分析力学基础

梅凤翔 刘桂林 编著

西安交通大学出版社

分 析 力 学 基 础

梅 凤 翔
刘 桂 林 编著

西安交通大学出版社

内 容 提 要

本书内容包括分析力学的基本概念、虚位移原理与分析静力学、达朗伯原理和动力学普遍方程、拉格朗日方程、拉格朗日方程的应用、尼尔森方程、哈密顿正则方程及其积分方法、力学的变分原理、非完整系统力学初步等九章。全书共配有90多个例题，150道习题，其中有些习题附有答案。讲授约需40学时。

本书特点是：起点适当；既强调分析力学的基本理论又注意分析方法；既讨论经典问题又介绍某些近代问题；既有基本部分又有较深入的专门部分，便于读者选用。此外，例题和习题较多，习题难度适中。

本书可作为高等院校理工科力学专业、有关的数学、物理和其他专业大学生和研究生的教材，也可作为教师、科研人员和技术人员的参考书。

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店发行　各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32　印张13　字数：274 千字

1987年7月第1版　1987年11月第1次印刷

印数：1——2000册

ISBN7-5605-0031-5/O-11　定价：2.35元

前　言

1. 分析力学的历史和现状

分析力学是应生产的要求而产生并随生产的发展而发展起来的。18世纪以来，由于机械工业的大发展，提出了大量新的力学问题。这些问题的主要特点是需要处理由互相约束的许多物体所组成的物体系统。分析力学就是在解决这些问题的过程中发展起来的。法国学者拉格朗日(Lagrange)于1788年发表了名著“Mécanique Analytique”(分析力学)，从而奠定了分析力学的基础。英国学者哈密顿(Hamilton)于1834年提出哈密顿原理和哈密顿正则方程，把分析力学推向前进。分析力学继承了以前力学发展的成果，给出解决力学问题的统一观点和方法，它开辟了解决受约束的物体以及更复杂的物体系的运动和平衡问题的新途径，从而把理论力学推向新的阶段。1894年，德国学者赫兹(Hertz)第一次提出把约束和系统分为完整的和非完整的两大类，从而开辟了非完整系统分析力学的新纪元。分析力学的这一分支已获得很多成果，但是还存在着不少问题有待人们去解决。近年来，由于科学技术的高速发展，建立了许多新学科，如宇宙力学，自动控制，运动和过程的控制理论，一般链式系统（人体模型、操纵器、链系等）理论等，这些新学科都与分析力学密切相关，互相渗透。可以相信，随着生产的发展，分析力学将会有广阔的前景。

2. 分析力学的内容，它与其它学科的联系

分析力学的基本内容是阐述力学的普遍原理，由这些原理导出基本运动微分方程，并研究这些方程本身以及它们的积分方法。

我们常常把理论力学理解为静力学、运动学、点和系统的动力学三大部分。它是以牛顿定律为基础的。

分析力学与理论力学的不同点在于：从研究方法上看，理论力学主要是采用数学中的几何法，而分析力学主要采用的是数学中的分析法；从研究观点上看，理论力学侧重于力，而分析力学侧重于能量。

由于分析力学以普遍的力学变分原理来建立系统的运动方程，它具有高度的统一性与普遍性，特别有利于处蒲受约束非自由质点系问题，并便于扩展到其他学科的领域中去。

分析力学不仅可用于研究质点、刚体与质点系的平衡与运动，而且可用于研究连续介质（固体及流体）力学。

分析力学还广泛用于工程技术领域，如宇宙力学、自动控制、运动和过程的控制理论、一般链式系统理论等许多近代学科。

本书初稿在北京工业学院多次付印使用，并为不少兄弟院校采纳。在教学实践的基础上，这次又作了修改。改写时力图既强调分析力学的基本理论又强调分析力学的基本方法；既照顾到全面又照顾到重点；既考虑到经典问题又考虑到某些近代问题。这些，也是本书的特点。

本书共分九章。前三章是基础部分：第一章除介绍到约束、广义坐标、虚位移、约束反力、理想约束等基本概念

外，还讨论了实位移处于虚位移中的充要条件，并提出了作者自己的观点。第二章介绍虚位移原理与分析静力学，用大量例题说明虚位移原理的各种应用。第三章是达朗伯原理和动力学普遍方程。第四章和第五章介绍拉格朗日力学。第四章是拉格朗日方程及其积分理论。第五章介绍了拉格朗日方程的各种专门应用，其中对变质量系统、带参数约束的系统、包含伺服约束的系统等的应用还是比较新的内容，特别是关于拉格朗日力学的逆问题更是近十年来引人注目的研究课题。第六章介绍尼尔森方程。尼尔森方程与拉格朗日方程一样也是建立完整系统广义坐标中的动力学微分方程的规则。第七章介绍哈密顿力学的基本内容，包括正则方程、泊松定理、哈密顿——雅科比方法、正则变换等。第八章介绍力学的变分原理，特别对哈密顿原理的近代说法进行了详尽的讨论。第九章是非完整系统力学初步，除介绍罗兹方程、阿沛尔方程外，还讲了查浦雷金方程和广义尼尔森方程。

