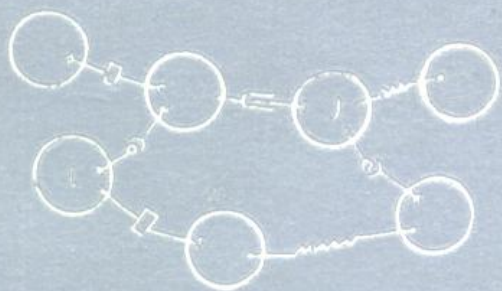


329

多刚体系统动力学

[德] J. 维滕伯格 著

谢传锋 译



北京航空學院出版社

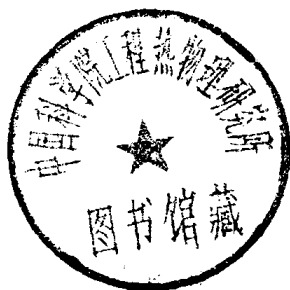


52.133
743

多刚体系统动力学

[德] J·维滕伯格 著

谢传锋 译



北京航空航天大学出版社

√ 101928

内 容 简 介

本书是第一本系统介绍多刚体系统动力学的著作。全书共六章，前四章讨论了刚体力学的基本原理和经典内容，后两章系统地介绍了各类多刚体系统的运动学和动力学的理论和方法，并对编制求解运动方程的计算机程序作了指导。书中还附有结合实际说明性例题和习题。

本书可供大学高年级学生、研究生、教师以及有关的研究人员和工程技术人员参考。

2766/13

Dynamics of Systems of Rigid Bodies Jens Wittenburg

B.G. Teubner Stuttgart 1977

多刚体系统动力学

[德] J. Wittenburg

謝 传 鋒 譯

責任編輯 周士林 陶金福

北京航空学院出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京航空学院印刷厂印装

*

850×1168 1/32 印张：9.5 字数：238千字
1986年7月 第一版 1986年7月第一次印刷 印数：3100册
统一书号：15432·020 定价：1.70元

译 者 的 话

多刚体系统动力学是六十年代发展起来的力学新分支，其理论和研究方法多分散于各种文献之中。本书是第一本系统介绍多刚体系统动力学的著作。翻译出版这本著作旨在给国内日益增长的对这一领域发生兴趣的人员提供一点方便。

本书的内容比较系统，讲述由浅入深，循序渐进，对于有兴趣于这一领域的初学者，不失为一入门的向导。

译者要感谢西北工业大学肖尚彬副教授，他审阅了本书的译稿，并提出了许多宝贵意见。

译者还要感谢在译稿编辑加工和绘图等工作中作出了卓越贡献的周士林、梅冰清、立飞跃、陈明和林宝玖诸同志。

由于译者水平有限，译文中不妥之处在所难免，恳请读者给予指正。

译 者

一九八六年一月于北京

序 言

在本书中，刚体系统指的是任意有限个刚体的组合，它们之间以某种形式的接头相联结，这些接头可以是理想完整约束、非完整约束、定常和（或）非定常约束。典型的例子有太阳系、机器中的机构以及生物体机构，例如每个单独部分都看成是刚体的人体。研究这些系统的动力学需要建立非线性运动方程、能量表达式、运动学关系式以及其它一些量的公式。对于每个系统分别写出这些公式并估计其工作量，例如由拉格朗日方程导出运动方程，是研究这些系统运动的一项必不可少的共同任务。本书的主要目的是详尽叙述如何有效地简化这项工作的过程。这种过程是通用的，过程中提供的数学表达式和数学方程对于任何刚体系统都是有效的。这种过程允许使用者灵活地选择广义坐标。同时，这种过程非常明确，以致把它应用于任何质点系所要作出的说明反而少于几何形体系统。本书适用于高年级学生和研究人员，并试图引起理论和实际工作者的兴趣。

本书六章中的前四章讨论基本原理和经典内容。在第一章中，使读者熟悉矢量和张量的符号表示，由于它们形式简洁，因此应用遍及全书。为了便于从符号书写的方程过渡到标量坐标方程，引进了矢量和张量的坐标矩阵。在这章里还讨论了上述矩阵的变换规则，给出了将矢量——张量混合表示式由符号形式转变为标量坐标形式的方法。为了使符号书写的方程组具有简洁的形式，引入了以矢量和张量作为元的矩阵，并定义了这种矩阵的一般乘法运算规则。

