力学丛书

李群和李代数对约束力学系统的应用

梅凤翔 著

科学出版社

力学丛书

李群和李代数对约束力学系统的应用

梅凤翔 著

科学出版社

1999

内 容 简 介

本书全面系统论述李群和李代数对约束力学系统——完整约束系统、非完整约束系统和 Birkhoff 系统的应用. 用李代数和李容许代数统一描述各类约束力学系统的运动微分方程,并建立 Poisson 积分理论. 用李群研究各类约束系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性,并建立对称性与守恒量之间的关系.

图书在版编目(CIP)数据

李群和李代数对约束力学系统的应用/梅凤翔著. - 北京:科学出版社,1999

(力学丛书)

ISBN 7-03-007514-5

Ⅰ. 李…　Ⅱ. 梅…　Ⅲ. ①李群-应用-约束力②李代数-应用-约束力　Ⅳ. O3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 11969 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

科地亚印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1999 年 11 月第 一 版	开本:850×1168 1/32
1999 年 11 月第一次印刷	印张:16 5/8
印数:1—2 000	字数:428 000

定价: 36.00 元

前　言

学科的交叉与渗透是当代科学发展的一个显著特点.力学与数学,力学与物理学,历史上是分不开的,近代又走到一起来了.对此当代著名科学家都有精湛的论述.IUTAM 前主席、工程出身的 Koiter 指出,要想使力学进步,一定要用更加抽象更加精密的数学.Arnold V.I. 写道:“很多数学方法和概念都在经典力学中得到应用,如微分方程和相流,光滑映射和流形,李群和李代数,辛几何和各态历经理论”.我国著名科学家钱伟长先生多次指出,数学是汪洋大海,搞应用数学和力学的要善于大海捞针.本书致力于力学与数学的交缘,按林同骥先生的提法,当属“数学力学”新分支.

本书所论约束力学系统,包括通常理解的完整约束系统和非完整约束系统,以及新近认识的约束系统——Birkhoff 系统.

本书写作的第一个基本思想是用李代数和李容许代数统一描述各类约束力学系统,进而建立系统的 Poisson 积分理论.

对称性原理是物理学中更高层次的法则.寻求力学系统的守恒量问题,不仅在数学上有重要意义,而且反映深刻的物理本质.对称性与守恒量之间有潜在关系.近代寻求守恒量主要有两种方法:Noether 对称性与 Lie 对称性.本书写作的第二个基本思想是用李群研究各类约束力学系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性,进而找到与对称性相应的守恒量,最后研究两种对称性之间的关系.

本书内容共十章.第一、第二两章侧重李代数和李容许代数对约束力学系统的应用.第三章至第六章侧重 Noether 理论的应用.第七章至第九章侧重李理论的应用.第十章研究 Noether 对称性与 Lie 对称性之间的关系.

第一章,约束力学系统运动方程的 Lie 代数结构.研究具有 Lie 代数结构的各类约束系统,包括 Lagrange 系统,Hamilton 系

统,特殊非完整系统,Poincaré-Chetaev 方程系统,广义经典力学系统,广义 Hamilton 系统,以及自治和半自治 Birkhoff 系统.将经典 Poisson 积分理论推广并应用于这些系统.

第二章,约束力学系统运动方程的 Lie 容许代数结构.研究具有 Lie 容许代数结构的各类约束系统,包括一般完整力学系统,Chaplygin 系统,一般非完整系统,非自治 Birkhoff 系统,以及一般约束 Birkhoff 系统.将经典 Poisson 积分理论推广并应用于这些系统的积分.

第三章,约束力学系统的 Noether 对称性(Ⅰ).从 Hamilton 作用量在无限小群变换下的不变性出发,建立 Hamilton 系统,Lagrange 系统,广义坐标和准坐标下的完整力学系统,有多余坐标的完整系统,变质量完整系统,事件空间动力学系统,相对运动动力学系统,Chetaev 型非完整系统,以及非 Chetaev 型非完整系统的 Noether 理论,包括 Noether 定理和逆定理的各种推广和应用.

