近代鞅论

胡迪鹤 甘师信 著

鞅论是概率论中的一个重要分支，其理论与方法已广泛应用到概率论的其它分支乃至其它学科，并繁衍出一些像鞅与 Banach 空间几何理论等边缘学科。

武汉大学学术丛书

WUHANUNIVERSITYACADEMICLIBRARY 武汉大学出版社

(鄂)新登字 09 号

近代鞅论

 胡迪鹤　甘师信　著

*

武汉大学出版社出版发行
(430072 武昌 珞珈山)
湖北京山县印刷厂印刷

*

850×1168　1/32　13.125 印张　插页 4　335 千字
1993 年 10 月第 1 版　　1993 年 10 月第 1 次印刷
印数：1—1000(内含精装 200 册)
ISBN 7-307-01646-x/O·138(平)
ISBN 7-307-01647-8/O·139(精)
定价：(平)12.30 元
(精)17.80 元

序　言

自本世纪40年代，J. L. D0Ob奠定了经典鞅论的理论基础以来，中间曾出现过一个短暂的发展较慢的时期. 但是，自从六、七十年代以D. L. Burkholder为代表的美国数学家，和以P. Meyer为代表的法国数学家的有关鞅论的杰出工作发表以后，鞅论的研究又大大活跃起来. 鞅论不仅作为概率论的一个分支快速地发展起来，而且渗透到调和分析、Banach空间几何学以及随机分析中去，互相促进，产生一些新兴的研究分支. 目前，“鞅论方法”已经广泛地应用到概率论与数理统计、调和分析、Banach空间的结构理论和其它许多工程技术中去，显示了鞅论的巨大作用.

本书共分八章，内容涉及各种鞅型过程的基本理论. 从鞅型过程的种类来分，本书包含了鞅、拟鞅、渐近鞅、概率渐近鞅、极限鞅、Mil和概率极限鞅等；从鞅型过程的状态空间来分，包含了实值的和一般的B值的鞅型过程；从指标集来分，包含了鞅型序列、两指标鞅型过程和定向集上的鞅型过程；从研究的问题来看，涉及鞅不等式、收敛定理、停时理论、分解理论（Doob－Meyer分解、Riesz分解等）、极限理论（大数定律和中心极限定理等）、鞅与Banach空间几何学以及鞅变换等等专题.

本书相当一部分内容是我们课题研究组在近年所获得的成果.为了内容的完整性,自然地,本书也包含了许多其它作者的成果.

本书第一至六章、第八章由甘师信执笔,第七章由胡述鹤执笔,在撰写乃至校样的过程中,我们经常交换意见,力求完美与统一.

由于作者们的水平有限,本书的缺点错误在所难免,敬请不吝指教,以期改进.

著 者

1992年于武汉大学

目 录

第一章　预备知识

本书采用近代随机过程论中所通用的术语及符号.

例如,设 Ω 为任一非空集合,其元素称之为点,以 ω 记之.设 A 为 Ω 的子集,若 ω 属于 A,则记为 $\omega \in A$,否则,记为 $\omega \overline{\in} A$,不含任何元素的集合称为空集,记为 $\varnothing$,设 B 是 A 的子集,则记为 $B \subset A$ 或 $A \supset B$. 对于集合运算,$\cup$ 表示求并,$\cap$ 表示求交,A^c 表示 A 的余集,$A - B(A \backslash B)$ 及 $A \Delta B$ 分别表示 A 与 B 的差和对称差,I_A 表示集合 A 的示性函数.

R^n 恒表 n 维欧氏空间,特别地,$R = R^1$,记 $R_+ = [0,\infty)$,$\overline{R} = [-\infty,\infty]$,$\overline{R}_+ = [0,\infty]$,$N = \{0,1,2,\cdots\}$,$\overline{N} = \{0,1,2,\cdots,\infty\}$. 对任何 $a,b \in \overline{R}$,$a \vee b = \max\{a,b\}$,$a \wedge b = \min\{a,b\}$,特别地 $a^+ = a \vee 0$,$a^- = (-a) \vee 0$. 若 $\tau_n \in \overline{R}$,$\tau_n \leqslant \tau_{n+1}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n = \tau$,则记为 $\tau_n \uparrow \tau$,类似地,可定义 $\tau_n \downarrow \tau$.

