



北京大学物理学丛书

*The Series of Advanced Physics
of Peking University*

数学物理方法

吴崇试 编著



北京大学出版社 PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/吴崇试编著. —北京:北京大学出版社,
1999. 4

(北京大学物理学丛书)

ISBN 7-301-03994-8

I. 数… II. 吴… III. 数学物理方法 IV. 0411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 36416 号

书 名: 数学物理方法

著作责任者: 吴崇试 编著

责任编辑: 瞿 定

标准书号: ISBN 7-301-03994-8/O · 0425

出 版 者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm>

电 话: 出版部 62752015 发行部 62754140 编辑部 62752021

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

排 印 者: 北京大学印刷厂印刷

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

850×1168 32 开本 19.75 印张 513 千字

1999 年 4 月第一版 1999 年 4 月第一次印刷

定 价: 27.00 元

The Series of Advanced Physics of Peking University

Methods of Mathematical Physics

Wu Chongshi

Peking University Press
Beijing

内 容 提 要

包括复变函数及数理方程两部分. 兼顾理论体系的完整与实用的解题技巧. 比传统的内容增加 Euler 求和公式、发散级数与渐近级数、Möbius 变换、线性偏微分方程的通解、三种基本类型的数理方程解的定性性质、Laplace 算符的不变性等; 补充了关于外微分运算、小波变换与非线性偏微分方程的简介; 部分内容(如 Γ 函数和 Legendre 多项式)也采用一些新的讲法, 并给出“分离变量法总结”. 订正了目前工具书中某几个特殊函数公式.

《北京大学物理学丛书》 编委会名单

主 任：高崇寿

副 主 任(按姓氏笔画排列,下同):

刘寄星 秦旦华 聂玉昕

阎守胜 黄 涛

编 委：邹英华 邹振隆 宋菲君 吴崇试

林纯镇 俞允强 夏建白 曾谨言

韩汝珊 解思深

常务编委：周月梅

前 言

物理学是自然科学的基础,是探讨物质结构和运动基本规律的前沿学科.几十年来,在生产技术发展的要求和推动下,人们对物理现象和物理学规律的探索研究不断取得新的突破.物理学的各分支学科有着突飞猛进的发展,丰富了人们对物质世界物理运动基本规律的认识和掌握,促进了许多和物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的进步.物理学的发展是许多新兴学科、交叉学科和新技术学科产生、成长和发展的基础和前导.

为适应现代化建设的需要,为推动国内物理学的研究、提高物理教学水平,我们决定推出《北京大学物理学丛书》,请在物理学前沿进行科学研究和教学工作的著名物理学家和教授对现代物理学各分支领域的前沿发展做系统、全面的介绍,为广大物理学工作者和物理系的学生进一步开展物理学各分支领域的探索研究和学习,开展与物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的研究和学习提供研究参考书、教学参考书和教材.

本丛书分两个层次.第一个层次是物理系本科生的基础课教材,这一教材系列,将在几十年来几代教师,特别是在北京大学教师的教学实践和教学经验积累的基础上,力求深入浅出、删繁就简,以适于全国大多数院校的物理系使用.它既吸收以往经典的物理教材的精华,尽可

能系统地、完整地、准确地讲解有关的物理学基本知识、基本概念、基本规律、基本方法;同时又注入科技发展的新观点和方法,介绍物理学的现代发展,使学生不仅能掌握物理学的基础知识,还能了解本学科的前沿课题和研究动向,提高学生的科学素质.第二个层次是研究生教材、研究生教学参考书和专题学术著作.这一系列将集中于一些发展迅速、已有开拓性进展、国际上活跃的学科方向和专题,介绍该学科方向的基本内容,力求充分反映该学科方向国内外前沿最新进展和研究成果.学术专著首先着眼于物理学的各分支学科,然后再扩展到与物理学紧密相关的交叉学科.

愿这套丛书的出版既能使国内著名物理学家和教授有机会将他们的累累硕果奉献给广大读者,又能对物理的教学和科学研究起到促进和推动作用.

《北京大学物理学丛书》编辑委员会

1997年3月

Preface

Physics is the foundation of natural sciences, a leading discipline of studying structures of matter and basic laws of motion. For several decades, driving by the demands of developing technology, the breakthrough in the studies of physical phenomenon and the laws of physics never end. During this period, all branches of Physics grew very fast and our knowledge of the basic laws governing the motion of the physical world was highly enriched. The growing of physics accelerated the progress of many physics related areas and technologies. The development of physics provided grounds and guidance for the birth and the growth of those new branches of physics, related areas and new technologies.

In order to catch up the main stream of the modernization and to give an impetus to scientific research and to improve teaching of physics in China. We decided to publish "*The Series of Advanced Physics of Peking University*". We invited those distinguished physicists and professors who worked in the frontier of physics to give series introductions to all branches of modern physics and recent developments in these fields. This series, as a consequence, provides textbooks and references for physicists and physics students in their studies of all branches of physics, related areas and technologies.