第四章,约束力学系统的 Noether 对称性(Ⅱ).以 Pfaff 作用量代替 Hamilton 作用量,研究 Pfaff 作用量在无限小群变换下的不变性,给出自由 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统的 Noether 理论.

第五章,约束力学系统的 Noether 对称性(Ⅲ).从微分变分原理——D'Alembert-Lagrange 原理,Jourdain 原理,Gauss 原理,万有 D'Alembert 原理出发,研究它们在无限小群变换下的不变性,建立各类完整系统和非完整系统的 Noether 理论.

第六章,约束力学系统的 Noether 理论(Ⅳ).从目前已知最普遍的微分变分原理——Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理出发,研究它在无限小群变换下的性质,建立自由 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统的 Noether 理论.

第七章,完整约束力学系统的 Lie 对称性.从微分方程在无限小群变换下不变性的 Lie 理论出发,研究各类完整力学系统 Lie 对称性与守恒量的两类问题——由 Lie 对称性求守恒量的正问题,以及由守恒量求 Lie 对称性的逆问题,包括 Lagrange 系统,

Hamilton 系统,广义坐标和准坐标下的完整系统,有多余坐标的完整系统,变质量完整系统,事件空间动力学,相对运动动力学系统,以及奇异 Lagrange 系统等.

第八章,非完整约束力学系统的 Lie 对称性.将 Lie 理论应用于各类非完整系统,包括广义坐标和准坐标下的非完整系统,变质量非完整系统,事件空间中非完整系统,非完整相对运动动力学系统,高阶非完整系统,非 Chetaev 非完整系统,以及具有可积微分约束系统.

第九章,Birkhoff 系统的 Lie 对称性.将 Lie 理论应用于自由 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统,并研究约束对 Lie 对称性的限制.

第十章,约束力学系统 Noether 对称性与 Lie 对称性之间的关系.研究 Lagrange 系统,Hamilton 系统,一般完整系统,非完整系统,Birkhoff 系统,以及约束 Birkhoff 系统两种对称性之间的关系.

本书初稿成于 1996 年春天,第二稿成于 1997 年春天,这两稿曾作为在北京理工大学为博士研究生和访问学者开设课程的教材.本书是在那两次教学实践基础上改写的第三稿.作者感谢博士生吴惠彬、朱海平、郭永新、杨明炎、吴润衡、尚玫、张毅、陈向炜、张睿超、郑改华、贾艳华和访问学者刘荣万副教授、傅景礼副教授、梁景辉副教授、李元成副教授等提出的有益建议,感谢北京理工大学张永发教授、史荣昌教授、湖南大学赵跃宇教授以及其他同仁的鼓励.作者深深感谢北京工业大学李子平教授和北京航空航天大学陆启韶教授的大力推荐.同时,作者深深感谢中国科学院科学出版基金的有力资助,国家自然科学基金委员会的支持,以及北京理工大学出版社出版基金的支持.限于水平,书中疏漏之处恳请读者指正.