在第二章刚体的运动学中，讨论了方向余弦、欧拉角、布里恩角和欧拉参数，引入了角速度的概念和建立了运动学微分方程。运动学微分方程给出了广义坐标的变化率和角速度的关系。在第三章中讨论了刚体动力学的基本原理。动能和角动量的定义

导致引进惯性张量的概念。刚体动量矩定理的公式是由欧拉原理和达朗伯原理导出的。由于篇幅的严格限制，本章只包含了那些以后各章需要的内容和问题。其它重要问题，例如周期变量和拟坐标都被删去。在第四章中研究了刚体力学的一些经典问题，这些问题都有封闭形式的解。第五章占全书之半，专门介绍刚体系统动力学一般公式的建立。对运动学关系式、非线性运动方程、能量表达式以及其它一些量都进行了讨论，它们对于数值或非数值的研究都是适用的。对于任何刚体系统的统一描述主要在于图论理论概念的应用（在参考文献[1]发表时首次用于力学）。把矩阵同矢量符号和张量符号结合起来的数学工具，很容易给出一些物理量的表达式。公式的可用性已为一些说明性例题所证实。第六章讨论了多体系统与其它系统，或系统内部两个物体之间产生碰撞时的一些现象，求出了碰撞时速度的瞬时变化和物体间接头处的内碰撞冲量。这些研究揭示了刚体动力学与弹性静力学中麦克斯威尔和培第定律的一个有趣的相似关系。

第五章5.2节中第1, 2, 4, 6, 8, 及9小节的材料是作者与R.E.罗伯森教授（加利福尼亚大学·圣地亚哥）亲密合作的成果，1965年以来作者与他在一些概念和结果方面都有不少修改。大量的数学关系式是通过长期的研究得到的，所以它不属于任何个人。这次是个很好的机会来对这次富有成效的合作表示我的感谢。我同样感谢L·里洛夫博士（保加利亚科学院）。在本著作中，我和他进行了亲密的合作。在分析力学应用方法上，他起了指导作用（5.2.8的论题），同时对5.2.5节提出了重要的意见。最后，我还要感谢本书的出版者，因为他们为完成底稿的抄写表现了可敬的耐心。

汉诺威·1977年春

J·维滕伯格

符号表

$[A]$	运动方程中的系数矩阵
$[A]^{ij}, [G_a]$	方向余弦矩阵
b_{ij}, b_{ij}^*	增广体 i 上的矢量
c_{ia}, c_{ia}^*	物体 i 上确定铰点位置的矢量
$[C]$	矢量 c_{ia} 构成的矩阵
d_{ij}, d_{ij}^*	物体 i 上铰点间的矢量
$\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''$	分别为 $\mathbf{r}$ 在基 $[\mathbf{e}^i]$ 、惯性空间和指定基中对时间的导数
$[\mathbf{e}], [\mathbf{e}^i]$	矢量基, 也是基矢量列阵
E	能
$[E]$	单位矩阵
E	单位张量
$\mathbf{F}, \mathbf{F}_i$	力
${}^i\mathbf{F}, {}^i\mathbf{F}_i$	碰撞冲量
$\mathbf{h}$	转子相对载体的角动量
$[H]$	约束方程的雅可比矩阵
$i^+(a), i^-(a)$	整数函数
$J_{\alpha\beta}$	惯性矩与惯性积
$\mathbf{J}, \mathbf{K}_i$	惯性张量
$[J]$	惯性矩阵
$\mathbf{k}_{\alpha i}$	$\partial \mathbf{z}_\alpha / \partial q_{\alpha i}$
$\mathbf{K}_{ij}$	多体系统张量
$[\mathbf{K}]$	张量 $\mathbf{K}_{ij}$ 构成的矩阵
L	拉格朗日函数
$\mathbf{L}$	角动量