若有二集 E_1、E_2,由 E_1 到 E_2 的变换(或函数)f 记作 $f: E_1 \to E_2$. 对任何 $A \subset E_2$,$B \subset E_1$,记 $f^{-1}(A) = \{x: x \in E_1, f(x) \in A\}$,$f(B) = \{y: y = f(x), x \in B\}$. 若 E_3 为另一集合,$g: E_2 \to E_3$,则由 E_1 到 E_3 的复合变换 $g(f)$ 有时记作 $g \circ f$.

§1　可测函数

设 $\mathbf{B}$ 为实的 Banach 空间,其范数用 $\|\cdot\|$ 表示,$\mathbf{B}^*$ 表示 $\mathbf{B}$ 的共轭空间,设 $\mathscr{B}$ 为 $\mathbf{B}$ 中全体开集产生的 σ 代数,称为 Borel σ 代数,$\mathscr{B}$ 中的集合称为 Borel 集. 为方便起见,并不失普遍性,本书无特

殊声明，恒设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为完备的概率空间.

定义 1.1 称函数$X:\Omega\to\mathbf{B}$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的弱可测函数(或标量可测函数)，如果对任何$f\in\mathbf{B}^*$，实值函数$f(X)$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可测函数.

定义 1.2 称函数$X=\sum_{i=1}^{n}x_iI_{A_i}$为$\Omega$上的简单函数(或阶梯函数)，如果$A_i\in\mathscr{F},x_i\in\mathbf{B},i=1,2,\cdots,n,A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$. 称函数$X=\sum_{i=1}^{\infty}x_iI_{A_i}$为$\Omega$上的初等函数(或可数值函数)，如果$A_i\in\mathscr{F},x_i\in\mathbf{B},i=1,2,\cdots,A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$. $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$.

显然，简单函数为初等函数.

定义 1.3 称函数$X:\Omega\to\mathbf{B}$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的(强)可测函数，如果存在简单函数列$\{X_n\}$几乎处处强收敛于X(强收敛指依范数收敛，以后如无特别声明，收敛总指强收敛)，即

$$\exists\ \Lambda\in\mathscr{F},P(\Lambda)=0,\forall\ \omega\in\Omega-\Lambda$$

有

$$\|X_n(\omega)-X(\omega)\|\to 0(n\to\infty).$$

此时，记为$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X\ a.e.$ 或 $X_n\to X\ a.e.$. 以后，几乎处处成立的等式或不等式，常省去几乎处处的记号$a.e.$.

定理 1.1 函数X可测的充要条件是存在初等函数列几乎处处收敛于X.

证 必要性显然，下证充分性. 设$\{X_n\}$为初等函数列，几乎处处收敛于X，即$\exists\ \Lambda_0\in\mathscr{F},P(\Lambda_0)=0,\forall\ \omega\in\Omega-\Lambda_0$有

$$\lim_{n\to\infty}\|X_n(\omega)-X(\omega)\|=0.$$

对每个n，不妨设$X_n=\sum_{k=1}^{\infty}x_n^kI_{E_n^k}$，其中$E_n^k\in\mathscr{F},x_n^k\in\mathbf{B},k=1,2,\cdots$且有$m_n$，使得

$$P\left(\bigcup_{k=m_n+1}^{\infty} E_n^k\right) < \frac{1}{n^2}.$$

令

$$\overline{X}_n = \begin{cases} X_n, & \text{当 } \omega \in \bigcup_{k=1}^{m_n} E_n^k, \\ 0, & \text{反之,} \end{cases}$$

于是,$\{\overline{X}_n\}$ 为简单函数列,且

$$P(\overline{X}_n \neq X_n) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

记 $\Lambda_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\{\overline{X}_n \neq X_n\}$,由 Borel — Cantelli 引理知 $P(\Lambda_1) = 0$,对任一 $\omega \in \Omega - (\Lambda_0 \cup \Lambda_1)$,存在 $M > 0$,当 $n > M$ 时,$\omega \in \{\overline{X}_n = X_n\}$,故

$$\lim_{n\to\infty} \| \overline{X}_n(\omega) - X(\omega) \| = \lim_{n\to\infty} \| X_n(\omega) - X(\omega) \| = 0.$$

即简单函数列 $\{\overline{X}_n\}$ 几乎处处收敛于 X,故 X 是可测的.

定理 1.2 设 X 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的可测函数,则 X 是弱可测函数,$\| X \|$ 是实值可测函数.