作者　1999 年春天

目　　录

前　言 …………………………………………………………………… (xv)
第一章　约束力学系统运动方程的 Lie 代数结构 …………… (1)
§1.1　代数基本概念 ……………………………………………… (1)
§1.2　Lagrange 系统和 Hamilton 系统的代数结构 …………… (3)
1.2.1　Lagrange 系统的运动方程 ……………………………… (3)
1.2.2　Hamilton 系统的运动方程 ……………………………… (5)
1.2.3　系统的代数结构 …………………………………………… (7)
1.2.4　系统的 Poisson 理论 ……………………………………… (9)
1.2.5　算　例 ……………………………………………………… (9)
§1.3　特殊非完整系统运动方程的代数结构 ………………… (12)
1.3.1　特殊非完整系统的运动方程 …………………………… (12)
1.3.2　特殊非完整系统运动方程的代数结构 ………………… (15)
1.3.3　特殊非完整系统的 Poisson 理论 ……………………… (15)
1.3.4　算　例 ……………………………………………………… (16)
§1.4　Poincaré-Chetaev 方程的代数结构 ……………………… (20)
1.4.1　Poincaré-Chetaev 方程 …………………………………… (20)
1.4.2　Poincaré-Chetaev 方程的代数结构 ……………………… (23)
1.4.3　Poincaré-Chetaev 方程的 Poisson 理论 ………………… (24)
1.4.4　算　例 ……………………………………………………… (25)
§1.5　广义经典力学系统的代数结构 ………………………… (30)
1.5.1　广义经典力学的方程 ……………………………………… (30)
1.5.2　广义经典力学系统方程的代数结构 …………………… (31)
1.5.3　广义经典力学的 Poisson 理论 ………………………… (32)
1.5.4　算　例 ……………………………………………………… (32)
§1.6　广义 Hamilton 系统的代数结构 ………………………… (34)
1.6.1　广义 Poisson 括号 ………………………………………… (34)
1.6.2　广义 Hamilton 系统的运动方程 ………………………… (35)

1.6.3　广义 Hamilton 系统的 Poisson 理论 …………………… (35)
1.6.4　算　例 ………………………………………………………… (36)
1.6.5　Nambu 力学 …………………………………………………… (38)
§1.7　自治和半自治 Birkhoff 系统的代数结构 ………… (39)
1.7.1　Birkhoff 方程 ……………………………………………… (40)
1.7.2　自治和半自治 Birkhoff 系统的代数结构 ……………… (41)
1.7.3　自治和半自治 Birkhoff 系统的 Poisson 理论 ………… (42)
1.7.4　算　例 ………………………………………………………… (44)
习题 ……………………………………………………………………… (46)
参考文献 ………………………………………………………………… (47)
第二章　约束力学系统运动方程的 Lie 容许代数结构 ……… (49)
§2.1　一般完整力学系统的代数结构 ……………………… (49)
2.1.1　运动方程的逆变代数形式 ……………………………… (49)
2.1.2　方程具有相容代数结构 ………………………………… (50)
2.1.3　方程具有 Lie 代数结构的条件 ………………………… (51)
2.1.4　方程具有 Lie 容许代数结构 …………………………… (51)
2.1.5　系统的 Poisson 理论 ……………………………………… (52)
2.1.6　算　例 ………………………………………………………… (54)
§2.2　Chaplygin 方程的代数结构 …………………………… (56)
2.2.1　Chaplygin 方程的两种形式 ……………………………… (57)
2.2.2　Chaplygin 方程的代数表示 ……………………………… (58)
2.2.3　Chaplygin 方程的 Poisson 理论 ………………………… (63)
2.2.4 算　例 ………………………………………………………… (64)
§2.3　一般非完整力学系统的代数结构 …………………… (67)
2.3.1　一般非完整系统的运动方程 …………………………… (67)
2.3.2　运动方程的代数结构 …………………………………… (68)
2.3.3　系统的 Poisson 理论 ……………………………………… (69)
2.3.4　算　例 ………………………………………………………… (70)
§2.4　非自治 Birkhoff 系统的代数结构 …………………… (73)
2.4.1　非自治 Birkhoff 系统的运动方程 ……………………… (73)
2.4.2　非自治 Birkhoff 系统的代数结构 ……………………… (74)
2.4.3　非自治 Birkhoff 系统的 Poisson 理论 ………………… (75)