m, m_i	质量
M	整个系统的质量
$[m]$	对角质量矩阵
$\mathbf{M}, \mathbf{M}_i$	力矩
$\mathbf{p}_{a i}$	沿转轴的单位矢量
$q_i, q_{a i}$	广义坐标
$q_0 \dots q_3$	欧拉参数
$\mathbf{r}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{z}$	矢径
s_i	图中的顶点
$[S_0], [S], [S_0^*], [S^*]$	关联矩阵的子矩阵
T	动能
$[T]$	$[S]$ 的逆阵
u_a	有向图中的弧
$\mathbf{v}, \mathbf{v}_i$	速度
$\Delta \mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}_i$	碰撞中的速度增量
$W, \delta W$	功, 虚功
$\mathbf{X}_a$	铰链内力
${}^i \mathbf{X}_a$	铰链内碰撞冲量
$\mathbf{Y}_a$	铰链内力矩
${}^i \mathbf{Y}_a$	铰链内碰撞冲量偶
$\mathbf{z}_a$	铰矢量
$[\mathbf{Z}]$	矢量 $\mathbf{z}_a$ 构成的矩阵
$\delta \pi, \delta \kappa$	无限小转动矢量
$[\mu]$	质量比矩阵
$\psi, \theta, \varphi, \varphi_i$	角坐标
$\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\Omega}_a$	角速度
$[1_n]$	n 个元为1的列阵

译者说明 由于印刷技术上的原因, 对原书有些符号作了更换。

目 录

第一章 数学提示

第二章 刚体运动学

§2.1	表示刚体方位的广义坐标	(11)
2.1.1	欧拉角	(11)
2.1.2	布里恩角	(14)
2.1.3	欧拉参数	(16)
§2.2	角速度概念	(19)
§2.3	刚体角速度与描述刚体方位的广义坐标之 间的关系	(24)
2.3.1	方向余弦	(24)
2.3.2	欧拉角	(25)
2.3.3	布里恩角	(26)
2.3.4	欧拉参数	(26)

第三章 刚体动力学的基本原理

§3.1	动能	(30)
§3.2	角动量	(32)
§3.3	惯性矩和惯性积的特性	(33)
3.3.1	参考基不变变换参考点	(33)
3.3.2	参考点不变变换参考基	(34)
3.3.3	惯性主轴和主惯性矩	(35)
3.3.4	惯性矩和惯性积的不变量和不等式	(36)
§3.4	动量矩定理	(38)

§3.5 应用于刚体的达朗伯原理.....	(42)
-----------------------	--------

第四章 刚体力学的经典问题

§4.1 非对称自由刚体.....	(45)
4.1.1 本体极迹和永恒转动.....	(46)
4.1.2 班琐的运动几何解释.....	(49)
4.1.3 欧拉运动方程的解.....	(50)
4.1.4 运动学微分方程的解.....	(53)
§4.2 对称自由刚体.....	(56)
§4.3 自激对称刚体.....	(59)
§4.4 对称重力陀螺.....	(61)
§4.5 万向支架中的对称重刚体.....	(70)
§4.6 陀螺体概论.....	(73)
§4.7 自由陀螺体.....	(79)
4.7.1 本体极迹和永恒转动.....	(80)
4.7.2 动力学运动方程的解.....	(83)

第五章 一般多体系统

§5.1 引言.....	(93)
§5.2 树形结构系统的运动方程.....	(98)
5.2.1 结构连结的数学描述.....	(99)
5.2.2 具有球铰接头系统, 物体连结在给定 运动的外界物体上.....	(107)
5.2.3 平面运动的特殊情况.....	(121)
5.2.4 具有球铰接头而没有与给定运动的外 界物体相连结的系统.....	(129)
5.2.5 多体卫星在圆形轨道中运动的特殊情 况.....	(140)

5.2.6	具有球铰、销钉和万向接头的系统···	(152)
5.2.7	程序设计指导·····	(164)
5.2.8	铰中有任意完整约束的系统·····	(184)
5.2.9	具有任意完整约束系统的铰中的内力 和内力矩·····	(213)
§5.3	具有闭合链和任意约束的多体系统·····	(215)
5.3.1	连结结构的数学描述。5.2.1节的一般 化·····	(216)
5.3.2	运动方程·····	(221)
§5.4	结束语·····	(245)

第六章 完整多体系统中的碰撞问题

§6.1	基本假设·····	(247)
§6.2	瞬时速度增量·····	(249)
§6.3	麦克斯威尔和培第定律的一个相似关系·····	(259)
§6.4	铰中的内碰撞冲量和内碰撞冲量偶·····	(269)
习题答案·····		(280)
参考文献·····		(290)