证 因 X 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的可测函数,于是,存在简单函数列 $X_n = \sum_{i=1}^{k_n} x_n^i I_{A_n^i}$,$n \geqslant 1$,使得

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \quad a.e..$$

对于简单函数 $X_n = \sum_{i=1}^{k_n} x_n^i I_{A_n^i}$,注意到 $f \in \mathbf{B}^*$,

$$f(X_n) = \sum_{i=1}^{k_n} f(x_n^i) I_{A_n^i},$$

$$\| X_n \| = \sum_{i=1}^{k_n} \| x_n^i \| I_{A_n^i}$$

均为实值简单函数,且

$$f(X_n) \to f(X) \quad a.e.,$$

$$\| X_n \| \to \| X \| \quad a.e..$$

因此，X 是弱可测函数，$\|X\|$ 是实值可测函数.

定义 1.4 称函数 $X:\Omega\to\mathbf{B}$ 为可分值的，如果 $\{X(\omega):\omega\in\Omega\}$ 是 $\mathbf{B}$ 的可分子集，称 X 是几乎可分值的，如果存在 $\Omega_0\subset\Omega,\Omega_0\in\mathscr{F},P(\Omega_0)=0$，使得 $\{X(\omega):\omega\in\Omega-\Omega_0\}$ 是 $\mathbf{B}$ 的可分子集.

引理 1.3 设 X 为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的弱可测函数，若 X 是几乎可分值的，则 $\|X\|$ 是实值可测函数.

证　由于 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是完备的，则改变实值函数 $\|X(\cdot)\|$ 在零测集上的值并不影响其可测性，故不妨设 X 是可分值的，必要时再用 $\overline{\mathrm{span}\{X(\omega):\omega\in\Omega\}}$ 代替 $\mathbf{B}$，其中 $\overline{\mathrm{span}\{X(\omega):\omega\in\Omega\}}$ 表示由集合 $\{X(\omega):\omega\in\Omega\}$ 张成的闭线性子空间. 因此，不失一般性，可设 $\mathbf{B}$ 本身是可分空间. 设可列集 $\{x_i\}$ 在 $\mathbf{B}$ 中稠且 $x_i\neq 0$，则由 Hahn－Banach 定理可知：对每一 x_i，存在 $f_i\in\mathbf{B}^*$，$\|f_i\|=1$，使得 $f_i(x_i)=\|x_i\|$，由稠密性，对任何固定的 $x\in\mathbf{B}$ 及任意 $\varepsilon>0$，必有 j 使得 $\|x-x_j\|<\varepsilon$，从而

$$\|x\|-\varepsilon<\|x_j\|=f_j(x_j)\leqslant\sup_k|f_k(x_j)|$$

$$\leqslant\sup_k|f_k(x)|+\varepsilon,$$

由 ε 的任意性得

$$\|x\|\leqslant\sup_k|f_k(x)|,$$

而　$$|f_k(x)|\leqslant\|f_k\|\,\|x\|=\|x\|,\quad(\forall\ k\geqslant 1),$$

故　$$\sup_k|f_k(x)|\leqslant\|x\|,$$

即　$$\|x\|=\sup_k|f_k(x)|.$$

由 x 的任意性得：

$$\|X(\omega)\|=\sup_k|f_k(X(\omega))|,\forall\ \omega\in\Omega.$$

由于 X 是弱可测的，故对每一 $k\geqslant 1$，$f_k(X)$ 为实值可测函数，从而，$\|X\|$ 为实值可测函数.

定理 1.4 (B. J. Pettis)　设 $X:\Omega\to\mathbf{B}$，则下列陈述等价：

(1) X 是可测的；

(2) X 是弱可测的且是几乎可分值的.

证　(1) ⇒ (2). 由定理1.2知X是弱可测的，再由定理1.1可取初等函数列$\{X_n\}$及零概集Λ使得

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \forall\ \omega \in \Omega - \Lambda.$$

记

$$\mathbf{B}_1 = \overline{\{X_n(\omega): \omega \in \Omega - \Lambda, n = 1,2,\cdots\}},$$

则$\mathbf{B}_1$是可分子集，显然

$$\{X(\omega): \omega \in \Omega - \Lambda\} \subset \mathbf{B}_1.$$

因此，X是几乎可分值的，这就证明了(2)成立.

(2) ⇒ (1). 不妨设X是可分值的，从而可取$x_k \in \mathbf{B}$, $k = 1, 2, \cdots$ 使得$\{X(\omega), \omega \in \Omega\} \subset \overline{\{x_k, k \geqslant 1\}}$.