本书可作理工科院校力学专业或其它有关专业大学生及研究生的教材。课时约 40 学时。带星号的章节可为研究生讲授。本书也可作有关教师和科研人员、工程技术人员的参考书。

作者在写作中曾与北京工业学院理论力学教研室的同志们进行了有益的讨论并得到他们的大力支持，特别是讲授过这门课的胡助教授、褚亦清教授和刘恩远同志，他们积累的丰富教学经验，作者力图在本书中加以吸收。本书承西安交通大学理论力学教研室许庆余副教授审阅，并提出了很好的意见，特此一并致谢。

限于作者水平，本书难免有疏漏之处，恳切希望读者指正。

作 者

1985年4月

目　　录

第五章　拉格朗日方程的应用

第六章　尼尔森方程*

第七章　哈密顿正则方程及其积分方法

第八章　力学的变分原理

第九章　非完整系统力学初步*

第一章　分析力学的基本概念

分析力学的全部定理和方程都起源于某些基本概念，如约束、虚位移等。

第一节　约束、约束的分类

1. 约　束

我们研究一质点系相对于某个惯性坐标系的运动。对系统的点的位置和速度，常事先加上一些几何的或者运动学特性的限制，这些限制称为约束。

例如，火车被限制在铁轨上运动，火车的轨迹是事先给定的，铁轨是火车的约束。又如，枪弹在出枪口之前被限制在枪膛内运动，枪膛是枪弹的约束。但是，不能认为枪弹出了枪膛以后被约束在抛物线上运动。这是因为枪弹在膛外的轨迹是通过动力学关系与初始条件得到的，并非事先给定的。

限制刚体内任意两点间的距离保持不变是约束；限制质点只能在事先给定的某一曲线上运动是约束；限制圆球在粗糙水平面上无滑动地滚动是约束，等等。

受有约束的系统称为非自由系统。反之，没有约束的系统称为自由系统。在同样的主动力作用下，非自由系统与自由系统相比较，加于系统各点上的约束限制了系统的某些可能的运动。自由系统在主动力作用下可在空间中任意运动。

由约束所加的限制对于实际问题和各种技术领域具有专门的用途。例如，可控力学系统本身就是带有制约给定运动状态的确定的约束系统，而用相应的控制装置来实现这种约束便是技术问题。

必须注意，当系统运动时，不论作用于其上的力以及运动的初始条件如何，约束关系都必须得到满足。

2. 约束方程

一般的约束条件都可用约束方程或约束不等式来表达。怎样根据条件写出具体的约束方程呢？这就要利用几何学和运动学知识，写出具体的数学表达式。

例1. 两个质点用长为 l 的刚性杆相联结。若设两质点在空间某固定直角坐标系中的坐标分别为(x_1, y_1, z_1)及(x_2, y_2, z_2)，则表达其间距离为常值 l 的约束方程为

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-l^2=0 \quad (1\text{-}1)$$

这是加在点的位置上的几何限制。不论作用于系统的力如何，也不管运动的初始条件怎样，(1-1)都必须得到满足。

例2. 两个质点用变长度 $l=f(t)$的杆相联结。

类似于例 1，约束方程为

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-f^2(t)=0 \quad (1\text{-}2)$$

其中 $f(t)$ 为时间 t 的已给函数 。这是加在点的位置上的几何限制。(1-2)不同于(1-1)的，仅在于不同时刻，两点间距离不同而已。

例3. 两个质点在半径为R的固定球面上运动，两点间距离保持为常值。

以固定球面中心为原点，取一固定直角坐标系，两质点的坐标分别为(x_1, y_1, z_1)及(x_2, y_2, z_2)，则两点间距离保持

为常值 l 的条件为

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-l^2=0 \qquad (1-3)$$

而两点在半径为 R 的固定球面上的条件分别为

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2-R^2=0 \qquad (1-4)$$

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2-R^2=0 \qquad (1-5)$$

方程(1-3)、(1-4)及(1-5)就是加于这系统的点的位置上的三条几何限制。

例4. 平面上两质点由一长度为 l 的刚性杆联结，运动中杆中点的速度只可以沿着杆向（如冰刀在冰面上的运动）(图1-1)。因而约束方程可表为

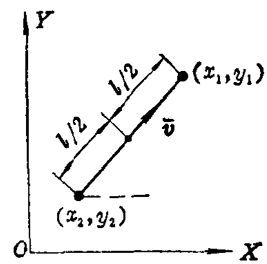

图 1-1

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-l^2=0 \qquad (1-6)$$

$$\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{x_1-x_2}=\frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{y_1-y_2} \qquad (1-7)$$

3. 约束的分类

当应用基本原理推导运动微分方程时，约束本身的性质有极大的影响，不仅系统运动的形式，而且研究运动时选取的方法等都要看约束的性质。可按各种特征将约束分类，例如分为单面与双面，完整与非完整，稳定与不稳定，线性与非线性，一阶与高阶，理想与不理想等等。

