高等学校教学参考书

变分不等方程

王耀东 编

高等教育出版社

变分不等方程是从六十年代发展起来的，它是偏微分方程的一个重要分支，在物理、工程技术上有着很实际的应用。本书对变分不等方程作了入门性的介绍，并且适当地介绍了我国数学工作者的有关工作。书中强调了变分不等方程的实际背景，并在有了充足的理论准备之后，再从严密数学观点讨论该问题。本书还很重视变分不等方程对解半线性偏微分方程的应用。在理论上突出了对解的正则性的讨论，对三种类型的变分不等方程给出了多种证明正则性的方法。

本书可供数学专业高年级大学生、研究生和教师学习参考，也可供物理专业师生和科学技术人员参考。

高等学校教学参考书
变分不等方程
王耀东 编
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京第二新华印刷厂印装
*
开本850×1168 1/32 印张8.375 字数200000
1987年5月第1版 1987年5月第1次印刷
印数00 001—5 120
书号13010·01257 定价1.70元

序　言

变分不等方程自从六十年代由 J.L.Lions和G.Stampacchia等学者创立以来，在欧美各国蓬勃发展，其理论日臻完善，其应用不断拓广，形成了一个颇具规模的体系．笔者就这一课题在北京大学数学系偏微分方程讨论班上作过报告，并给研究生开设了相应课程，本书就是在当时讲稿的基础上整理加工而成的．

我们就椭圆、抛物和双曲三种类型分别介绍变分不等方程解的存在性、唯一性和正则性，并以正则性作为重点，每章皆以应用问题开始，并在理论适当展开以后，再来考察原来的问题．

本书仅是变分不等方程这一广阔领域的一个入门，我们期待读者阅读本书之后，产生登堂入室的兴趣．读者欲了解和学习变分不等方程的最近进展，可参见文献[34]，[46]—[49]．

复旦大学数学系李大潜教授仔细审阅了原稿，作者表示衷心的感谢．

目　录

第一章　椭圆型变分不等方程

§1．一个带摩擦的静力学弹性问题

许多带单侧约束的定常力学和物理问题引出椭圆型变分不等方程，这里仅给出一个带摩擦的弹性问题以窥见一斑，在Duvaut和Lions的书《力学和物理中的变分不等方程》[1]中读者可以了解到大量的这类问题.

1.1　力学问题

设Ω是$\mathbf{R}^3$的一个带光滑边界Γ的区域，Γ由三部分Γ_1，Γ_2，Γ_3组成，这里

(1) $\operatorname{mes}\Gamma_1>0$.

假定Γ_1这一部分固定，Γ_2承受面密度已知的力，而Γ_3这一部分有摩擦.变形前占据区域Ω的材料是弹性的.以$\{u,\sigma\}$表示要求的位移场和应力场，方程和边条件如下：

(2)　$\dfrac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}+f_i=0$　　Ω内，

(3)　$\sigma_{ij}=a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u)$ ($\varepsilon_{kh}(u)$的定义见(10)式，

(4)　$u=0$　　Γ_1上，

(5)　$\sigma_{ij}n_j=F_i$　　Γ_2上，　　(F_i给定)

(6)　$\sigma_N=F_N$　　Γ_3上，　　($F_N<0$给定)

　　$|\sigma_T|\leqslant g$　　($g>0$给定)

(其中$\sigma=(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3)$，$\sigma_N=\sigma\cdot n$，$\sigma_T=\sigma-(\sigma\cdot n)n$，$n$为$\Gamma$的单位

外法向量，而$\sigma_j=\sigma_{ij}n_i(j=1,2,3)$

(7) $\begin{cases}若|\sigma_T|<g & 则u_T=0,\\ 若|\sigma_T|=g & 则存在k\geqslant 0使u_T=-k\sigma_T.\end{cases}$

f_i是给定在Ω上的力的体密度的第i个分量. a_{ijkh}是材料的弹性系数，它们满足下列关系

(8) $\begin{cases}a_{ijkh}=a_{ijhk}=a_{khij},\\ a_{ijkh}\mu_{ij}\mu_{kh}\geqslant a\mu_{ij}\mu_{ij},\end{cases}$

$$a>0,\quad \forall \mu_{ij}=\mu_{ji}.$$

$(\sigma_N,\ \sigma_T)$和$(u_N,\ u_T)$分别是$\{\sigma_{ij}n_j\}$和u的法向和切向分量，n_j是Γ的单位外法向量的分量. 这里及今后采用对重复指标在相应范围内求和的约定.