This series is divided into two sub-series of different levels, the first sub-series includes the textbooks of undergraduate

physics written by experienced teachers in Peking University in past decades. These textbooks were written concisely with deep insights and easier expressions, which adopt essences of physics textbook classics, explain fundamental concepts, laws and methods of physics in a systematic and rigorous way. In addition, these textbooks properly introduced the new approaches and the latest developments of physics for educational purposes. This sub-series is suitable for teaching of undergraduate physics for most universities and institutes in China. The second sub-series includes graduate textbook, references and academic writings. This sub-series focuses on the latest developments and accomplishments in the active subjects of relevant research with international interests and introductions to those of fast developing research fields. The topics of academic writings mainly cover all branches of physics, but it will be generalized to closely related areas.

We wish the publication of this series could provide an opportunity for leading physicists and physics professors in China to show their fruitful accomplishments to general audience and to give an impetus to teaching and research in physics.

Editorial board of
"The Series of Advanced Physics of Peking University"
March 1997

序

世纪之交的物理学

20 世纪即将过去. 物理学的革命, 这场革命推动的整个自然科学和应用技术的伟大变革, 以及这些变革对人类社会的影响, 将作为这个世纪的一个重要标志而载入史册. 这段令人神往的历史, 给正处在世纪之交的我们以什么样的启示呢?

首先的启示是作为研究物质结构和运动的基本规律的物理学, 总是生机勃勃、不断地开辟自己前进的道路的. 1803 年道尔顿提出了近代的原子论, 认为世间万物都是由几十种不同种类的原子(那时只认识到三十来种)组成的. 经过近一个世纪多方面的研究和争论, 科学界接受了和发展了这个学说. 到 19 世纪 60 年代, 元素的数目增到六十多种, 而且还认识到不同元素的性质是有内在联系的, 门捷列夫的周期律描述了这种联系. 19 世纪末, 物理学家们发现了电子、 α 粒子、放射性、X 射线……发现原子是可以改变的, 原子不是物质构成的最小单元. 20 世纪初卢瑟福建立了原子结构的“行星”模型. 探讨原子结构模型和经典物理学之间的矛盾, 导致了量子力学的诞生, 产生了现代原子、分子物理、凝聚态物理、原子核物理……历史也许有某种类似性. 在这个世纪之交, 物理学又

正在进入一个新的层次. 本世纪 50 年代, 人们找到作为构成物质的基石的基本粒子有三十来种, 也认识到它们之间的相互作用和相互转化. 探索这些“基本”粒子的更深层次的构造的努力, 近三十年来取得十分辉煌的成就. 三代夸克和三代轻子的粒子模型、电弱统一理论和量子色动力学, 这被称作粒子物理的标准模型的建立以及它在各方面的成功, 正是标志着物理学正在进入物质世界的一个更深的层次, 毫无疑问这将是物理学历史上一个具有划时代意义的大事. 但是, 大多数的物理学家都会同意, 从本质上说, 目前的标准模型还是一个唯象的模型. 在欢呼它取得的多方面的胜利时, 也要看到同时提出了一系列带本质性的问题. 也许可以说, 进入这个新层次将带来的最本质的新的物理, 还没有来到我们中间. 19 世纪末的物理学家没能猜测到, 进入比原子更深层次的探索, 会在什么时候和在哪点上带来新的物理, 20 世纪末的人们也不能奢望会比前辈高明多少!

20 世纪物理学的革命, 表现出人类理性思维的伟大胜利. 狭义相对论, 特别是广义相对论, 以它深邃的思考, 严整的形式和美丽的表述, 震撼着一代又一代的物理学家工作者的心灵. 但是, 爱因斯坦也在他那无与伦比的思考导致的宇宙模型面前困惑了. 感谢近四十多年来一大批物理学家和天文学家辛勤的努力和非凡的勇气, 这个难以想象的革命性的关于宇宙的概念和图象建立起来了, 并得到科学界多数人的认同. 在大致一百五十多亿年前, 宇宙从一个具有无限大的密度和具有无限大的时空曲率的点开始了. 人们猜想, 在宇宙膨胀, 密度和温度降低中,