第一章 数学提示

在刚体力学中，矢量起着重要的作用。矢量用黑体字母来表示。一个矢量 $\mathbf{v}$ 可表为三个相互垂直的单位矢量 $\mathbf{e}_1$ ， $\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 的线性组合：

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \quad (1.1)$$

单位矢量是矢量基（也称参考基或简单基）的基矢量，矢量基以符号 $[\mathbf{e}]$ 来表示。在本书中，假设矢量基的基矢量形成右手系。

(1.1)式中的标量 v_1 ， v_2 和 v_3 是 $\mathbf{v}$ 在基 $[\mathbf{e}]$ 中的坐标，或简称 $\mathbf{v}$ 在 $[\mathbf{e}]$ 中的坐标。应当指出，矢量这个名称仅用于 $\mathbf{v}$ 这个量，而不是象通常的张量计算中那样，看作是三个一组的坐标 v_α ($\alpha = 1, 2, 3$) 的缩写。

在刚体力学中，往往需要涉及一个以上的矢量基。这些矢量基都被统一地给出上标。例如 $[\mathbf{e}^1]$ ， $[\mathbf{e}^2]$ ， $[\mathbf{e}^3]$ ，等。基 $[\mathbf{e}^s]$ 的基矢量具有一种特性，即其中任何两个基矢量的标积等于克罗尼克记号：

$$\mathbf{e}_\alpha^s \cdot \mathbf{e}_\beta^s = \delta_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

基 $[\mathbf{e}^s]$ 的基矢量 $\mathbf{e}_\alpha^s$ ($\alpha = 1, 2, 3$) 可以表为另一基 $[\mathbf{e}^r]$ 的基矢量的线性组合：

$$\mathbf{e}_\alpha^s = \sum_{\lambda=1}^3 A_{\alpha\lambda}^{s,r} \mathbf{e}_\lambda^r \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

上面三式可合并成一个简单的矩阵方程：

$$[\mathbf{e}^s] = [A]^{s,r} [\mathbf{e}^r] \quad (1.4)$$

通过上述方程，今后我们把看作基的名称的符号 $[\mathbf{e}^s]$ 定义为基矢量的列阵 $[\mathbf{e}_1^s \mathbf{e}_2^s \mathbf{e}_3^s]^T$ 。指数 T 表示转置。 $[A]^{s,r}$ 是由矢量坐标

$A_{\alpha\beta}^{sr}$ (α 为行的标号) 构成的 (3×3) 矩阵。

所有的矩阵都用 $[\]$ 来表示。在 $[\mathbf{e}^r]$ 中, 黑体字用来表示这个矩阵的元素是矢量。(1.3) 式表明, 矩阵的积 $[A]^{sr}[\mathbf{e}^r]$ 按通常矩阵代数的乘法规则求值, 虽然其中一个因子由标量构成, 而另一因子由矢量构成。

两个不同基的基矢量的标量积 $\mathbf{e}_\alpha^s \cdot \mathbf{e}_\beta^r$ 等于这两个矢量之间夹角的余弦。根据 (1.3) 和 (1.2) 式, 它也等于 $A_{\alpha\beta}^{sr}$ 。因此把 $[A]^{sr}$ 称为方向余弦矩阵。用 (1.3) 式代替 (1.2) 式中的 $\mathbf{e}_\alpha^s$, 并且用以 β 代替 α 的相应表示式代替 $\mathbf{e}_\beta^r$, 则此方程表明 $[A]^{sr}$ 的 α 行与 β 行的标积等于 $\delta_{\alpha\beta}$ 。由此得到 $[A]^{sr}[A]^{srT}$ 是单位阵, 因为矩阵积的每一个元都表为 $[A]^{sr}$ 两行的标积。根据这一特性, 可得矩阵 $[A]^{sr}$ 的两个重要特性。第一, $[A]^{sr}$ 的逆阵等于其转置阵, $[A]^{sr-1} = [A]^{srT}$ 。由此, (1.4) 式反过来可表示为:

$$[\mathbf{e}^r] = [A]^{sr}[\mathbf{e}^s] = [A]^{srT}[\mathbf{e}^s] \quad (1.5)$$