(1) 单面约束与双面约束

在约束方程中用严格的等号表示的约束称为双面约束（也叫固执约束）。例如(1-1)、(1-2)、(1-3)、(1-4)、(1-5)、(1-6)、(1-7)都是双面约束。所谓双面约束是指点在

两个方面都受到限制的约束。例如，约束 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 表明，质点在每一时刻都在半径为 R 的球面上，既不能跑到球面的外部，也不能跑到球面的内部。质点好象处于两个无限接近的球面之间，在两个方面都受到限制。

反之，用不等号表示的约束称为单面约束（也叫非固执约束）。因此，单面约束表明，点或者处于曲面上；或者在一个方面离开曲面。例如，约束 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 表明，点或者在半径为 R 的球面上，或者向球的内部移动，但不能跑到球的外部。

今后，我们主要研究双面约束。

(2) 完整约束与非完整约束

一、在力学系统中，其方程用坐标 x_i，y_i，$z_i(i=1,2,\cdots,N)$ 及时间 t 的解析方程或有限方程（非微分方程）来表示的约束叫完整约束。例如，(1-1)、(1-2)、(1-3)、(1-4)、(1-5)、(1-6)都是完整约束。完整约束方程的一般形式为

$$F_\alpha(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\cdots,x_N,y_N,z_N,t)=0$$
$$(\alpha=1,2,\cdots,l<3N) \tag{1-8}$$

当存在完整约束(1-8)时，系统不能在每一时刻在空间取任意位置。完整约束是在时刻 t 加在系统可能位置上的限制。

二、如果约束方程是用坐标的不可积分的微分方程来表示的，即方程中不仅包含坐标而且还包含其对时间的导数，则叫非完整约束（也有人叫不完整或非全定约束）。例如，(1-7)就是非完整约束。又如，约束方程

$$\dot{z}e^x-\dot{y}=0 \tag{1-9}$$

是关于 x,y,z 的微分方程，它在一般情形中是不能积分的，因此是非完整约束。

非完整约束方程的一般形式为

$$\Phi_\beta(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_N,y_N,z_N,\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\cdots,\dot{x}_N,\dot{y}_N,\dot{z}_N,t)=0$$

$$(\beta=1,2,\cdots,g<3N) \tag{1-10}$$

方程(1-10)的不可积性在于，它的左边不能成为某个仅是坐标函数的全微分。

当系统有形如(1-10)的不可积分的微分约束时，在任意时刻 t，系统可在空间取任意位置，但点的速度就不是任意的了。非完整约束是对质点、速度所加的限制。例如，约束(1-9)是对速度 $\dot{y}$、$\dot{z}$ 的限制，但坐标 x、y，z 可任意选取。

如果在约束(1-10)中，函数 Φ_β 相对 $\dot{x}_1,\dot{y}_1,\cdots,\dot{z}_N$ 是线性的，则称为线性非完整约束；否则，称为非线性非完整约束。线性非完整约束形如

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{\beta i}\dot{x}_i+b_{\beta i}\dot{y}_i+c_{\beta i}\dot{z}_i)+d_\beta=0 \tag{1-11}$$

$$(\beta=1,2,\cdots,g)$$

其中系数 $a_{\beta i},b_{\beta i},c_{\beta i},d_\beta$ 是坐标及时间的函数。如(1-7)、(1-9)都是线性非完整约束。

三、在完整约束与非完整约束之间有一种约束，这种约束也是用微分方程来表示的，但是这微分方程是可积分的。这种约束可归结为包含积分常数的有限关系式。例如，约束

$$x\dot{x}+y\dot{y}-\dot{z}=0 \tag{1-12}$$

它也是微分方程，但可积分。此方程有解

$$2z=x^2+y^2+e$$

其中 e 为积分常数，它表示一族双曲抛物面，其鞍点在 z 轴上。

这种以微分形式表示但可积分的约束称为半完整约束。

四、非完整约束又有一阶与高阶之分。如果非完整约束方程中仅有速度而无加速度和坐标对时间的更高阶导数，则称为一阶非完整约束。如约束(1-7)、(1-9)、(1-12)都是一阶非完整约束。

反之，如果约束方程中不仅出现速度而且还有加速度或坐标对时间的更高阶导数，则称为高阶非完整约束*。此时，对约束的定义应给予扩充。

今后，我们主要研究完整约束。

(3) 稳定约束与不稳定约束**

约束可分为依赖于时间的约束和不依赖于时间的约束。如果时间 t 不明显地出现于约束方程中，则称稳定约束。反之，如果时间 t 明显地出现于约束方程中，则称为不稳定约束。

例如，约束

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1-13}$$

是稳定约束。它表示点在半轴长为 a、b、c 的固定椭球面上。

约束

$$\frac{x^2}{a^2t^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1-14}$$

是不稳定约束。这一约束表明，点在运动过程中保持在椭球面上，但此椭球面的一个轴随时间 t 改变自己的量值，亦即点在变形的椭球面上。

约束

$$(x-5t)^2+y^2+z^2=R^2 \tag{1-15}$$

---

* 参考文献[36]

** 有的书上称为“定常约束”与“非定常约束”。