1.2 变分提法

设(u,σ)是问题(2)—(7)的正则解. 设v是Ω上的一个向量场，满足$v|_{\Gamma_1}=0$，以v_i-u_i乘(2)并在Ω上积分，进行分部积分（即利用Остроградский-Gauss公式）得

(9) $$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(v-u)dx$$
$$=\int_\Omega f_i(v_i-u_i)dx+\int_\Gamma \sigma_{ij}n_j(v_i-u_i)d\Gamma,$$

其中对$v=(v_1,\ v_2,\ v_3)$定义

(10) $$\varepsilon_{ij}(v)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

(9)中最后一项分解为

(11) $$\int_\Gamma \sigma_{ij}n_j(v_i-u_i)d\Gamma$$
$$=\int_{\Gamma_1}\sigma_{ij}n_j(v_i-u_i)d\Gamma+\int_{\Gamma_2}F_i(v_i-u_i)d\Gamma$$
$$+\int_{\Gamma_3}F_N(v_N-u_N)d\Gamma+\int_{\Gamma_3}\sigma_T(v_T-u_T)d\Gamma.$$

考虑到(4)和$v|\Gamma_1=0$，我们有

$$\int_{\Gamma_1}\sigma_{ij}n_j(v_i-u_i)d\Gamma=0.$$

摩擦条件(7)给出不等式

$$(12)\quad \int_{\Gamma_3}\sigma_T(v_T-u_T)d\Gamma\geqslant\int_{\Gamma_3}(-g|v_T|+g|u_T|)d\Gamma.$$

事实上，由(7)，$|\sigma_T|\leqslant g$，故

$$\int_{\Gamma_3}\sigma_T v_T d\Gamma\geqslant\int_{\Gamma_3}-|\sigma_T|\ |v_T|\ d\Gamma\geqslant\int_{\Gamma_3}-g|v_T|\ d\Gamma;$$

当 $|\sigma_T|<g$，$u_T=0$，

故 $$\int_{\Gamma_3}\sigma_T(-u_T)=0=\int_{\Gamma_3}g|u_T|\ d\Gamma;$$

当 $|\sigma_T|=g$，$u_T=-k\sigma_T$，$k\geqslant 0$，

$$\int_{\Gamma_3}\sigma_T(-u_T)d\Gamma=\int_{\Gamma_3}k\sigma_T\circ\sigma_T d\Gamma$$

$$=\int_{\Gamma_3}k|\sigma_T|\ |\sigma_T|\ d\Gamma=\int_{\Gamma_3}g|u_T|\ d\Gamma.$$

引进记号

$$(13)\quad a(u,\ v)=\int_\Omega a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx,$$

$$(14)\quad L(v)=\int_\Omega f_iv_idx+\int_{\Gamma_2}F_iv_id\Gamma+\int_{\Gamma_3}F_Nv_Nd\Gamma,$$

$$(15)\quad j(v)=\int_{\Gamma_3}g|v_T|\ d\Gamma.$$

由(3)和(12)，等式(9)变为

$$(16)\quad a(u,\ v-u)+j(v)-j(u)\geqslant L(v-u),\ \forall v,\ v|\Gamma_1=0.$$

不等式(16)跟(4)一起组成由(2)—(7)提出的力学问题的正则解表示的位移场所满足的变分性质．正是从这一性质出发我们给出力学问题的精确的数学表述．

1.3 变分框架

引入空间V

(17) $V=\{v\,|v\in(H^1(\Omega))^3,\ v|\Gamma_1=0\}$,

这里$H^1(\Omega)$是Sobolev空间 $W^{2,1}(\Omega)=\{f=f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ $\in L^2(\Omega)\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\in L^2(\Omega),\ i=1,\ 2,\ 3\right.\}$，其中$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 理解为f关于x_i的在广义函数意义下的导数，关于Sobolev空间的系统理论请参见R.A.Adams的《Sobolev Spaces》[2]一书和其它专著，例如[3]. V对于由$(H^1(\Omega))^3$定义的拓朴结构是一个Hilbert空间. $H^1(\Omega)$的迹理论指出V是$(H^1(\Omega))^3$的一个闭子空间.

对于给定函数做下列假设

$$(18)\quad \begin{cases} f_i\in L^2(\Omega),\ F_i\in L^2(\Gamma_2),\ F_N\in L^2(\Gamma_3) \\ a_{ijkh}\in L^\infty(\Omega),\ g_1\geqslant g\geqslant g_0>0,\ g_0,\ g_1\text{是常数}. \end{cases}$$

现在可以精确地提出问题：求这样的u，它满足

$$(19)\quad \begin{cases} u\in V \\ a(u,\ v-u)+j(v)-j(u)\geqslant L(v-u),\quad \forall v\in V. \end{cases}$$

形如(19)的带不等号的方程称为变分不等方程. 下节开始研究变分不等方程解的存在唯一和正则性问题.