记

$$\Omega_{nk} = \{\omega: \| X(\omega) - x_k \| < \frac{1}{n}\}.$$

因$X(\cdot) - x_k$是弱可测的且可分值的，由引理1.3知Ω_{nk}为可测集，又对每一$n \geqslant 1$，有

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_{nk}.$$

令　$$A_{nk} = \Omega_{nk} - \bigcup_{j=1}^{k-1} \Omega_{nj}, k = 1,2,\cdots,$$

则　$\{A_{nk}, k \geqslant 1\}$两两不相交且$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk} = \Omega$. 定义$X_n$如下：

$$X_n(\omega) = x_k, \omega \in A_{nk}, k = 1,2,\cdots,$$

则X_n是初等函数，又由X_n的定义知：对任意$\omega \in \Omega$，有

$$\| X(\omega) - X_n(\omega) \| = \| X(\omega) - x_k \| < \frac{1}{n},$$

故$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$. 由定理1.1知$X$是可测的，即(1)成立.

推论1.5　$X: \Omega \to \mathbf{B}$为可测的充要条件是存在初等函数列$\{X_n\}$和一零概集Λ使得在$\Omega - \Lambda$上$\{X_n\}$一致收敛于X.

证　由定理1.1知充分性显然成立. 下证必要性. 设X是可测的，则由定理1.4知X是几乎可分值的，于是存在零概集Λ，类

似于定理 1.4 的证明，构造出初等函数列$\{X_n\}$，使得对一切$\omega \in \Omega - \Lambda$，有

$$\| X_n(\omega) - X(\omega) \| < \frac{1}{n}.$$

即$\{X_n\}$在$\Omega - \Lambda$上一致收敛于X.

推论 1.6 若$\mathbf{B}$是可分的，$X:\Omega \to \mathbf{B}$，则X是可测的与X是弱可测的等价.

推论 1.7 设$X:\Omega \to \mathbf{B}$是可测的，α为实值可测函数，则αX为可测函数.

证 $\forall f \in \mathbf{B}^*$，由定理 1.4 知$f(X)$是实值可测函数，从而$f(\alpha X) = \alpha f(X)$为实值可测函数，即$\alpha X$是弱可测的，又由定理 1.4 知$X$是几乎可分值的，设$\Lambda \in \mathscr{F}$，$P(\Lambda) = 0$，$\omega_n \in \Omega$，$n = 1, 2, \cdots$满足$\{X(\omega_n), n = 1, 2, \cdots\}$稠密于$\{X(\omega), \omega \in \Omega - \Lambda\}$，记$\{r_k : k = 1, 2, \cdots\}$为有理数全体及$S = \{r_j X(\omega_i) : i, j = 1, 2, \cdots\cdots\}$，则$S$是$\mathbf{B}$的可分子集，且满足

$$\{\alpha(\omega) X(\omega) : \omega \in \Omega - \Lambda\} \subset \overline{S}$$

这表明αX是几乎可分值的，由定理 1.4 知αX是可测的.

定理 1.8 设$X_n : \Omega \to \mathbf{B}$，$n \geqslant 1$，是可测函数列，$X : \Omega \to \mathbf{B}$，且$X_n$几乎处处弱收敛于$X$，即$\exists\, \Lambda \in \mathscr{F}$，$P(\Lambda) = 0$，$\forall f \in \mathbf{B}^*$，$\forall \omega \in \Omega - \Lambda$，有

$$\lim_{n \to \infty} f(X_n(\omega)) = f(X(\omega)),$$

则X是可测的.

证 对每一$n \geqslant 1$，$f(X_n)$是实值可测函数，从而$f(X)$是可测的，故X是弱可测的. 又对每个$n \geqslant 1$，因X_n是可测的，由定理 1.4 知存在$\{x_n^j\}_{j \geqslant 1} \subset \mathbf{B}$，$\Lambda_n \in \mathscr{F}$，$P(\Lambda_n) = 0$，使得$\{x_n^j\}_{j \geqslant 1}$在$\{X_n(\omega) : \omega \in \Omega - \Lambda_n\}$中稠密. 令

$$\mathbf{B}_0 = \overline{\operatorname*{span}_{n,j} \{x_n^j\}},$$

则$\mathbf{B}_0$是闭且可分的线性子空间，$\mathbf{B}_0$也是弱闭的. 由X_n几乎处处弱收敛于X知

$$\{X(\omega):\omega\in\Omega-(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Lambda_n)\}\subset\mathbf{B}_0,$$

但 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Lambda_n)\}=0$,故 X 是几乎可分值的,再用定理 1.4 知 X 是可测的.

