

层次分析法引论

王莲芬 许树柏 编著

层次分析法引论

王莲芬 许树柏 编著

中国人民大学出版社

层次分析法引论

王莲芬 许树柏 编著

中国人民大学出版社出版发行
(北京西郊海淀路39号)

北京农业大学印刷厂排版
中国人民大学出版社印刷厂印刷
(北京鼓楼西大石桥胡同61号)

新华书店经销

开本: 850×1168毫米32开 印张: 12.5
1990年6月第1版 1990年6月第1次印刷
字数: 306 000 册数: 1—3 000

ISBN 7—300—00820—8

F·243 定价: 6.25元

前 言

层次分析法 (AHP) 是一种实用的多准则决策方法。该方法自 1982 年介绍到我国以来, 以其定性与定量相结合地处理各种决策因素的特点, 以及其系统、灵活、简洁的优点, 迅速地在我国社会经济多个领域内得到了广泛的重视和应用。一些高等院校也相继开设了有关层次分析法的课程。本书较系统地论述了层次分析法的基本理论以及国内外的一些主要研究成果。在编写上力求内容完整、深入浅出, 并配有较丰富的应用实例。可以作为高等院校经济管理各专业的教材, 也可供有关工程技术人员、管理干部自学或参考。

全书共分九章, 主要内容包括 AHP 的一般介绍、递阶层次结构的构造、单一准则下各种排序方法、残缺判断与群组判断排序原理以及反馈系统的排序。本书最后一章概要地介绍了专家选择系统的两个软件。读者可根据需要选读其中有关章节。

在编写本书过程中, 得到了刘豹教授和魏权龄教授的大力支持与关心, 北京大学分校王文娟副教授带病仔细地审阅了全书, 并提出了许多宝贵意见。中国人民大学张录老师协助编写了最后一章。在此向他们表示衷心的感谢与敬意。

由于水平有限, 书中一定会有缺点和错误, 敬请广大读者和专家批评指正。

作 者

1989年3月10日于北京

目 录

第一章 概论	1
§ 1.1 AHP产生的背景与展望	1
§ 1.2 AHP的基本方法与步骤	5
§ 1.3 AHP基本思想论述	18
§ 1.4 AHP应用实例	25
第二章 递阶层次结构	42
§ 2.1 概述	42
§ 2.2 递阶层次结构的数学表示	44
§ 2.3 有向图及可达性矩阵	52
§ 2.4 递阶层次结构的确定	69
§ 2.5 递阶层次结构中的合成排序	77
§ 2.6 递阶层次中的结构依存性对排序的影响	80
第三章 单一准则下特征根的排序方法	86
§ 3.1 概述	86
§ 3.2 正矩阵的Perron定理	88
§ 3.3 正矩阵最大特征根与对应特征向量的计算方 法——幂法	103
§ 3.4 正互反矩阵及其一致性条件	108
§ 3.5 判断矩阵一致性检验方法	114

§ 3.6	正互反矩阵的标准形	119
§ 3.7	正互反矩阵的左、右主特征向量的特性	125
§ 3.8	灵敏度分析	131
第四章	新元素导入的保序性条件及评分标度法	149
§ 4.1	单一准则下增加一个新元素的保序性条件	149
§ 4.2	单一准则下增加一组新元素的保序性条件	161
§ 4.3	合成排序的保序条件	166
§ 4.4	评分标度的应用	171
第五章	单一准则下其它排序方法及其比较	175
§ 5.1	概述	175
§ 5.2	对数最小二乘法的排序原理	177
§ 5.3	最小二乘法的排序原理	181
§ 5.4	最小偏差法的排序原理	187
§ 5.5	梯度特征向量法的排序原理	195
§ 5.6	保序性研究与方法比较	205
§ 5.7	非线性特征根排序方法	220
第六章	残缺判断与群组决策	226
§ 6.1	残缺判断矩阵的处理及其排序	226
§ 6.2	层次分析法中专家咨询工作	242
§ 6.3	AHP中群组决策方法(一)	245
§ 6.4	AHP中群组决策方法(二)	258
第七章	反馈系统的排序	263
§ 7.1	概述	263
§ 7.2	系统结构的类型	264

§ 7.3	反馈系统的超矩阵及加权超矩阵	268
§ 7.4	超矩阵与反馈系统的分类	274
§ 7.5	极限相对排序和极限绝对排序	280
§ 7.6	内部依存的递阶层次结构系统的排序	293
§ 7.7	应用实例	303
第八章	AHP的扩展与应用实例	311
§ 8.1	前向后向过程及规划方法	311
§ 8.2	动态排序	316
§ 8.3	冲突分析	328
§ 8.4	最优化方法	339
第九章	AHP应用软件	350
§ 9.1	AHP专家选择系统软件包	350
§ 9.2	大型实用AHP软件	373
参考文献		385