§2. 与Hilbert空间上的强制双线性型相应的变分不等方程

2.1 对称双线性型的情形

为说明变分不等方程与Hilbert空间上的变分问题的关系，了解变分不等方程名称的由来，并为更一般的变分不等方程做准备，我们从研究对称双线性型的简单情形开始.

设V是实数域$\mathbf{R}^1$上的一个Hilbert空间，它的内积和范数分别

用$((\cdot))$和$\|\cdot\|$表示，V'表示V的对偶空间，对$f\in V'$，$v\in V$，f在点v取的值$f(v)$用(f, v)表示．由Riesz关于Hilbert空间上的有界线性泛函的表示定理，对$f\in V'$，存在唯一元素$u\in V$，使对任意$v\in V$有$(f,v)=((u,v))$，映射$f\to u=\Lambda f$称为V'到V的典则映射，$\Lambda\in\mathscr{L}(V', V)$，$\|\Lambda\|=\|\Lambda^{-1}\|=1$．关于 Hilbert 空间及一般的泛函分析知识，请参见K．Yosida的《Functional Analysis》[4]．

定理 1 设$a(u,v)$是Hilbert空间V上的一个双线性型，它满足条件

(1) a是对称的，即对任意$u,v\in V$，$a(u, v)=a(v, u)$；

(2) a是连续的，即存在常数C，对任意$u,v\in V$，$|a(u, v)|\leqslant C\|u\|\|v\|$；

(3) a是强制的，即存在$\alpha>0$，对任意$u\in V$，$a(u,u)\geqslant\alpha\|u\|^2$；

$f\in V'$，又设函数j: $V\to(-\infty, +\infty]$满足条件

(4) $j\not\equiv+\infty$，

(5) j(下)凸，即对任意$t\in[0, 1]$，u，$v\in V$，有

$$j((1-t)u+tv)\leqslant(1-t)j(u)+tj(v),$$

(6) j强下半连续，即对任意$u\in V$，当$v\to u$时

$$\lim_{v\to u} j(v)\geqslant j(u),$$

则存在唯一的$u\in V$满足变分不等方程

(7) $a(u, v-u)+j(v)-j(u)\geqslant(f, v-u)\quad\forall v\in V$，

且从V'到V的映射$f\to u$连续．

解的唯一性和连续依赖于f的证明 设$u_i(i=1,2)$是(7)的相应于f_1和f_2的解，即

(7)′ $a(u_1, v-u_1)+j(v)-j(u_1)\geqslant(f_1, v-u_1)\quad\forall v\in V$

(7)″ $a(u_2, v-u_2)+j(v)-j(u_2)\geqslant(f_2, v-u_2)\quad\forall v\in V$

在(7)′中令$v=u_2$，在(7)″中令$v=u_1$，把所得两式相加并利用a的双线性和f_i的线性，得

$$-a(u_2-u_1,\ u_2-u_1)\geqslant-(f_2-f_1,\ u_2-u_1).$$

再利用a的强制性和f_2-f_1的有界性得

$$\alpha\|u_2-u_1\|^2\leqslant\|f_2-f_1\|_{V'}\|u_2-u_1\|$$

当$u_2\neq u_1$时两端除以$\alpha\|u_2-u_1\|$得

$$(8)\qquad \|u_2-u_1\|\leqslant\frac{1}{\alpha}\|f_2-f_1\|_{V'}.$$

由此立刻得到解的唯一性和对f的连续依赖性.

为证明解的存在性，我们需要下面几个引理，它们本身也是有其独立价值的，其证明可在标准的泛函分析书中找到，但为读者阅读的方便和叙述的完整，我们还是给出扼要的证明.

引理 1[5] 设a是对称非负(即$a(u,\ u)\geqslant0$，$\forall u\in V$)双线性型，函数$j:V\to(-\infty,\ +\infty]$是固有(即$\neq+\infty$)的凸函数，$f\in V'$，则变分不等方程(2.7)和下列变分问题等价：

$$(9)\qquad 求u\in V使\quad J(u)=\min_{v\in V}J(v)$$
$$=\min_{v\in V}\left\{\frac{1}{2}a(v,v)+j(v)-(f,\ v)\right\}.$$

