博士丛书

非线性抛物型方程

王明新 著

科学出版社

博 士 丛 书

非线性抛物型方程

王明新 著

科 学 出 版 社

1993

(京)新登字092号

内 容 简 介

本书系统地介绍了非线性抛物型方程中的重要问题。主要内容包括：抛物型方程的行波解、半线性抛物型方程的初边值问题、方程组正平衡解分支与稳定性、带有非线性边界条件的非线性抛物型方程的初边值问题和半线性抛物型方程初值问题。

本书可供理工科大学数学系、应用数学系和其它相关专业的大学生、研究生、教师以及有关的科学工作者参考。

博 士 丛 书
非线性抛物型方程
王明新 著
责任编辑 林 鹏
科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1993年12月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1993年12月第一次印刷 印张：10 1/8
印数：1—1 500 字数：260 000

ISBN 7-03-003979-3/O·693
定 价：11.50元

国家自然科学基金委员会资助

中国博士后科学基金会资助

序

环顾当今世界，国家的发达，民族的振兴，无一例外地离不开科学技术的推动作用。年轻博士们历来是科技队伍中最活跃、最富创造性的生力军。他们的科研成果是学科发展强有力的推动力量，是体现一个国家高层次教育水平和科研水平的窗口。为了系统地反映年轻博士们的科研成果，促使他们的快速成长，加强国际国内的学术交流，在老一辈科学家的热心支持下，科学出版社决定出版一套《博士丛书》。

我们指导思想是突出本丛书的学术性、创造性、新颖性、先进性和代表性，使之成为所有青年博士平等竞争的学术舞台和优秀科研成果的缩影。

这套丛书以专著为主，并适时组织编写介绍学科最新进展的综述性著作。它将覆盖自然科学各个领域，是一套充分体现我国青年学者科研成果和特色的丛书。

丛书编委会将在由著名科学家组成的专家委员会指导下开展编辑工作。本丛书得到了国家自然科学基金委员会和全国博士后管理协调委员会的特别资助。在此我们深表谢意。

《博士丛书》编委会

一九九三年十月

《博士丛书》专家委员会

前　　言

本书是围绕作者几年来的研究工作写成的，绝大部分内容取材于作者近年来已发表或尚未发表的论文．为了保持其系统性，某些章节也介绍了近期国内外核心杂志发表的他人工作．

非线性抛物型方程是偏微分方程研究领域的一个主要分支．大量问题来自于物理学、化学和生物学中众多的数学模型，因而有强烈的实际背景；另一方面，在非线性抛物型方程的研究中，对数学也提出了许多挑战性的问题．

本书选取了非线性抛物型方程中的五个问题：行波解问题，半线性初边值问题，方程组正平衡解分支与稳定性，带有非线性边界条件的初边值问题和半线性初值问题．

第一章有两部分．第一部分讨论退化抛物型方程和方程组单调行波解的存在性、正则性、波速的变分刻化和估计，以及振荡行波解的存在性．第二部分讨论方程组单调行波解的存在性和显式解．

第二章讨论半线性抛物型方程和方程组的初边值问题．为了便于读者阅读，首先介绍了处理此类问题的几种基本方法和一些基本结论．本章主要讨论解的大时间性态 — 爆破问题和渐近性．介绍了处理爆破的三种基本方法 — 上、下解方法，凸性方法和能量方法．对于解的渐近性质，重点介绍了处理带有齐次 Neumann 边界条件的初边值问题的两种方法 —Liapunov 泛函方法和平均值方法．

非线性抛物型方程研究领域中的另一个重要内容就是平衡解的分支结构，它直接影响到解的大时间性态．第三章重点讨论方程组正平衡解的分支与稳定性．介绍三种基本方法 — 上、下解结合拓扑度方法，锥映射的不动点指数方法和解耦方法．

第四章处理带有非线性边界条件的非线性抛物型方程初边值问题解的整体存在性和在有限时间爆破.

第五章讨论半线性抛物型方程初值 (Cauchy) 问题解的整体存在性、爆破和整体解的渐近性质. 系统介绍处理两个典型方程

$$u_t - \Delta u = u^m, \quad m > 1$$

和

$$u_t - \Delta u = u^m - cu^q - u, \quad c \geq 0, \; 1 < q < m$$

的基本方法和结论.

在成书过程中, 作者始终坚持了以下原则:

一. 鉴于本丛书的性质, 重点介绍自己的工作.

二. 有目的地吸收一些他人工作, 以保持其系统性.

三. 重点介绍其思想和方法. 所以书中的方程都是最基本的, 大多数结果可以推广到更一般的问题. 所介绍的方法也都有很强的普适性.