2.4.4 算　例 …………………………………………………… (76)
§2.5 约束 Birkhoff 系统的代数结构 …………………… (77)
2.5.1 约束 Birkhoff 系统的运动方程 …………………… (77)
2.5.2 约束 Birkhoff 系统的代数结构 …………………… (80)
2.5.3 约束 Birkhoff 系统的 Poisson 理论 ………………… (82)
2.5.4 算　例 …………………………………………………… (84)
习题 …………………………………………………………… (88)
参考文献 ………………………………………………………… (89)
第三章　约束力学系统的 Noether 对称性(I) ……………… (90)
§3.1 Hamilton 作用量与 Noether 对称性 ……………… (90)
3.1.1 Hamilton 作用量的变分 ……………………………… (91)
3.1.2 Noether 对称变换,准对称变换和广义准对称变换 ……………………………………………………………… (92)
3.1.3 Killing 方程 ……………………………………………… (96)
3.1.4 算　例 …………………………………………………… (98)
§3.2 Lagrange 系统的 Noether 理论 …………………… (101)
3.2.1 Lagrange 系统的运动方程 ………………………… (101)
3.2.2 Lagrange 系统的 Noether 定理 …………………… (102)
3.2.3 Lagrange 系统的 Noether 逆定理 ………………… (103)
3.2.4 力学中基本守恒定律的推导 ……………………… (105)
3.2.5 算　例 …………………………………………………… (106)
§3.3 Hamilton 系统的 Noether 理论 …………………… (113)
3.3.1 相空间中 Hamilton 作用量的变分 ………………… (113)
3.3.2 相空间中 Noether 对称变换,准对称变换和广义准对称变换 ……………………………………………………… (114)
3.3.3 Killing 方程 ……………………………………………… (117)
3.3.4 Hamilton 系统的 Noether 定理 …………………… (119)
3.3.5 Hamilton 系统的 Noether 逆定理 ………………… (120)
3.3.6 算　例 …………………………………………………… (121)
§3.4 广义坐标下一般完整系统的 Noether 理论 …… (125)
3.4.1 系统的运动方程 ………………………………………… (126)
3.4.2 广义 Noether 定理 …………………………………… (126)

3.4.3 广义 Noether 逆定理 …………………………………… (127)
3.4.4 算 例…………………………………………………… (128)
§3.5 准坐标下一般完整系统的 Noether 理论 ……… (132)
3.5.1 准坐标下 Hamilton 作用量的变分 ………………… (132)
3.5.2 Noether 对称变换、准对称变换和广义准对称变换
………………………………………………………… (134)
3.5.3 广义 Killing 方程 ……………………………………… (139)
3.5.4 Noether 定理 …………………………………………… (141)
3.5.5 Noether 逆定理 ………………………………………… (142)
3.5.6 算 例…………………………………………………… (143)
§3.6 有多余坐标完整系统的 Noether 理论 ………… (146)
3.6.1 有多余坐标完整系统的运动方程…………………… (147)
3.6.2 有多余坐标时 Hamilton 作用量的变分 …………… (147)
3.6.3 有多余坐标时的对称变换、准对称变换和广义准对
称变换……………………………………………… (148)
3.6.4 有多余坐标系统的广义 Noether 定理 …………… (151)
3.6.5 有多余坐标系统的广义 Noether 逆定理 ………… (152)
3.6.6 算 例…………………………………………………… (153)
§3.7 变质量完整系统的 Noether 理论………………… (155)
3.7.1 变质量完整系统的运动方程………………………… (155)
3.7.2 变质量完整系统的广义准对称变换………………… (156)
3.7.3 广义 Killing 方程 ……………………………………… (157)
3.7.4 广义 Noether 定理 …………………………………… (158)
3.7.5 广义 Noether 逆定理 ………………………………… (159)
3.7.6 算 例…………………………………………………… (160)
§3.8 事件空间完整系统的 Noether 理论……………… (162)
3.8.1 事件空间中完整系统的运动方程…………………… (162)
3.8.2 事件空间中 Hamilton 作用量的变分 ……………… (163)
3.8.3 事件空间中对称变换、准对称变换和广义准对称变换
………………………………………………………… (164)
3.8.4 广义 Killing 方程 ……………………………………… (167)
3.8.5 广义 Noether 定理 …………………………………… (168)