第二, $[A]^{sr}$ 的行列式等于 +1 或 -1。只有当两个基 $[\mathbf{e}^r]$ 和 $[\mathbf{e}^s]$ 一个是右手系而另一个是左手系时才会出现 -1。这里不出现这种情况, 所以

$$\det[A]^{sr} = +1 \quad (1.6)$$

(1.1) 式右边可以用矩阵积的形式表示。为此, 引入 $\mathbf{v}$ 在基 $[\mathbf{e}]$ 中的坐标列阵 $[v] = [v_1 v_2 v_3]^T$ (简称 $[v]$ 是 $\mathbf{v}$ 在 $[\mathbf{e}]$ 中的坐标矩阵)。利用此矩阵, (1.1) 式可得如下形式

$$\mathbf{v} = [\mathbf{e}]^T[v] \quad (1.7)$$

$$\text{或} \quad \mathbf{v} = [v]^T[\mathbf{e}]^T \quad (1.8)$$

在不同的基 $[\mathbf{e}^s]$ 和 $[\mathbf{e}^r]$ 中, 矢量 $\mathbf{v}$ 具有不同的坐标矩阵。它们分别以 $[v^s]$ 和 $[v^r]$ 来表示。(1.7) 式建立了等式

$$[\mathbf{e}^s]^T[v^s] = [\mathbf{e}^r]^T[v^r]$$

将 (1.5) 式的 $[\mathbf{e}^r]$ 代入上式右边。于是得到

$$[\mathbf{e}^s]^T[v^s] = [\mathbf{e}^s]^T[A]^{s'r}[v^r]$$

或

$$[v^s] = [A]^{s'r}[v^r] \quad (1.9)$$

这式子的作用是变换矢量的坐标。它说明方向余弦矩阵也就是坐标变换矩阵。要注意上标 s 和 r 的位置，它有助于记忆。

两个矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的标积可以写成矩阵的积。设 $[a^r]$ 和 $[b^r]$ 分别为 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 在相同矢量基 $[\mathbf{e}^r]$ 中的坐标矩阵。于是 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [a^r]^T[b^r] = [b^r]^T[a^r]$ 。往往已知的是两个矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 在不同基中的坐标矩阵，设 $[a^r]$ 在 $[\mathbf{e}^r]$ 中， $[b^s]$ 在 $[\mathbf{e}^s]$ 中。于是 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [a^r]^T[A]^{r's}[b^s]$ 。其次，再来研究特征值问题 $[A]^{s'r}[u^r] = \lambda[u^s]$ ，其中联系两个基 $[\mathbf{e}^r]$ 和 $[\mathbf{e}^s]$ 的方向余弦矩阵 $[A]^{s'r}$ 为已知。这个方程是

(1.9) 式当 $[u^s] = \lambda[u^r]$ 时的特殊情况。由于一个矢量的模在两个基中是相等的，矩阵 $[u^r]$ 和 $\lambda[u^r]$ 的模的平方必须相等。由此可知所有特征值 λ (实数或复数) 的绝对值都是 1。含有单位阵 $[E]$ 的特征多项式 $\det([A]^{s'r} - \lambda[E])$ 是一个三阶多项式。因此，至少有一个其绝对值 $|\lambda| = 1$ 的实特征值。根据这一事实，特征值 $\lambda = +1$ ，三个特征值 λ_1, λ_2 和 λ_3 必满足方程 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det[A]^{s'r} = +1$ 。对应于特征值 $\lambda = +1$ 的实特征矢量 $[u]$ 的坐标由下式确定：

$$[A]^{s'r}[u^r] = [u^s] \quad (1.10)$$

此式表明，对于任何方向余弦阵 $[A]^{s'r}$ ，存在 (至少) 一个实矢量 $[u]$ ，它在两个基 $[\mathbf{e}^r]$ 和 $[\mathbf{e}^s]$ 中的坐标是相同的。由此可得

欧拉定理 具有相同原点 P 的两个任意定位基 $[\mathbf{e}^r]$ 和 $[\mathbf{e}^s]$ ，可使其中之一通过绕某一轴转过某一角度而与另一个相重合，此轴通过 P 点，并且有 (1.10) 式所确定的特征矢量的方向。