到 10^{-44} 秒时,重力相互作用和其他相互作用分离开来;到 10^{-36} 秒时,强相互作用和电弱相互作用分离;直到 10^{-10} 秒时,弱相互作用才与电磁相互作用分离,世界变成了我们现在所处的有四种基本相互作用的世界. 到 10^{-6} 秒时,夸克开始结合成强子,也许应当说,只有从此之后的物理才是当代物理学家可以比较有把握来谈论的. 直到 10^{12} 秒(也就是三万多年)后,原子才开始出现. 这样一个综合了亚核子尺度(小于 10^{-14} 厘米)的物理和宇观尺度(大于 10^{24} 厘米)的物理的宇宙演化模型的建立,可以说是人类认识史上一个最具有革命性的、划时代的伟大事件,当代人还难以全部理解它的意义. 这个宇宙学的标准模型和近年来天体物理学家取得的辉煌的成就,在物理学的面前提出了十分严峻的具有本质的挑战. 如何理解这样有限而无界的时空和它的奇点? 什么是在这样演化中的物质和运动规律? 为什么宇宙学中有那么多“巧合”? ……总之,面对着如此壮观而又如此神奇的宇宙之迹,除了由衷的赞美和敬佩,人们不禁想起爱因斯坦的话:“自然界最不可理解的就是它竟然可以理解!”

本世纪物理学的发展给我们的又一个教益是:物质世界是有层次的,反映物质世界的物理学规律也是有层次的. 每一层次的物理都植根于更深层次的物理学. 但是,每个层次的物理都是在真实的意义上不可穷尽的. 在大自然千姿百态的丰富性面前,那些断言某某学科将不会有什么发展的说法总是被事实所粉碎的. 经典力学、经典电动力学并不因为量子力学、量子电动力学的发展而被排斥出物理学,近年来我们还不停地学习它们新的、有

深刻意义的进展.光学和凝聚态物理学半个世纪来的巨大的、令人应接不暇的发展提供了最能说服人的例子.也许人们常常由于赞颂它们在实际应用上的威力的同时,不够强调它们在物理学学科上的意义.但如果我们想到在当代粒子物理和宇宙学中最重要观念,如相变、对称性破缺、拓扑性缺陷、红外发散等等,都首先来自凝聚态物理学,而当代凝聚态物理又都广泛地而且本质地使用量子场论的语言和技术时,我们就会确信物理学的丰富性、多样性和统一性,“只有一个物理学”!

在 20 世纪,物理学的基本概念和技术已被应用到所有的自然科学领域.物理学与其他自然科学学科之间的边缘领域,一定意义上是当代自然科学中最富于获得丰硕成果的机遇的领域.边缘领域的发展,又反过来丰富、加深和支持了物理学本身的发展.量子力学和现代物理实验技术的应用,大大推进了现代化学的发展.对分子结构、性能和反应机理的研究,又丰富和推动了现代物理的进步.而且,如果没有现代化学的支撑,现代物理学中好些分支学科都不能产生和发展.地球科学、生命科学与物理学的边缘领域的发展,也将会是类似的情景.特别令人感到兴奋的一个新事物是近二三十年复杂性科学的发展.数学、物理学,特别是物理学与化学、地球科学、生命科学、各种应用技术科学的边缘领域研究的发展,都使人们相信,在复杂性(多维度,多组元,非线性,非平衡和开放的)系统的结构、性能和演化中,有一些具有普遍性的运动规律和运动模式.人们自然回想到,开始于上一世纪中叶的研究能量守恒和转化的热力学和分子运动论的发

展,本世纪统计物理和涨落理论的发展.有理由相信一门有重要的基础科学意义的学科,复杂性物理正在形成.它现在已经显出可能对物理学中一些最基础的问题,如必然性和随机性,无序化的倾向和有序结构的生成,不同层次的结构自相似性等,作出有深刻物理意义的回答.也许,历史会表明,这也是人类认识史上又一个划时代的事物,同时,无疑地会对化学、地球科学、生命科学、认知科学和各种应用技术发生巨大的影响.

物理学作为一门最基础的自然科学,它的发展动力是深深地植根于人类对真理的非功利的追求.但是,历史的发展将越来越有力地证明,正是这种非功利的追求给人类带来最大的收益.本世纪发生的主要源于物理学的进展的技术革命,就是最有说服力的例子.当代技术进步的主要推动力来自纯学科性的基础研究.研究室和实验室中纯学科性的研究转变为重要的应用技术,实际生产和社会发展中遇到的问题转化为有基础学科意义的研究课题,两者关系愈来愈密切,周期愈来愈短.与之相应,在现代,杰出的基础科学研究人材和优秀的应用技术开发人材在科学素质上的要求变得更加一致了.在世纪之交,无论是制造业还是服务业,也无论是材料、信息、能源、交通、环境等技术部门,都在呼唤着新的技术变革.而认真考察就会发现,多数这些变革都主要基于物理学近年的进展.21世纪物理学毫无疑问仍是技术进步的主要源泉.