3.8.6 广义 Noether 逆定理 …………………………………… (169)
3.8.7 算 例……………………………………………………… (170)
§3.9 相对运动动力学系统的 Noether 理论 ………… (172)
3.9.1 相对运动动力学方程…………………………………… (172)
3.9.2 相对运动动力学的广义 Noether 定理 ……………… (173)
3.9.3 相对运动动力学的广义 Noether 逆定理 …………… (174)
3.9.4 算 例……………………………………………………… (176)
§3.10 Chetaev 型非完整系统的 Noether 理论 ……… (178)
3.10.1 Chetaev 型非完整系统的运动方程………………… (178)
3.10.2 相应完整系统的 Noether 理论 …………………… (179)
3.10.3 非完整系统的广义 Noether 定理 ………………… (179)
3.10.4 非完整系统的广义 Noether 逆定理 ……………… (181)
3.10.5 非完整系统与相应完整系统的 Noether 对称性
…………………………………………………………… (182)
3.10.6 算 例 …………………………………………………… (183)
§3.11 非 Chetaev 型非完整系统的 Noether 理论
……………………………………………………………… (189)
3.11.1 非 Chetaev 型非完整系统的运动方程 …………… (189)
3.11.2 相应完整系统的 Noether 理论 …………………… (190)
3.11.3 非完整系统的广义 Noether 定理 ………………… (191)
3.11.4 非完整系统的广义 Noether 逆定理 ……………… (192)
3.11.5 非完整系统与相应完整系统的 Noether 对称性
…………………………………………………………… (193)
3.11.6 算 例 …………………………………………………… (194)
习题 ………………………………………………………………… (196)
参考文献 …………………………………………………………… (198)
第四章 约束力学系统的 Noether 对称性(Ⅱ) ……………… (200)
§4.1 Pfaff 作用量与 Noether 对称性…………………… (200)
4.1.1 Pfaff 作用量的变分 …………………………………… (200)
4.1.2 对称变换,准对称变换和广义准对称变换 ………… (202)
4.1.3 广义 Killing 方程 ……………………………………… (206)
4.1.4 算 例……………………………………………………… (207)

§4.2 自由 Birkhoff 系统的 Noether 理论 …… (210)
4.2.1 自由 Birkhoff 系统的运动方程 …… (210)
4.2.2 广义 Noether 定理 …… (210)
4.2.3 广义 Noether 逆定理 …… (211)
4.2.4 算 例 …… (213)
§4.3 约束 Birkhoff 系统的 Noether 理论 …… (217)
4.3.1 约束 Birkhoff 系统的运动方程 …… (217)
4.3.2 相应自由系统的 Noether 理论 …… (218)
4.3.3 约束 Birkhoff 系统的广义 Noether 定理 …… (219)
4.3.4 约束 Birkhoff 系统的广义 Noether 逆定理 …… (220)
4.3.5 约束 Birkhoff 系统与相应自由 Birkhoff 系统的对称性 …… (222)
4.3.6 算 例 …… (222)
习题 …… (226)
参考文献 …… (227)
第五章 约束力学系统的 Noether 对称性(Ⅲ) …… (228)
§5.1 微分变分原理 …… (228)
5.1.1 D'Alembert-Lagrange 原理 …… (228)
5.1.2 Jourdain 原理 …… (229)
5.1.3 Gauss 原理 …… (230)
5.1.4 万有 D'Alembert 原理 …… (230)
§5.2 非等时变分 …… (231)
5.2.1 Lagrange 非等时变分 …… (232)
5.2.2 Jourdain 非等时变分 …… (233)
5.2.3 Gauss 非等时变分 …… (234)
5.2.4 Dolaptchiew 非等时变分 …… (235)
§5.3 基于 D'Alembert-Lagrange 原理的守恒量 …… (237)
5.3.1 D'Alembert-Lagrange 原理不变性条件 …… (237)
5.3.2 完整系统的守恒量 …… (238)
5.3.3 非完整系统的守恒量 …… (240)
5.3.4 算 例 …… (242)
§5.4 基于 Jourdain 原理的守恒量 …… (246)