每章末都有评注. 介绍正文未涉及的问题或有关问题的最新成果和方法以及正文内容的出处、历史与现状. 参考文献是按正文中出现的顺序安排的.

在写作过程, 丁夏畦教授, 叶其孝教授给予作者很多帮助和鼓励, 尤其是两位导师还帮助作者敲定了书的内容与选材. 邓聚成教授为作者提供了部分参考资料, 仔细阅读了本书稿并提出了不少好的修改建议. 罗党同志, 王术同志都帮助作者校对过书稿的部分内容. 在此一并向他们表示深切的谢意.

此外, 本书的出版得到河南大学科研基金的资助, 也得到科学出版社和《博士丛书》编委会的大力支持. 谨此致谢.

限于作者水平, 书中定有不妥甚至错误之处, 恳请读者批评指正.

作者

1992 年 12 月

目　录

第一章 抛物型方程的行波解

抛物型方程有一类重要的解，就是形如 $u(x,t)=u(z)$, $z=x+ct$ 的行波解. 在实际应用中，行波解可以很好地表现自然界中的振荡现象以及扰动以有限速度传播现象. 在数学理论中，行波解可以揭示方程本身的许多重要性质. 同时，在行波解的研究中也不断产生新的思想和方法，对数学自身的发展起到了一定的作用. 因此行波解问题成为非线性偏微分方程的一个重要研究领域，发展迅速.

人们很早就知道，波动方程有行波. 但是认识到半线性抛物型方程有行波解还是比较晚的事. 对退化抛物型方程的行波解或方程组的行波解研究只是近十几年的事情.

当 $f(u)\in C^1[0,1], f'(0), f'(1)$ 皆不为零时，方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(u)$$

的行波解问题，专著 [1] 中已作了详细介绍. 我们在这里重点介绍处理退化抛物型方程和方程组的行波解的一些方法和结果.

在 §1.1–§1.6 中，我们讨论如下的退化抛物型方程

$$(u^m/m)_t=(u^k)_{xx}+u^n f(u).$$

令 $u^k=v$, 可以转化为讨论

$$(u^m/m)_t=u_{xx}+u^n f(u), \tag{I}$$

其中 $m,n>0, f\in C[0,1], f(1)=0$.

定义 1.1 $u(x,t)=u(z), z=x+ct$ 称为 (I) 的行波解，如果存在 $-\infty\le z_l<z_r\le+\infty$, 使得

$$
\begin{cases}
cu^{m-1}u'=u''+u^nf(u), \qquad z\in(z_l,z_r),\\
u(z_l)=\alpha, u(z_r)=\beta, u'(z_l)=u'(z_r)=0,\\
\quad \text{在 } (z_l,z_r) \text{ 的任一子区间 } (a,b) \text{ 内},\\
u'(z)\ne 0. \quad \text{且当 } z\in(-\infty,z_l) \text{ 时},\\
u(z)\equiv\alpha; \quad \text{当 } z\in(z_r,+\infty) \text{ 时},\\
u(z)\equiv\beta. \ \text{其中 } \alpha,\beta \text{ 是 } 0,\\
\quad \text{或者 } f(u) \text{ 的零点}, \quad c \text{ 称为波速}.
\end{cases}
\tag{II}
$$

定义 1.2 当 $u(z)$ 在 (z_l,z_r) 内严格单调时，称其为波前解.

注 如果 $c\ne 0$, 当 $u(z)$ 严格单调时， $u'(z_l)=u'(z_r)=0$ 可以从方程直接推出，而不必作为条件.

定义 1.3 在定义 1.1 中，如果 $z_l=-\infty, z_r=+\infty$ 同时成立，则称 $u(z)$ 为强解. 否则就称 $u(z)$ 为弱解.

当 $z_l>-\infty$ 或 $z_r<+\infty$ 时， $u(z)$ 是有限行波解，它可以揭示渗流方程边界层的有限传播 (波的有限传播) 性质.

1.1 $f(u)\in C^1[0,1]$, 在 $[0,1)$ 内 $f(u)>0$ 的情形

本节讨论 (I) 的单增波前解，即 $u'(z)\ge 0$. 此时定义 1.1 中的 $\alpha=0,\beta=1$. 假设

(A_1): $f\in C^1[0,1], f'(1)<0$. 当 $u\in[0,1)$ 时， $f(u)>0$.

引理 1.1.1 如果 $u(z)$ 是 (II) 的单增解，则 $c>0, z_r=+\infty$ 且在 $(z_l,+\infty)$ 内 $u'(z)>0$.

