 个，所以得

$$p \leqslant q,$$

同理可证 $q\leqslant p$；因此 $p=q=n!/2$。

在一些问题中，往往需要把一个 $n$ 元排列变到 $n$ 元自然序排列，应用定理 1 可以得到：

**定理3** 任一 $n$ 元排列都可以通过一系列对换与 $n$ 元自然序排列$123\cdots n$互变，并且所作对换的次数与这个$n$元排

列有相同的奇偶性。

例如，$35412 \xrightarrow{(5,2)} 32415 \xrightarrow{(4,1)} 32145 \xrightarrow{(3,1)} 12345$，所作对换次数 3 与 $\tau(35412)=7$ 都是奇数。

## 习 题 1.2

1． 求下列各个排列的逆序数，并且指出它们的奇偶性：

(1) 315462；　(2) 365412；　(3) 654321；

(4) 7654321；　(5) 87654321；　(6) 987654321；

(7) 123456789；(8) 518394267；(9) 518694237。

2． 求下列排列的逆序数：

(1) $(n-1)(n-2)\cdots 21n$；(2) $23\cdots(n-1)n1$。

3． 写出把排列315462变成排列123456的那些对换。

4． 讨论排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的奇偶性。

## §3 n 级行列式的定义

为了把 2 级和 3 级行列式的概念推广到 $n$ 级行列式，我们先来分析一下 3 级行列式的特点。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1}$$

其中元素 $a_{ij}$ 的第一个下标 $i$ 表示这个元素位于第 $i$ 行，称为行标，第二个下标 $j$ 表示此元素位于第 $j$ 列，称为列标。

从(1)式看到：3 级行列式是 6 项的代数和，其中每一

项都是取自不同行、不同列的3个元素的乘积，即每一项都可表成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \tag{2}$$

其中行标形成3元自然序排列123，列标形成3元排列 $j_1\ j_2\ j_3$。现在来分析每一项前面所带的符号（正号或负号）与该项列标所成排列的奇偶性之间的关系。(1)式中第一项、第二项、第三项列标所成排列分别是123，231，312，它们都是偶排列，这三项前面都带正号；第四项、第五项、第六项列标所成排列分别是321，213，132，它们都是奇排列，这三项前面都带负号。于是项(2)前面所带的符号是

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)}.$$

综上述，3级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行、不同列的3个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{2}$$

的代数和，其中 $j_1j_2j_3$ 是一个3元排列，当 $j_1j_2j_3$ 是偶（奇）排列时，项(2)前面带正（负）号。即(1)式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 j_3)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \tag{3}$$

这里“$\sum$”是连加号，$\sum\limits_{(j_1 j_2 j_3)}$ 表示把所有形如

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)}\ a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

的项加起来，其中 $j_1j_2j_3$ 取遍所有3元排列。

仿此可以给 $n$ 级行列式下定义。



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com