推论 1.9 设 $X_n:\Omega\to\mathbf{B}, n\geqslant 1$ 是可测函数列, $X:\Omega\to\mathbf{B}$ 且 X_n 几乎处处收敛于 X,则 X 是可测的.

证 注意到 X_n 几乎处处收敛于 X 蕴含 X_n 几乎处处弱收敛于 X,再用定理 1.8 知 X 是可测的.

定理 1.10 设 $X:\Omega\to\mathbf{B}$ 是可测函数,则存在简单函数列 $\{X_n\}$,使得

(1) $\|X_n\|\leqslant 2\|X\|, n\geqslant 1$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X, a.e.$.

证 由可测函数的定义知存在简单函数列 $\{Y_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}Y_n=X$, $a.e.$.

令

$$X_n=\begin{cases}Y_n, & \|Y_n\|\leqslant 2\|X\|;\\ 0, & \text{反之}.\end{cases}\quad(n\geqslant 1)$$

则 $\{X_n\}$ 为简单函数列且满足(1) 与(2).

为方便起见,以后总称定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的取值于 $\mathbf{B}$ 的可测函数为 $\mathbf{B}$ 值随机变量,当 $\mathbf{B}=R$ 时,则称 R 值随机变量为实值随机变量.

设 $\{X_n\}$ 为实值随机变量序列,若存在 $\Lambda\in\mathscr{F}, P(\Lambda)=0$,使得

$$X_1(\omega)\leqslant X_2(\omega)\leqslant\cdots,\quad\forall\,\omega\in\Omega-\Lambda,$$

则称 $\{X_n\}$ 为递增的(或非降的). 记为 $X_n\uparrow, a.e.$ (在无混淆的情况下,简记为 $X_n\uparrow$).

若存在 $\Lambda\in\mathscr{F}, P(\Lambda)=0$,使得

$$X_1(\omega)<X_2(\omega)<\cdots,\forall\,\omega\in\Omega\text{-}\Lambda,$$

则称$\{X_n\}$为严格递增的，记为 $X_n \uparrow\uparrow$, *a.e.*. 类似地可定义递减的(非升的)及严格递减的.

设$\{X_t, t \in \Delta\}$为任一实值随机变量族，我们总用$\sigma\{X_t, t \in \Delta\}$表示由$\{X_t, t \in \Delta\}$产生的$\sigma$代数.

若X是**B**值随机变量，$\mathscr{B}$是$\mathscr{F}$的任一子σ代数，X关于$\mathscr{B}$是可测的，以后常简写成$X \in \mathscr{B}$.

§2 Bochner 积分与条件期望

本节总假定$\mathscr{F}$的子σ代数是完备的.

定义 2.1 设X为**B**值随机变量且$\int_\Omega \|X\| dP < \infty$.

(1) 若$X = \sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}$是简单函数，则定义$X$(在$\Omega$上)的 Bochner 积分为$\sum_{i=1}^n x_i P(A_i)$. 记为

$$\int_\Omega X dP = \sum_{i=1}^n x_i P(A_i).$$

(2) 若X是任一**B**值随机变量，则由定理 1.10 可取简单函数列$\{X_n\}$使得

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X,$$
$$\|X_n\| \leqslant 2\|X\|, \quad n \geqslant 1,$$

则定义X(在Ω上)的 Bochner 积分为

$$\int_\Omega X dP = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n dP.$$

下面的定理保证了定义 2.1 的合理性.