此时 (II) 可以写成

$$
\begin{cases}
cu^{m-1}u'=u''+u^nf(u), \quad z\in(z_l,+\infty),\\
u(+\infty)=1, u(z_l)=0, u'(z_l)=u'(+\infty)=0,\\
\qquad\qquad \text{在 } (z_l,+\infty) \text{ 内 } u'(z)>0.\\
\text{如果 } z_l>-\infty, \text{在 } (-\infty,z_l) \text{ 内}, \quad u(z)\equiv 0.
\end{cases}
\tag{1.1.1}
$$

在 $u>0$ 的地方，令 $u'=p$, 则有

$$\begin{cases} u'=p, \\ p'=cu^{m-1}p-u^nf(u). \end{cases} \tag{1.1.2}$$

求解 (1.1.1) 等价于求解

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{du}=cu^{m-1}-\dfrac{u^nf(u)}{p}, \\ p(0)=p(1)=0, \\ p(u)>0, u\in(0,1). \end{cases} \tag{1.1.3}$$

(参看 [1]).

1.1.1 波前解的存在性

定理 1.1.2 如果 $n<2m-1$, 则 (1.1.3) 无解，即 (I) 不存在波前解.

证明 如果结论不对. 设 $c>0, u(z)$ 是 (1.1.1) 的解，$p=p(u)$ 是 (1.1.3) 的解. 于是 $\frac{dp}{du}<cu^{m-1}$, 积分得 $p(u)\le cu^m/m$. 由 (1.1.3) 知

$$\begin{aligned}\frac{dp}{du}&\le cu^{m-1}-\frac{m}{c}u^{n-m}f(u)=u^{n-m}(cu^{2m-n-1}-mf(u)/c)\\ &\le u^{n-m}(cu^{2m-n-1}-k)\end{aligned}$$

当 $0<u\ll 1$ 时成立 $(k>0)$. 由 $n<2m-1$ 知，当 $0<u\ll 1$ 时，$cu^{2m-n-1}-k<0$, 从而 $\frac{dp}{du}\le 0$. 此与 $p(0)=0, p(u)>0, u\in(0,1)$ 矛盾.

注 如果 $f(u)\in C[0,1]$, 存在 $0<\varepsilon<1$, 使得在 $[0,\varepsilon)$ 内 $f(u)>0$, 则定理 1.1.2 的结论仍然成立.

定理 1.1.3 如果 $n\ge 2m-1$, 则对充分大的 c, (1.1.3) 有解，即 (I) 有波前解.

证明 由于 $f'(1)<0$, $(1,0)$ 是鞍点，两个特征根是 $\lambda_{\pm}(c)=(c\pm\sqrt{c^2-4f'(1)})/2$. 记 $D=\{0<u<1,p>0\}$. 由 Liapunov 扰动定理知，对于 $\forall\, c$, (1.1.2) 有一条从 $(1,0)$ 点出来的轨线 Γ_c 进入 D, 且 Γ_c 在 $u=1$ 处的斜率是 $\lambda_-(c)=(c-\sqrt{c^2-4f'(1)})/2$. 因为在 $(0,1)$ 内 $f(u)>0$, 所以 Γ_c 在 $(0,1)$ 内与 u 轴不交. 记

$$M=\max_{0\le u\le 1}\{4mu^{n-2m+1}f(u)\},$$

则 $0<M<+\infty$. 于是当 $c>\sqrt{M}$ 时，存在 $a>0$ 使得

$$ma^2-ca+u^{n-2m+1}f(u)<0,\forall u\in(0,1). \qquad (1.1.4)$$

取曲线 $S: p_1(u)=au^m$. 在 $u=1$ 的左邻域内 Γ_c 位于 S 的下方. 如果在某个 $u_0\in(0,1)$ 处 Γ_c 与 S 相交，则

$$\frac{dp(u_0)}{du}=cu_0^{m-1}-u_0^nf(u_0)/au_0^m>mau_0^{m-1}=\frac{dp_1(u_0)}{du} \qquad (1.1.5)$$

当且仅当 $ma^2-ca+u_0^{n-2m+1}f(u_0)<0$. 由 (1.1.4) 知，(1.1.5) 成立. 这说明当 $u>u_0$ 时，Γ_c 位于 S 的上方，矛盾. 于是在 $(0,1)$ 内 Γ_c 严格位于 S 的下方. 从而 Γ_c 过 $(0,0)$ 点，即对应的 $p(u)$ 满足 (1.1.3). 证毕.

引理 1.1.4 设 $\beta>\alpha\ge 0$, $p_i(u)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{dp_i}{du}+\dfrac{u^nf(u)}{p_i}=c_iu^{m-1}, & u\in(\alpha,\beta),\\ p_i(\beta)=\beta_i, i=1,2.\end{cases}$$

如果存在 $\delta>0$, 当 $\beta-\delta<u<\beta$ 时 $f(u)\ge 0$ 且在 (α,β) 内, $p_i(u)$ 均正或均负，则

1° 当 $c_1=c_2,\beta_1=\beta_2$ 时， $p_1(u)\equiv p_2(u)$ $(u\in(\alpha,\beta))$;

2° 当 $c_1>c_2,\beta_1\le\beta_2$ 时， $p_1(u)<p_2(u)$ $(u\in(\alpha,\beta))$.