第一章

概 论

§ 1.1 AHP 产生的背景与展望

近年来系统工程的观念越来越多地为人们理解和接受，特别在经济发展规划、能源需求预测和供应规划、人材需求预测和教育规划、各种社会经济政策的评价等方面，系统工程的观点得到了广泛的应用。所谓系统工程的方法，就是从系统的观点出发，用定量的或定量与定性相结合的方法，对社会的、经济的、技术的系统进行分析、设计或改造的过程。

人们在日常生活中常常要做各种各样的决策。决策活动是人们进行选择或判断的一种思维活动。人们几乎每时每刻都要进行决策。有些决策是比较简单的，例如添置什么家具，选择什么专业等等；有些决策则比较复杂。经济学家们在进行社会的、经济的以及科学管理问题的决策分析中面临的常常是一个由相互关联、相互制约的众多因素构成的复杂系统。政治家们则往往需要就影响千万人命运和前途的问题进行决策。例如战争与和平问题，经济发展战略规划，政策策略的制定等等。它们涉及的是整个国家机构和全社会的庞大系统，其决策的复杂性和影响的深远性一般都大大超过了其它决策问题。

由于社会系统的复杂性，系统工程中能应用自如地解决各类问题的方法并不多。有许多实际问题至今还没有适当的方法可以解决。过去人们主要靠主观判断进行决策，因而缺乏科学性。一

些数学工具诸如数理统计方法、数量经济模型、数学规划方法等在系统工程和决策中的应用大大促进了系统工程方法的发展。一方面由于数学模型分析问题容易，目的性强，可以进行模拟试验，便于应用计算机等先进手段，因此数学工具在决策中的作用越来越重要，最优化技术一度几乎成了决策的代名词；另一方面它们在系统工程中的应用也推动了这些数学分支的迅速发展。到了70年代末，80年代初，最优化理论发展得越来越抽象，数学模型的规模越来越大，有些人甚至片面地认为决策就是依靠数学模型解决问题。然而事实却往往相反。人们不难在以往的社会经济系统决策中找到这样的例子：为制定社会经济发展的区域性中长期规划，研究人员耗费了大量时间、物力、财力建立复杂的数学模型，用大型高速计算机得到模型的解，并以此为根据编制了经济规划，而这样的规划却难以执行从而失去其实用价值。过于复杂的数学模型也往往使绝大多数工程技术人员望而却步，从而在某种程度上降低了系统工程的社会经济效用。系统工程毕竟是一门边缘学科，大部分复杂系统事实上是很难完全用定量的数学模型解决的。追求建立一个完全精确的数学模型，其结果必然是使解问题十分繁复，耗资十分巨大，以致最后掉入数学模型的“泥潭”中。在这种情况下，一些有远见的运筹学家开始冷静地看待和正确地评价复杂的数学模型对决策的作用。显而易见的事实是，在系统工程中，人们无法回避决策过程中决策者的选择和判断所起的作用。同时人们也开始认识到数学工具并非万能，决策中总会有大量因素无法定量地表示出来，而这正是软科学与通常的自然科学（称之为硬科学）的区别。认识到这一点后，运筹学家们重新回到人的选择和判断上，并认真研究决策思维的规律。正是在这种背景下，美国运筹学家，匹兹堡大学萨迪(T.L.Saaty)教授于70年代初期提出了著名的层次分析法(The Analytic Hierarchy Process, 以下简称 AHP)^[16]。

尽管 AHP 的应用需要掌握一些简单的数学工具, 尽管从数学原理上 AHP 有深刻的内容, 但 AHP 从本质上讲是一种思维方式。它把复杂问题分解成各个组成因素, 又将这些因素按支配关系分组形成递阶层次结构。通过两两比较的方式确定层次中诸因素的相对重要性。然后综合决策者的判断, 确定决策方案相对重要性的总的排序。整个过程体现了人的决策思维的基本特征, 即分解、判断综合。AHP 又是一种定量与定性相结合, 将人的主观判断用数量形式表达和处理的方法。它改变了长期以来决策者与决策分析者之间你搞你的、我行我的这种难于沟通的状态。在大部分情况下, 决策者可直接使用 AHP 进行决策, 因而大大提高了决策的有效性、可靠性和可行性。