定理 2.1 设X是**B**值随机变量且$\int_\Omega \|X\| dP < \infty$，则对任何简单函数列$\{X_n\}$，只要

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X,$$

$$\| X_n \| \leqslant 2 \| X \|, \quad n \geqslant 1,$$

必有

(1) 存在 $h \in \mathbf{B}$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} X_n dP = h,$$

若还有简单函数列$\{\widetilde{X}_n\}$,亦满足

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{X}_n = X, \| \widetilde{X}_n \| \leqslant 2 \| X \|, n \geqslant 1,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} X_n dP = \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\widetilde{X}_n dP.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Omega} \| X - X_n \| dP = 0.$

证 (1) 由定理 1.10 可取简单函数列$\{X_n\}$使得

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X, \tag{2.1}$$

$$\| X_n \| \leqslant 2 \| X \|, \quad n \geqslant 1, \tag{2.2}$$

用控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n,m\to\infty} \left\| \int_{\Omega} X_n dP - \int_{\Omega} X_m dP \right\| \\
&\leqslant \lim_{n,m\to\infty} \int_{\Omega} \| X_n - X_m \| dP \\
&\leqslant \lim_{n,m\to\infty} \left(\int_{\Omega} \| X_n - X \| dP + \int_{\Omega} \| X - X_m \| dP\right) \\
&= \int_{\Omega} \lim_{n\to\infty} \| X_n - X \| dP + \int_{\Omega} \lim_{m\to\infty} \| X - X_m \| dP \\
&= 0.
\end{aligned}$$

由 Banach 空间 $\mathbf{B}$ 的完备性得知:存在 $h \in \mathbf{B}$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n dP = h.$$

若还有简单函数列$\{\widetilde{X}_n\}$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{X}_n = X,$$

$$\|\widetilde{X}_n\| \leqslant 2\|X\|, \quad n \geqslant 1,$$

令

$$Y_n = \begin{cases} X_n, 当\ n\ 为奇数, \\ \widetilde{X}_n, 当\ n\ 为偶数. \end{cases}$$

则$\{Y_n\}$为简单函数列且满足(2.1)、(2.2)式,所以必存在$h \in \mathbf{B}$,使

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega Y_n dP = h,$$

而$\{\int_\Omega X_n dP\}$、$\{\int_\Omega \widetilde{X}_n dP\}$皆为$\{\int_\Omega Y_n dP\}$的子序列,所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n dP = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \widetilde{X}_n dP.$$

(2) 用控制收敛定理立即得证.

定义 2.2 若X是$\mathbf{B}$值随机变量且$\int_\Omega \|X\| dP < \infty$,则称$X$(在$\Omega$上)是 Bochner 可积的,在无混淆的情况下,简称为可积的.

若X是可积的$\mathbf{B}$值随机变量,对$A \in \mathscr{F}$,则定义X在A上的积分为

$$\int_A X dP = \int_\Omega X I_A dP.$$

若X是可积的$\mathbf{B}$值随机变量,则称积分$\int_\Omega X dP$为X的数学期望(简称为期望),记为$\mathrm{E}X$.

关于 Bochner 积分有如下基本性质.

定理 2.2 设X_i是可积的$\mathbf{B}$值随机变量,α_i是实数,$i = 1,2$,

$\cdots, n$,则

(1) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ 是可积的,且

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) dP = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{\Omega} X_i dP;$$

(2) 若 $A_n \in \mathscr{F}, A_n \cap A_m = \varnothing (1 \leqslant n \neq m < \infty)$,

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,则

$$\int_{A} X_i dP = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} X_i dP;$$

(3) $\| \int_{\Omega} X_i dP \| \leqslant \int_{\Omega} \| X_i \| dP$;

(4) 设 u 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的实值可积随机变量,则对任意 $x \in$ **B**,有

$$\int_{\Omega} uxdP = x \int_{\Omega} udP.$$

证　我们只证(4). 取实值简单函数列 $\{u_n\}$,使 $u_n \to u$,且 $|u_n| \leqslant 2|u|$, $n \geqslant 1$,记

$$u_n = \sum_{i=1}^{k_n} a_n^i I_{A_n^i},\ A_n^i \in \mathscr{F},\ A_n^i \cap A_n^j = \varnothing (i \neq j)$$

$$\bigcup_{i=1}^{k_n} A_n^i = \Omega, a_n^i \in R,\ n \geqslant 1,$$

则 $u_n x$ 是**B**值简单函数, $\lim\limits_{n \to \infty} u_n x = ux$, $\| u_n x \| \leqslant 2|u| \| x \|$,由定义 2.1 有

$$\int_{\Omega} u_n xdP = \sum_{i=1}^{k_n} a_n^i x P(A_n^i) = x \sum_{i=1}^{k_n} a_n^i P(A_n^i)$$

$$= x \int_{\Omega} u_n dP;$$

又 $\int_{\Omega} |u| \| x \| dP = \| x \| \int_{\Omega} |u| dP < \infty$,由定义 2.1,在上式中