5.4.1 Jourdain 原理不变性条件 …………………………… (246)
5.4.2 完整系统的守恒量…………………………………… (247)
5.4.3 非完整系统的守恒量………………………………… (247)
5.4.4 算 例………………………………………………… (250)
§5.5 基于 Gauss 原理的守恒量 ……………………… (254)
5.5.1 Gauss 原理不变性条件 ……………………………… (254)
5.5.2 完整系统的守恒量…………………………………… (255)
5.5.3 非完整系统的守恒量………………………………… (256)
5.5.4 算 例………………………………………………… (257)
§5.6 基于万有 D'Alembert 原理的守恒量 ……………… (260)
5.6.1 万有 D'Alembert 原理不变性条件 ………………… (260)
5.6.2 完整系统的守恒量…………………………………… (260)
5.6.3 非完整系统的守恒量………………………………… (261)
5.6.4 算 例………………………………………………… (262)
习题 ……………………………………………………………… (263)
参考文献 ………………………………………………………… (264)
第六章 约束力学系统的 Noether 对称性(Ⅳ) ………………… (266)
§6.1 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理 ……………………… (266)
6.1.1 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理的建立 ……………… (266)
6.1.2 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理的应用 ……………… (267)
6.1.3 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理与 D'Alembert-Lagrange 原理…………………………………………………… (267)
§6.2 非等时变分 ……………………………………………… (268)
6.2.1 等时变分……………………………………………… (269)
6.2.2 非等时变分…………………………………………… (269)
6.2.3 无限小变换的生成元………………………………… (269)
§6.3 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理的不变性条件 ………………………………………………………………… (270)
6.3.1 用生成元表示的等时变分…………………………… (270)
6.3.2 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理的变形 ……………… (270)
§6.4 自由 Birkhoff 系统的守恒量 ………………………… (271)
6.4.1 守恒量的存在条件和形式…………………………… (271)

6.4.2 广义 Killing 方程 …………………………………………… (272)
6.4.3 算 例……………………………………………………… (273)
§6.5 约束 Birkhoff 系统的守恒量 ……………………………… (276)
6.5.1 约束对生成元的限制条件………………………………… (276)
6.5.2 相应自由系统的守恒量…………………………………… (276)
6.5.3 约束 Birkhoff 系统的守恒量 …………………………… (277)
6.5.4 算 例……………………………………………………… (277)
习题 ………………………………………………………………… (279)
参考文献 …………………………………………………………… (280)
第七章 完整约束力学的 Lie 对称性……………………………… (281)
§7.1 Lie 变换群和无限小变换 ………………………………… (281)
7.1.1 Lie 变换群 ……………………………………………… (281)
7.1.2 无限小变换………………………………………………… (283)
7.1.3 多参数 Lie 变换群和 Lie 代数 ………………………… (286)
§7.2 常微分方程的不变性 ……………………………………… (290)
7.2.1 一阶常微分方程的不变性………………………………… (290)
7.2.2 二阶常微分方程的不变性………………………………… (296)
§7.3 Lagrange 系统的 Lie 对称性 …………………………… (303)
7.3.1 Lagrange 系统的运动方程 ……………………………… (303)
7.3.2 无限小变换与生成元……………………………………… (303)
7.3.3 微分方程不变性的无限小判据…………………………… (304)
7.3.4 系统的结构方程和守恒量………………………………… (306)
7.3.5 Lie 对称性逆问题 ………………………………………… (307)
7.3.6 算 例……………………………………………………… (309)
§7.4 Hamilton 系统的 Lie 对称性 …………………………… (319)
7.4.1 Hamilton 方程 …………………………………………… (319)
7.4.2 变换群与生成元…………………………………………… (319)
7.4.3 Lie 对称性的确定方程 …………………………………… (320)
7.4.4 结构方程与守恒量………………………………………… (320)
7.4.5 Lie 对称性逆问题 ………………………………………… (321)
7.4.6 算 例……………………………………………………… (323)
§7.5 广义坐标下一般完整系统的 Lie 对称性 ……… (326)