AHP 的提出可追溯到 70 年代初。1971 年萨迪曾用 AHP 为美国国防部研究所谓“应急计划”。1972 年他又为美国国家科学基金会研究电力在工业部门的分配问题。1973 年为苏丹政府研究了苏丹运输问题^[14]。1977 年萨迪在第一届国际数学建模会议上发表了“无结构决策问题的建模——层次分析法^{[11], [18]}”。从那时起 AHP 开始引起人们的注意, 并逐步应用于计划制定、资源分配、方案排序、政策分析、冲突求解及决策预报等相当广泛的领域中。随着 AHP 应用范围的扩大, 它的理论也得到了发展并逐步完备。近年来萨迪等近百位学者在发展 AHP 的理论和推广 AHP 的应用方面做了大量工作, 发表了几百篇论文, 以 AHP 为基本方法的决策支持系统——“专家选择系统”软件已商品化, 在国际市场受到欢迎。

AHP 作为一种决策方法是在 1982 年 11 月召开的中美能源、资源、环境学术会议上由萨迪教授的学生高兰尼柴 (H. Gholamnezhad) 首先向中国学者介绍的。其后, 许树柏、李左凤、张世英、刘豹 (1982) 发表了国内第一篇介绍 AHP 的文章: “层次分析法——决策的一种实用方法”^[81]。在短短的 5 年多的时

间里，层次分析法象雨后春笋般在国内能源系统分析、城市规划、经济管理、科研成果评价等许多领域中得到了应用。在AHP的理论方面，我国学者对AHP的数学基础、不完全信息下排序问题、AHP的评分方法、模糊AHP、动态AHP以及判断矩阵一致性检验、反馈AHP、群组AHP等课题进行了研究，在某些领域中取得了可喜进展。一支研究和应用AHP的学术队伍初步形成。1987年9月在我国召开了第一届AHP学术讨论会，会上有23个省市的70余名学者提交了学术论文60余篇。1988年在我国召开了第一届国际AHP学术会议，140多名中外学者就AHP的理论和应用进行了交流和讨论。

AHP作为一种新的决策方法，目前还是不够完善的。从AHP的理论研究的进展和应用现状看，以下一些课题可以作为进一步研究的方向。

- (1) 正互反矩阵的数学理论；
- (2) 递阶层次结构和反馈系统排序理论的推广；
- (3) 方案按连续集形式出现的判断标度及排序问题；
- (4) 群组决策及残缺判断下AHP的使用问题；
- (5) 主特征向量与Weber-Fechner方程的关系；
- (6) AHP在对策论、效用理论、冲突分析中的应用；
- (7) AHP与最优化技术的关系；
- (8) 关于人对外界刺激的反应可以通过数值表示的心理学研究；
- (9) 当准则数目变化时，以及判断变化时研究排序的灵敏度问题；
- (10) AHP在资源分析、规划、成本效益、冲突求解等问题应用的规范形式；
- (11) 在递阶层次结构下判断用于预报的可行性，以及如何对预报结果进行检验；

- (12) AHP 与风险分析的关系，在风险分析中使用想定的规范定义；
- (13) AHP 与人工智能的关系；
- (14) AHP 的软件及专家系统研制；
- (15) 使用 AHP 研究通讯及因果关系语言。

§ 1.2 AHP的基本方法与步骤

运用 AHP 进行决策时，大体可分为 4 个步骤进行：

(1) 分析系统中各因素之间的关系，建立系统的递阶层次结构；

(2) 对同一层次的各元素关于上一层次中某一准则的重要性进行两两比较，构造两两比较判断矩阵；

(3) 由判断矩阵计算被比较元素对于该准则的相对权重；

(4) 计算各层元素对系统目标的合成权重，并进行排序。

下面分别说明这 4 个步骤的实现方法。

一、递阶层次结构的建立

应用 AHP 分析社会的、经济的以及科学管理领域的问题，首先要把问题条理化、层次化，构造出一个层次分析的结构模型。在这个结构模型下，复杂问题被分解为人们称之为元素的组成部分。这些元素又按其属性分成若干组，形成不同层次。同一层次的元素作为准则对下一层次的某些元素起支配作用，同时它又受上一层次元素的支配。这些层次大体上可以分为 3 类：

(1) 最高层：这一层次中只有一个元素，一般它是分析问题的预定目标或理想结果，因此也称目标层；

(2) 中间层：这一层次包括了为实现目标所涉及的中间环

节，它可以由若干个层次组成，包括所需考虑的准则、子准则，因此也称为准则层；

(3) 最低层：表示为实现目标可供选择的各种措施、决策方案等，因此也称为措施层或方案层。

上述各层次之间的支配关系不一定是完全的，即可以存在这样的元素，它并不支配下一层次的所有元素而仅支配其中部分元素。这种自上而下的支配关系所形成的层次结构，我们称为递阶层次结构。一个典型的层次结构表示如图1.1。