证明 设u是变分问题(9)的解.任取$v\in V$，由$J(u)$的最小性并注意到a的对称性和双线性，对任意$t\in[0,1]$我们有

$$\begin{aligned}J(u)&=\frac{1}{2}a(u,u)+j(u)-(f,\ u)\\&\leqslant J(u+t(v-u))\\&=\frac{1}{2}a(u+t(v-u),\ u+t(v-u))\\&\quad+j(u+t(v-u))-(f,\ u+t(v-u))\end{aligned}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}a(u,\ u)+\frac{t^2}{2}a(v-u,\ v-u)+ta(u,\ v-u)$$

$$+j(u)+t(j(v)-j(u))-(f,\ u)-t(f,v-u).$$

整理得

$$\frac{t}{2}a(v-u,v-u)+a(u,v-u)+j(v)-j(u)\geqslant(f,v-u).$$

令$t\to0$即知u满足变分不等方程(7).

反之，设u是变分不等方程(7)的解，注意到

$$\frac{a(v,v)}{2}-\frac{a(u,u)}{2}=\frac{1}{2}[a(u+v-u,\ u+v-u)-a(u,u)]$$

$$=a(u,\ v-u)+\frac{1}{2}a(v-u,\ v-u)$$

$$\geqslant a(u,\ v-u),$$

由(7)立刻得

$$\frac{a(v,v)}{2}-\frac{a(u,u)}{2}+j(v)-j(u)-(f,\ v)+(f,\ u)\geqslant0,$$

$$\frac{a(v,v)}{2}+j(v)-(f,\ v)\geqslant\frac{a(u,u)}{2}+j(u)-(f,u),$$

即

$$J(v)\geqslant J(u).$$

故u是变分问题(9)的解.

引理 2 若$j:V\to(-\infty,\ +\infty]$是固有下半连续的凸函数，则存在$v_0\in V$和$r\in\mathrm{R}'$使对任意$v\in V$有

(10) $j(v)\geqslant((v_0,\ v))-r.$

证明 考虑$V\times\mathrm{R}'$中的集合

$$EG(j)=\{(v,r)\,|v\in D(j),\ j(v)\leq r\},$$

其中

$$D(j)=\{v\in V|\ j(v)<+\infty\}.$$

由 j 的凸性易知$EG(j)$的凸性，由 j 的下半连续性易知$EG(j)$ 的闭性，又由$j\neq +\infty$，知$EG(j)$非空.

若对任意$v\in D(j)$有$j(v)\geq 0$，取$v_0=0$，$r=0$即有(10).否则存在$w_0\in D(j)$使$j(w_0)<0$，不妨设$w_0=0, j(w_0)=-1/2$，于是由Mazur定理存在(u_0, r_0)使

$$((u_0, v))+r_0 r\leq 1, \quad \forall (v, r)E\in G(j);$$

$$((u_0, w_0))+r_0(-1)>1.$$

于是$r_0<0$，$((u_0, v))+r_0 j(v)\leq 1$，$\forall v\in D(j)$，故得

$$j(v)\geq\left(\left(\frac{-u_0}{r_0}, v\right)\right)+\frac{1}{r_0},$$

令$-\frac{u_0}{r_0}=v_0$，$\frac{1}{r_0}=-r$，即得(10).

引理 3 (Mazur) 设E是一个赋范向量空间，序列x_n在E中弱收敛到x，则对任给$\varepsilon>0$，存在一个凸线性组合 $\sum_{i=1}^{n}a_i x_i$ 使

$$\| x-\sum_{i=1}^{n}a_i x_i \| \leq\varepsilon.$$

证明 经过平移，总可假定序列$\{x_n\}$的第一项为0，

$$0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \text{ 弱}\rightarrow x.$$

令

$M_1=\{x_n\}$的所有有限个元的凸线性组合的集，我们要证$x\in\overline{M}_1$.用反证法，设存在$\varepsilon_0>0$使

$$d(x, M_1)=\inf_{y\in M1}(x,y)\geq\varepsilon_0.$$

$0\in M_1$，但M_1未必是原点的一个邻域.我们再令

$$M=\left\{v \mid \exists u\in M_1 \text{使} \| v-u \| \leq\frac{\varepsilon_0}{2}\right\}.$$

易见M是原点的一个凸邻域且有

$$d(x,\ M) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

设$p(y)$是M的Minkowski泛函

$$p(y) = \underset{\substack{\alpha>0 \\ \alpha^{-1} y \in M}}{\mathrm{int}} \alpha.$$

易证$p(y)$是E上的半范数，在过原点的每一直线X上图示$p(y)$如下：

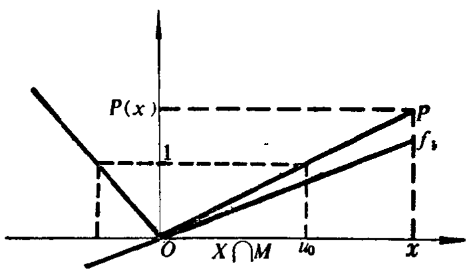

图 1

由于M是凸集，$X \cap M$是一个线段，p有下列性质：

$p(y) \leq 1$，当$y \in M$；

$p(y) = 1$，当$y \in M$的边界；

$p(y) \geq 1$，当$y \overline{\in} M$.