证明　由假设条件知

$$\frac{d(p_1-p_2)}{du}-\frac{u^n f(u)}{p_1p_2}(p_1-p_2)=(c_1-c_2)u^{m-1}.$$

两边乘以

$$\exp\left\{\int_{\beta-\delta}^{u}-\frac{s^n f(s)}{p_1(s)p_2(s)}ds\right\}\triangleq h(u),$$

并令

$$G(u)=(p_1(u)-p_2(u))h(u)$$

得

$$\frac{dG(u)}{du}=(c_1-c_2)u^{m-1}h(u),\qquad u\in(\alpha,\beta).$$

若 $K=-\int_{\beta-\delta}^{\beta}\frac{s^n f(s)}{p_1(s)p_2(s)}ds$ 发散，则 $\lim\limits_{u\to\beta-0}G(u)=0$.

若 K 收敛，则 $\lim\limits_{u\to\beta-0}G(u)\le 0$(当 $\beta_1=\beta_2$ 时为 0).

1° 若 $c_1=c_2,\beta_1=\beta_2$, 则

$$\lim_{u\to\beta-0}G(u)=0,\quad \frac{dG(u)}{du}=0,\qquad u\in(\alpha,\beta).$$

于是 $G(u)\equiv 0$, 即 $p_1(u)\equiv p_2(u),u\in(\alpha,\beta)$.

2° 若 $c_1>c_2,\beta_1\le\beta_2$, 则

$$\lim_{u\to\beta-0}G(u)\le 0,\quad \frac{dG(u)}{du}>0,\qquad u\in(\alpha,\beta).$$

于是 $G(u)<0$, 即 $p_1(u)<p_2(u),u\in(\alpha,\beta)$. 证毕.

由引理 1.1.4 知，(1.1.3) 的解 $p(u)$ 关于 c 是单减的.

定理 1.1.5 如果 $n\ge 2m-1$, 则存在 $c^*>0$, 使得 (1.1.3) 有解 (即 (1.1.1) 有解) 当且仅当 $c\ge c^*$. 此时 c^* 称为 (I) 的最小波速.

证明 记 Γ_c 是 (1.1.2) 的从 (1,0) 点出发进入 $D=\{0<u<1, p>0\}$ 的轨线. 定义 $F=\{c>0|\Gamma_c$ 过 (0,0) 点 $\}=\{c>0|(1.1.3)$ 有解 $\}$, 则 $F\neq\emptyset$ 且下方有界. 于是 $c^*=\inf F$ 存在, $c^*\geq 0$.

先证 $c^*>0$. 若不然, 设 $c^*=0$, 则与轨线 $\Gamma_{c^*}=\Gamma_0$ 对应的 $p^*(u)$ 满足

$$p^*\frac{dp^*}{du}=-u^n f(u),$$

从 0 到 1 积分得

$$p^{*^2}(0)/2=\int_0^1 s^n f(s)ds<+\infty.$$

取 $c_l\in F, c_l\searrow c^*$, 对应的 (1.1.3) 的解记为 $p_l(u)$. 由引理 1.1.4 知 $p_l(u)<p_{l+1}(u)\leq p^*(u), u\in(0,1)$. 利用解关于参数的连续性定理可知, 当 $u>0$ 时 $\lim\limits_{l\to+\infty}p_l(u)=p^*(u)$.

将 (1.1.3) 的第一式写成 $p\dfrac{dp}{du}=cp(u)u^{m-1}-u^n f(u)$, 容易得到

$$p_l^2(u)/2=c_l\int_0^u p_l(s)s^{m-1}ds-\int_0^u s^n f(s)ds, \tag{1.1.6}$$

$$p_l(u)u^{m-1}\leq p^*(u)u^{m-1}\leq Au^{m-1}, \quad A=\max_{0\leq u\leq 1}p^*(u).$$

令 $l\to+\infty$, 由控制收敛定理得

$$p^{*^2}(u)/2=-\int_0^u s^n f(s)ds<0.$$

矛盾. 故 $c^*>0$.

再证 $p^*(u)$ 是上方有界的. 反证, 如果 $p^*(u)$ 上方无界. 利用 $n\geq 2m-1$ 以及 $\dfrac{dp^*(u)}{du}=c^*u^{m-1}-u^n f(u)/p^*(u)$ 知, 在 $u=0$