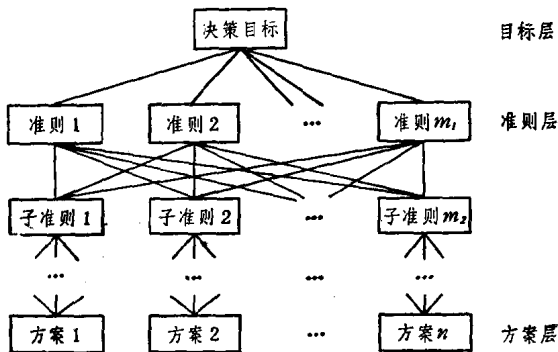


图 1.1 递阶层次结构示意图

递阶层次结构中的层次数与问题的复杂程度及需分析的详尽程度有关，一般地可以不受限制。每一层次中各元素所支配的元素一般地不要超过 9 个。这是因为支配的元素过多会给两两比较判断带来困难。一个好的层次结构对于解决问题是极为重要的，因而层次结构必须建立在决策者对所面临的问题有全面深入的认识的基础上。如果在层次的划分和确定层次元素间的支配关系上举棋不定，那么最好重新分析问题，弄清各元素间的相互关系，以确保建立一个合理的层次结构。关于递阶层次结构的进一步论述将在第二章内进行。

递阶层次结构是 AHP 中一种最简单的层次结构形式。有时

一个复杂的问题仅仅用递阶层次结构难以表示，这时就要采用更复杂的形式，如循环层次结构、反馈层次结构等等。它们都是递阶层次结构的扩展形式，将在第七章中予以详细介绍。

现举例来说明递阶层次结构的建立方法。

例1 科研课题的选择^[32]。

对于一个研究单位，科研课题的选择是组织管理的首要任务。课题选择合适与否直接关系到科研单位贡献大小和发展方向。因而它是一项关键性的技术决策和管理决策。选题必须考虑到贡献大小、人材培养、可行性及对本单位今后发展影响等4个准则，而和这4个准则相联系的主要因素又有以下几项。

(1) 实用价值，即科研课题所具有的经济价值和社会价值或完成后预期的经济效益或社会效益。它与成果贡献以及人材培养、今后发展等都有关。

(2) 科学意义，即科研课题的理论价值及其对某个科技领域的推动作用。它不仅关系到科研成果的贡献大小，也关系到科研人员学术水平的提高及单位今后的发展方向。

(3) 优势发挥，即选题要充分发挥本单位学科及专业人材优势。它与人材培养、课题可行性及今后发展均有关系。

(4) 难易程度，即科研课题的难易程度要与自身各种条件所决定的成功可能性相一致，这是与可行性直接有关的因素。

(5) 研究周期，即科研课题预计所需化费的时间，这也是直接影响可行性的因素。

(6) 财政支持，即科研课题所需的经费、设备以及经费来源，有关单位支持情况。这也是与可行性及今后发展有关的因素。

当然对于不同规模和不同性质的研究单位还可以考虑更多的或不同的因素，如课题的先进性，对科研基地的建设和实验室建设的促进等等。这里主要考虑以上几点。

根据上述遴选科研课题要考虑的因素以及它们之间的隶属关

系，可把各个因素自上而下划分为4个层次：最高层即目标层（ A ）的目标是合理遴选科研课题，中间层有两层，准则层1包括合理选择课题的4个准则，即科研成果贡献（ B_1 ），人才培养（ B_2 ），课题可行性（ B_3 ），以及单位今后发展（ B_4 ）；准则层2包括上面提到的6条指标。其中与成果贡献有关的是实用价值（ C_1 ）与科学意义（ C_2 ）；与人才培养有关的是实用价值（ C_1 ），科学意义（ C_2 ）及优势发挥（ C_3 ）；与可行性有关的是难易程度（ C_4 ），研究周期（ C_5 ），财政支持（ C_6 ）与 C_1 ， C_2 ， C_3 ；与单位今后发展有关的是 C_1 ， C_2 ， C_3 ， C_6 。其中实用价值又可分为经济价值（ C_{11} ）与社会价值（ C_{12} ）两个子指标，构成一个仅隶属于 C_1 的子层次。第4层即最低层是备择课题层，列出所有可供选择的科研课题1至 N 。图1.2表示了这一问题的层次结构模型。