7.5.1 系统的运动方程……………………………………(326)
7.5.2 无限小群变换与 Lie 对称性确定方程 ………………(327)
7.5.3 结构方程与守恒量……………………………………(328)
7.5.4 Lie 对称性逆问题 ……………………………………(329)
7.5.5 算 例……………………………………………(330)
§7.6 准坐标下一般完整系统的 Lie 对称性 …………(333)
7.6.1 系统的运动方程……………………………………(333)
7.6.2 无限小变换与生成元…………………………………(334)
7.6.3 Lie 对称性的确定方程 ………………………………(334)
7.6.4 结构方程与守恒量……………………………………(335)
7.6.5 Lie 对称性逆问题 ……………………………………(336)
7.6.6 算 例……………………………………………(337)
§7.7 有多余坐标完整力学系统的 Lie 对称性 ………(341)
7.7.1 系统的运动方程……………………………………(341)
7.7.2 无限小群变换和确定方程……………………………(342)
7.7.3 限制方程……………………………………………(343)
7.7.4 结构方程与守恒量……………………………………(344)
7.7.5 Lie 对称性逆问题 ……………………………………(345)
7.7.6 算 例……………………………………………(347)
§7.8 变质量完整力学系统的 Lie 对称性 ……………(349)
7.8.1 系统的运动方程……………………………………(349)
7.8.2 无限小变换与确定方程………………………………(350)
7.8.3 结构方程与守恒量……………………………………(351)
7.8.4 Lie 对称性逆问题 ……………………………………(352)
7.8.5 算 例……………………………………………(354)
§7.9 事件空间中完整力学系统的 Lie 对称性 ………(356)
7.9.1 系统的运动方程……………………………………(356)
7.9.2 无限小群变换和 Lie 对称性确定方程 ………………(358)
7.9.3 结构方程与守恒量……………………………………(360)
7.9.4 Lie 对称性逆问题 ……………………………………(360)
7.9.5 算 例……………………………………………(361)
§7.10 相对运动动力学系统的 Lie 对称性 ……………(364)

7.10.1 相对运动动力学方程 …………………………………… (364)
7.10.2 无限小群变换与确定方程 ………………………………… (365)
7.10.3 结构方程与守恒量 ………………………………………… (366)
7.10.4 Lie 对称性逆问题………………………………………… (367)
7.10.5 算 例 ……………………………………………………… (368)
§7.11 奇异 Lagrange 系统的 Lie 对称性 …………………… (370)
7.11.1 奇异 Lagrange 系统的运动方程 ………………………… (370)
7.11.2 无限小群变换,确定方程和限制方程…………………… (371)
7.11.3 结构方程与守恒量 ………………………………………… (372)
7.11.4 Lie 对称性逆问题………………………………………… (373)
7.11.5 算 例 ……………………………………………………… (374)
习题 …………………………………………………………………… (377)
参考文献 ……………………………………………………………… (378)
第八章 非完整约束力学系统的 Lie 对称性 ………………… (380)
§8.1 广义坐标下一般非完整系统的 Lie 对称性 …… (380)
8.1.1 一般非完整系统广义坐标中的方程………………… (380)
8.1.2 无限小群变换与 Lie 对称性确定方程 ……………… (381)
8.1.3 限制方程和附加限制方程……………………………… (382)
8.1.4 结构方程与守恒量……………………………………… (383)
8.1.5 Lie 对称性逆问题 ……………………………………… (384)
8.1.6 算 例…………………………………………………… (385)
§8.2 准坐标下非完整系统的 Lie 对称性 …………… (390)
8.2.1 系统的运动方程………………………………………… (390)
8.2.2 无限小群变换和 Lie 对称性确定方程 ……………… (392)
8.2.3 限制方程和附加限制方程……………………………… (392)
8.2.4 结构方程和守恒量……………………………………… (393)
8.2.5 Lie 对称性逆问题 ……………………………………… (394)
8.2.6 算 例…………………………………………………… (396)
§8.3 变质量非完整系统的 Lie 对称性………………… (399)
8.3.1 系统的运动方程………………………………………… (399)
8.3.2 无限小群变换与确定方程……………………………… (400)
8.3.3 限制方程和附加限制方程……………………………… (401)