在刚体动力学中，除矢量外，二阶张量具有重要作用。此张量以粗黑体字母标记。一个张量的最一般形式是两个矢量的不定积之和，即

$$D = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots \quad (1.11)$$

张量是一个算子，它与矢量 v 的右标积定义如下的矢量：

$$\begin{aligned} D \cdot v &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots) \cdot v \\ &= a_1 b_1 \cdot v + a_2 b_2 \cdot v + a_3 b_3 \cdot v + \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

同样， D 与 v 的左标积定义的矢量为

$$v \cdot D = v \cdot a_1 b_1 + v \cdot a_2 b_2 + v \cdot a_3 b_3 + \dots$$

如果在 D 的所有不定乘积中将乘子的顺序变换，则得一个新张量。它称为 D 的共轭张量，并以符号 $\overline{D}$

$$D = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots \quad (1.13)$$

$$\overline{D} = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 + \dots$$

在矢量代数中，乘法满足分配律：

$$a b_1 \cdot v + a b_2 \cdot v = a(b_1 + b_2) \cdot v$$

$$a_1 b \cdot v + a_2 b \cdot v = (a_1 + a_2) b \cdot v$$

因此，张量中的不定积也满足分配律：

$$a b_1 + a b_2 = a(b_1 + b_2)$$

$$a_1 b + a_2 b = (a_1 + a_2) b$$

于是可将 (1.11) 式右边所有矢量在同一个基 $[e]$ 中进行分解，并最后归并为下列的表示式：

$$D = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 D_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta \quad (1.14)$$

九个标量 $D_{\alpha\beta}$ 称为 D 在基 $[e]$ 中的坐标（应当指出，张量 D 并不是这一组坐标，而是与这组坐标有关）。这九个坐标构成一个 (3×3) 的坐标矩阵 $[D]$ 。利用这个矩阵，张量可写成

$$D = [e]^T [D] [e] \quad (1.15)$$

由矢量 a_1, a_2, b_1, b_2 等的坐标矩阵构成矩阵 $[D]$ 是一个简单的过程。设以 $[a_1], [a_2], [b_1], [b_2]$ 等表示这些矢量的坐标矩阵。将 (1.7) 式和 (1.8) 式代入 (1.11) 式，得到

$$D = [e]^T [a_1] [b_1]^T [e] + [e]^T [a_2] [b_2]^T [e]$$

$$\begin{aligned}
& + [\mathbf{e}]^T [a_3] [b_3]^T [\mathbf{e}] + \cdots \\
& = [\mathbf{e}]^T ([a_1] [b_1]^T + [a_2] [b_2]^T + [a_3] [b_3]^T \\
& \quad + \cdots) [\mathbf{e}]
\end{aligned}$$

与 (1.15) 式比较, 则

$$[D] = [a_1] [b_1]^T + [a_2] [b_2]^T + [a_3] [b_3]^T + \cdots$$

由上式及 (1.13) 式可知, $\mathbf{D}$ 的共轭张量的坐标矩阵就是 $\mathbf{D}$ 的坐标矩阵的转置阵。利用 (1.14) 式和 (1.1) 式, 矢量 $\mathbf{D} \cdot \mathbf{v}$ 可写为

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} \cdot \mathbf{v} &= \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 D_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{v} \\
&= \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 D_{\alpha\beta} v_\beta \mathbf{e}_\alpha \quad (1.16)
\end{aligned}$$

这样, 它在基 $[\mathbf{e}]$ 中的坐标矩阵, 就是 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{v}$ 在 $[\mathbf{e}]$ 中的坐标矩阵的积 $[D][v]$ 。将 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{v}$ 分别以 (1.15) 式和 (1.7) 式代入, 则可用比较常规的方法得到相同的结果:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{v} = [\mathbf{e}]^T [D] [\mathbf{e}] [\mathbf{e}]^T [\mathbf{v}] \quad (1.17)$$