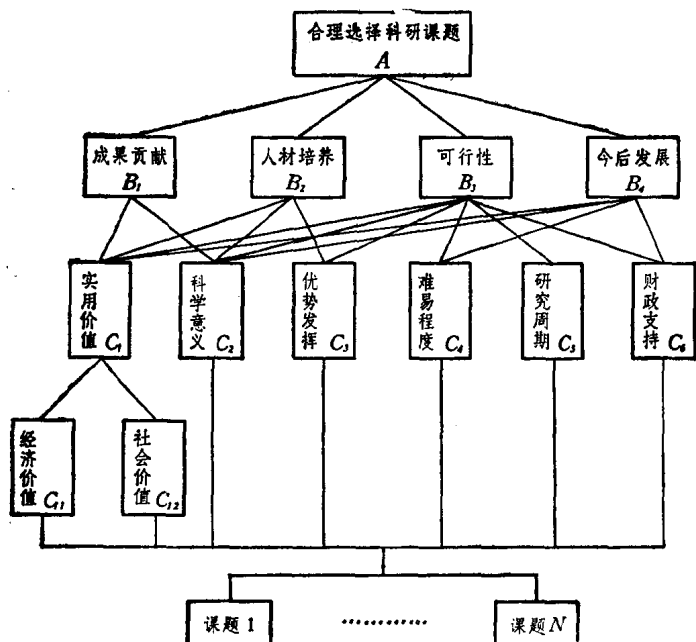


图 1.2 选择科研课题的层次结构模型

二、构造两两比较判断矩阵

在建立递阶层次结构以后，上下层次之间元素的隶属关系就被确定了。假定以上一层元素 C 为准则，所支配的下一层次元素为 u_1, u_2, \dots, u_n ，我们的目的是要按它们对于准则 C 的相对重要性赋予 u_1, u_2, \dots, u_n 相应的权重。当 u_1, u_2, \dots, u_n 对于 C 的重要性可以直接定量表示时（如利润多少，消耗材料量等），它们相应的权重可以直接确定。但是对于大多数社会经济问题，特别是比较复杂的问题，元素的权重不容易直接获得，这时就需要通过适当的方法导出它们的权重，AHP 所用的导出权重的方法就是两两比较的方法。

在这一步中，决策者要反复地回答问题：针对准则 C ，两个元素 u_i 和 u_j 哪一个更重要，重要多少，并按 1—9 比例标度对重要性程度赋值。表 1.1 中列出了 1—9 标度的含义。例如图 1.2 上实用价值下支配的元素为经济价值和社会价值。如果认为经济价值比社会价值明显地重要，那么它们的重要性之比的标度应取为 5，而社会价值与经济价值重要性的比例标度应取为 1/5。这样对于准则 C ， n 个被比较元素构成了一个两两比较判断矩阵

$$A = (a_{ij})_{n \times n} \quad (1.1)$$

其中 a_{ij} 就是元素 u_i 与 u_j 相对于 C 的重要性的比例标度。

显然判断矩阵具有下述性质：

$$a_{ij} > 0 \quad a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} \quad a_{ii} = 1 \quad (1.2)$$

我们称判断矩阵 A 为正互反矩阵。它所具有的性质，使我们在一

表1.1 1—9标度的含义

标 度	含 义
1	表示两个元素相比，具有同样重要性
3	表示两个元素相比，前者比后者稍重要
5	表示两个元素相比，前者比后者明显重要
7	表示两个元素相比，前者比后者强烈重要
9	表示两个元素相比，前者比后者极端重要
2, 4, 6, 8	表示上述相邻判断的中间值
倒数	若元素 i 与元素 j 的重要性之比为 a_{ij} ，那么 元素 j 与元素 i 重要性之比为 $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$

个 n 个元素的判断矩阵仅需给出其上（或下）三角的 $n(n-1)/2$ 个元素就可以了。也就是说只需作 $n(n-1)/2$ 个判断即可。

在特殊情况下，判断矩阵 A 的元素具有传递性，即满足等式

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik} \quad (1.3)$$

例如当 u_i 与 u_j 相比的重要性比例标度为 3，而 u_j 与 u_k 的重要性比例标度为 2，如果又认为 u_i 与 u_k 重要性比例标度为 6，那么它们之间的关系就满足式 (1.3)。但一般地我们并不要求判断矩阵满足这种传递性。当 (1.3) 式对 A 的所有元素均成立时，判断矩阵 A 称为一致性矩阵。

三、单一准则下元素相对权重的计算

在这一步我们要根据 n 个元素 u_1, u_2, \dots, u_n 对于准则 C 的判断矩阵 A ，求出它们对于准则 C 的相对权重 w_1, w_2, \dots, w_n 。相对权重可写成向量形式，即 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 。这里我们要解决两个问题，一个是权重计算方法，另一个是判断矩阵一致性检验。