取X为连结原点和x的直线，设$u_0 \in X$满足$x = p(x) u_0$. 由于$d(x, M) \geq \frac{\varepsilon_0}{2} > 0$，我们有 $p(x) > 1$. 在X上定义连续线性泛函f_1如下：

$$\forall y \in X,\ y = \alpha u_0,\ f_1(y) = \alpha.$$

显然在X上有

$$f_1(y) \leq p(y) \qquad \forall y \in X.$$

根据Hahn-Banach定理，存在f_1的从X到E的一个延拓f, $f \in E'$且满足

$$f(y) \leq p(y) \qquad \forall y \in E.$$

我们有

$$\sup_{y\in M} f(y) \le \sup_{y\in M} p(y) \le 1 < p(x) = f(x).$$

由于$x_n \in M$，我们有

$$f(x) > \sup_n f(x_n),$$

这与$f(x_n) \to f(x)$矛盾.

作为引理 3 的推论易得：

引理 4 在所有赋范向量空间E中，所有(对范数拓扑的)强闭凸集M对弱拓扑亦是闭的.

证明 设$x_n \in M$，x_n在E中弱$\to x$，我们要证$x \in M$. 根据Mazur引理，对任意自然数n存在凸线性组合

$$y_n = \sum_{i=1}^{N_n} a_i^n x_i \in M$$

使

$$\| x - y_n \| < \frac{1}{n},$$

于是依范数$y_n \to x$，而M是强闭的，故$x \in M$.

引理 5 在一赋范向量空间E上的下半连续函数若是凸的，必是弱下半连续的.

证明 对任意实数a作集

$$M_a = \{x \mid x \in E,\ f(x) \le a\},$$

我们知道f下半连续的充分必要条件是M_a是闭集($\forall a \in \mathbb{R}^1$). 由于$f$是凸的，故集$M_a$是凸集，由引理 4，$M_a$对弱收敛也是闭的；从而$f$对弱收敛也下半连续.

作为这个引理的推论我们有

引理 6 设在赋范向量空间E中，x_n弱$\to x$，则

$$\underline{\lim} \| x_n \| \ge \| x \|.$$

引理 7 保留定理1的条件，则变分问题(9)有解.

证明 由引理2存在$v_0\in V$，$r\in \mathbf{R}^1$使

$$j(v)\geq((v_0, v))-r.$$

于是

$$(11)\quad J(v)=\frac{1}{2}a(v, v)+j(v)-(f, v)$$

$$\geq\frac{\alpha}{2}\|v\|^2-\|v_0\|\ \|v\|-|r|-\|f\|_{V'}\|v\|$$

$$\to+\infty\quad(\|v\|\to+\infty),$$

特别地，存在$R>0$使当$\|v\|>R$时

$$J(v)\geq J(0)=j(0).（不妨设j(0)<+\infty.）$$

令$B(0, R)=\{x\mid x\in V, \|x\|\leq R\}$为以原点为心、半径为$R$的球，

$$m=\inf_{v\in B(0,R)}J(v).$$

由不等式(11)知m为一实数，设$v_n\in B(0, R)$是极小化序列，$J(v_n)\to m(n\to+\infty)$. 由于Banach空间中的单位球弱列紧，不妨设v_n弱收敛到u，而$B(0, R)$是凸集，故$u\in B(0, R)$. 由于$(u, v)\to a(u,v)$的对称、双线性和强制性，$a(u, v)$是V上的一个内积，$\sqrt{a(v,v)}$是V上的一个范数，从而是凸泛函，又$\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$的函数$x\to x^2$是凸的，故$a(v, v)$是凸的，由$a$的连续性知$a(v, v)$连续，从而下半连续，又$f$是有界线性的，

$$m=\lim_{n\to\infty}J(v_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}a(v_n, v_n)+j(v_n)-(f, v_n)\right\}$$

$$\geq\frac{1}{2}\varliminf_{n\to\infty}a(v_n, v_n)+\varliminf_{n\to\infty}j(v_n)-\lim_{n\to\infty}(f, v_n)$$