此表达式中出现了一个新型的矩阵积, 也就是两个元为矢量的矩阵的标积 $[\mathbf{e}] \cdot [\mathbf{e}]^T$ 。下面还会遇到另一种型式的矩阵积称为两个矢量矩阵的矢积。这两种矩阵积定义如下: 设 $[\mathbf{P}]$ 是一个以矢量 $\mathbf{P}_{ij}$ ($i=1 \cdots m, j=1 \cdots r$) 作为元的 $(m \times r)$ 矩阵, $[\mathbf{Q}]$ 是一个以矢量 $\mathbf{Q}_{ij}$ ($i=1 \cdots r, j=1 \cdots n$) 作为元的 $(r \times n)$ 矩阵, 于是标积 $[\mathbf{P}] \cdot [\mathbf{Q}]$ 。是一个 $(m \times n)$ 标量矩阵, 它的元是

$$([\mathbf{P}] \cdot [\mathbf{Q}])_{ij} = \sum_{k=1}^r \mathbf{P}_{ik} \cdot \mathbf{Q}_{kj} \quad i=1 \cdots m, j=1 \cdots n$$

而矢积 $[\mathbf{P}] \times [\mathbf{Q}]$ 是一个 $(m \times n)$ 矢量矩阵, 它的元是

$$([\mathbf{P}] \times [\mathbf{Q}])_{ij} = \sum_{k=1}^r \mathbf{P}_{ik} \times \mathbf{Q}_{kj} \quad i=1 \cdots m, j=1 \cdots n$$

这些定义表明, 常用的矩阵乘法规则具有一般性。现在回到 (1.17) 式。按照刚才给出的定义, 标积 $[\mathbf{e}] \cdot [\mathbf{e}]^T$ 是一个单位

阵, 所以 $\mathbf{D} \cdot \mathbf{v} = [\mathbf{e}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{v}]$, 这与 (1.16) 式是一致的。

令人特别感到兴趣的是下列张量

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}]^T [\mathbf{e}] \quad (1.18)$$

它的坐标矩阵是单位阵。当此张量与任一矢量 $\mathbf{v}$ 作标积时, 结果等于 $\mathbf{v}$ 本身: $\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ 以及 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{v}$ 。由于这种原因, $\mathbf{E}$ 就称为单位张量。

当分解时用基 $[\mathbf{e}']$ 代替基 $[\mathbf{e}^r]$, 则借助 (1.5) 式可以很容易建立张量坐标矩阵的变换规则。设 $[\mathbf{D}^r]$ 和 $[\mathbf{D}^s]$ 分别表示 $\mathbf{D}$ 在两个基中的坐标矩阵, 则根据 (1.15) 式有下列恒等式:

$$[\mathbf{e}']^T [\mathbf{D}^s] [\mathbf{e}'] = [\mathbf{e}^r]^T [\mathbf{D}^r] [\mathbf{e}^r]$$

用 (1.15) 式代入右边的 $[\mathbf{e}^r]$, 则得

$$[\mathbf{e}']^T [\mathbf{D}^s] [\mathbf{e}'] = [\mathbf{e}']^T [\mathbf{A}]'^r [\mathbf{D}^r] [\mathbf{A}]'^s [\mathbf{e}']$$

$$\text{或} \quad [\mathbf{D}^s] = [\mathbf{A}]'^r [\mathbf{D}^r] [\mathbf{A}]'^s \quad (1.19)$$

这里再一次指出, 上标的位置可以帮助记忆。

在刚体力学中还会遇到具有对称和反对称坐标矩阵的张量。将要在第三章 3.1 节中定义的惯性张量和单位张量 $\mathbf{E}$ 具有对称坐标矩阵。具有非对称坐标矩阵的张量可以在矢量的矢积中遇到。首先研究双重矢积 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{v}$ 。它可以写成下列张量 $(\mathbf{b}\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{b})$ 与 $\mathbf{v}$ 的标积形式:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{v} &= \mathbf{b}\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{a}\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{b}\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.20)$$

如果 $[\mathbf{a}]$ 和 $[\mathbf{b}]$ 分别是 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 在同一矢量基中的坐标矩阵, 则上述张量在此基中的坐标矩阵为下列反对称阵

$$[\mathbf{b}][\mathbf{a}]^T - [\mathbf{a}][\mathbf{b}]^T = \begin{pmatrix} 0 & b_1 a_2 - b_2 a_1 & b_1 a_3 - b_3 a_1 \\ & 0 & b_2 a_3 - b_3 a_2 \\ \text{反对称} & & 0 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

单个矢量的矢积 $\mathbf{c} \times \mathbf{v}$ 同样可以表示为一个张量与矢量 $\mathbf{v}$ 的标