物理学的发展从来就对人类社会思想、文化发生巨大影响.20世纪的物理学革命就更是这样.人类社会进步的一个主要动力便是科学精神,现代科学精神的典范和

集中的反映就是现代物理学。我国是一个文明古国，在历史上曾经对人类的文化和科学发展做出过光辉的贡献。但是，我国接受近代科学的时间还很短，现代科学的精神实质和思维方式扎根我国还要做艰苦的努力。有些人跟着西方一些比较浅薄的哲学流派的后面，宣扬一些贬低和反对现代科学精神的言论，甚至把当代社会中由于社会矛盾而造成的后果，都归罪到现代科学精神上。这当然是完全错误的。以现代物理学为代表的科学精神，是人类进步的一面旗帜，它将高高飘扬在未来的岁月中。

当我们站在新世纪的门槛上，回顾 20 世纪物理学的辉煌时，会更加确信，在 21 世纪物理学将会同样辉煌。那些有幸进入物理学工作者的行列的年青朋友，历史将会证明，你们的选择是完全正确的。

中国科学院院士

甘子钊

1997 年 4 月

作者前言

目前关于《数学物理方法》的教材为数不少，特别是郭敦仁先生和梁昆淼先生的两本同名著作，内容丰富，为各校所广泛采用。本书希望能做到有所创新，而不完全雷同于其他教材。作者在这里无意侈谈本书如何有创新之处，因为作为一门基础课程，其基本内容应该说是共同的；再加之篇幅有限，因而实际上也就只能做到在若干部分略有新意：在各章的前后安排次序上，作了某些调整；某些章节中，增加了一点新的内容；某些部分的讲法上，作了一点新的尝试；在一些问题上自认为有更仔细的分析；在个别问题上纠正了其他书上的一些疏漏之处。作者希望本书能做到不求全，但稍有特色。如果从事本课程教学的教师认为本书有参考的必要，如果学习本课程的学生感到本书有阅读的兴趣，如果从事有关专业工作的同志发现本书有查阅、保存的价值，作者也就感到十分满足了。

和传统的《数学物理方法》教材一样，本书由复变函数及数学物理方程两部分组成。在前一部分中，把二阶常微分方程的幂级数解法和解析延拓两章提前，紧接解析函数的幂级数展开之后。这样作的目的，纯粹是为了避免在学期末（在北大，本课程是一年的课程）讲授常微分方程的幂级数解法。提前讲授，可以使学生有较充裕的时间复习巩固。在常微分方程的幂级数解法一章之后，立即介绍解析延拓，显得比较紧凑。用级数解法得到的微分方程的解多只在复平面的一定区域内成立，解析延拓到更大范围就成为自然的要求。而从微分方程的解来进一步阐述解析延拓的概念，

又增加了解析延拓的具体例证. 在数学物理方程部分, 在分离变量法及特殊函数之后, 集中明确地把分离变量法总结列为一章, 力求更加深入、紧密地讨论分离变量法的理论依据, 以加深对于分离变量法这一最基本内容的理解. 另外, 在全书的最后, 还增加了数学物理方程解法的综述, 对于课程中的各种解法进行横向的分析比较, 力图使同学能对数学物理方程的各种解法有更全面的认识. 应该说, 这些内容在各章中也都分散地谈到过, 但集中到一处, 希望能收到更好的效果.

关于本书中的新讲法, 值得提到的有两处. 一是 Γ 函数的互余宗量定理和倍乘公式的证明, 在一般教材中, 各自总要用到特别的技巧. 本书利用 B 函数与 Γ 函数的关系来证, 希望能使证明的难度有所降低, 方法上也显得比较一致. 另一处是关于 Legendre 多项式的引入 (表达式). 通常的做法都是在 $x = 0$ 点的邻域内求解 Legendre 方程而引入 Legendre 多项式. 现在改用在 $x = 1$ 点的邻域内求解 Legendre 方程, 求解本征值问题更加直截了当, Legendre 多项式的形式也比较简单, 在此基础上照样能推出 Legendre 多项式的其他性质, 并不产生任何困难.

本书中增加的新内容, 有两种类型. 一种属于课程的基本要求, 这包括第十三章以及第十五章的部分内容. 第十三章中讨论了线性偏微分方程的通解, 这不仅涉及方程解的基本结构, 而且也使得以后讨论非齐次方程的齐次化时, 显得“有章可循”. 在这一章中还定性讨论了三种基本类型的数学物理方程的特点, 如波的耗散与色散、热传导方程的传播速度问题等, 它们是和物理现象紧密联系的. 由于一般教材都只介绍方程的解法, 往往都未曾涉及这些内容. 当然, 由于篇幅所限, 本书在这方面也只能做到“浅尝辄止”. 在第十五章中, 介绍了外微分法, 由此给出 Laplace 算符在各种正交曲面坐标系中的表达式. 由于学时的限制, 这里只是介绍了外微分的运算法则, 根本不可能涉及有关微分流形的基本概念. 而且, 如果学时紧张, 只要求学生承认 Laplace 算符在柱坐标系和