

岩波講座 基礎工学 2

電磁気学Ⅲ

岡村総吾 著



岩波書店

岩波講座 基礎工学 2

電 磁 気 学

Ⅲ

岡 村 総 吾

岩 波 書 店

岩波講座 基礎工学 2 電磁気学 III

(全19巻/第19回配本)

1971年11月26日 第1刷発行 ©

東京都千代田区一ツ橋2-5-5 株式会社 岩波書店/精興社印刷・松岳社製本

表紙カット製作：渡辺茂・槌屋治紀・藤野孝爾・幸村真佐男
(IBM データセンター設置 IBM 7090・プロッター使用)

目 次

はじめに

第1章 真空中の静電界

1. 1 電 荷	1
1. 2 クーロンの法則	2
1. 3 電 界	7
1. 4 電 位	13
1. 5 ガウスの定理	21
1. 6 ポアソンの方程式とラプラスの方程式	25
1. 7 導体系の静電界	32
1. 8 静 電 容 量	45
1. 9 コンデンサー	51
1.10 導体系の静電エネルギーおよび導体系に働く力	54
演 習 問 題	63

第2章 誘 電 体

2. 1 誘 電 体	65
2. 2 分 極	68
2. 3 電界と電束, 誘電率	75
2. 4 誘電体を含む系の静電界	82
2. 5 誘電体を含む系の静電エネルギーと, 誘電体に働く力	91
2. 6 誘電体の特殊現象	97
演 習 問 題	105

第3章 電 流

3. 1 定 常 電 流	107
3. 2 導体の性質, 抵抗	109
3. 3 電気回路, 起電力	116
3. 4 電気回路の法則	119

42469

3. 5 電 力	126
3. 6 連続導体中の電流	127
3. 7 電流に関連する諸現象	129
演習問題	133

第4章 真空中の静磁界

4. 1 磁気現象	135
4. 2 磁界の強さと磁束密度	137
4. 3 電流にもとづく磁界	139
4. 4 アンペアの周回路の法則	143
4. 5 磁位と磁気ベクトル・ポテンシャル	149
4. 6 磁界にもとづく力	160
演習問題	168

第5章 磁性体

5. 1 物質の磁気的性質	171
5. 2 磁 化	174
5. 3 磁性体の種類	179
5. 4 磁性体の存在する場合の磁界	186
5. 5 磁気回路	202
5. 6 磁界のエネルギー、磁性体に働く力	206
演習問題	207

第6章 電磁誘導

6. 1 電磁誘導	209
6. 2 インダクタンス	225
6. 3 磁界のエネルギーおよび力	234
6. 4 変位電流	246
6. 5 交流回路	253

第7章 電磁波

7. 1 マクスウェルの方程式の解	273
7. 2 平面波	276
7. 3 ポインティング・ベクトル	288

7. 4 電磁波の放射	292
さらに勉強するために	299

付 録

I. 1 クーロンの実験	1
I. 2 キャベンディッシュの実験	4
I. 3 ベクトル演算法	8
I. 4 配向分極率	18
II. 1 クーロンの法則から磁氣的諸量の導き方	21
II. 2 $\nabla^2 A$	28
II. 3 磁化 M の磁性体が存在し電流の存在しないとき、磁位 U_m から求めた磁界とベクトル・ポテンシャル A から求めた 磁界とが等しいことの証明	30
III. 1 電気単位系	31
III. 2 ローレンツ力方程式からマックスウェルの方程式の導き方	39

第 6 章

電 磁 誘 導

前章までの各章で、静止した電荷にもとづく静電界や、電荷の定常的な移動にもとづく電流および静磁界について論じてきた。本章では電界や磁界が時間的に変化する場合について考察する。

時間的に変化する電界や磁界について成り立つ法則の中には、静電界や静磁界について成立する法則がそのまま適用できるものもあるが、時間的に変化する場合に特有の現象もある。その現象には大別して二つあり、一つは、磁界が時間と共に変化するすると電界を発生する現象であり、他の一つは、逆に電界が時間と共に変化して磁界を発生する現象である。前者はファラデー (M. Faraday) によって実験的に発見された現象で、これを電磁誘導 (electromagnetic induction) の現象という。後者はマックスウェル (J. C. Maxwell) が理論的に導いたもので、磁界を発生する点で電束の変化が電流と同じ効果をもつことから、電束電流あるいは変位電流 (displacement current) とよんでいる。

本章では、まず電磁誘導の現象について説明し、次にインダクタンスの概念を述べて、インダクタンスを用いて、電磁誘導を表現している。次に磁界のエネルギーについて考察し、エネルギーおよび力を示す関係式を導いている。最後に変位電流を導入することにより、静磁界の関係式と電流の連続の方程式との間の矛盾を取り除くことができることを述べ、マックスウェルの方程式を導いた。また簡単に交流回路の取扱いについて説明を行なった。

6.1 電 磁 誘 導

a) ファラデーの実験

第4章で述べたように、1820年のエルステッドの実験以来、電流により磁界を生じること、すなわち電気によって磁気を発生し得ることが判明した。フ

ファラデーは電気によって磁気が発生できるならば、その反対に磁気によって電気を発生することが可能である筈と考えて、1824年以來、長年にわたっていろいろの実験を試みた。すなわちソレノイドの中に磁石を置いてみるとか、互いに絶縁した2本の導線を密着してコイル状に巻き、一方のコイルに電池により一定の電流を流してみるとか、その他いろいろ工夫したが、磁石の磁界や定常電流によって、コイルの導線に電流を誘起することは出来なかった。一方アラゴ (D. F. Arago) は1824年に、糸で吊して振動している磁針に、銅板を磁針の振動面に平行に近づけると、磁針の振動の減衰が増加することや、回転する銅板上に吊した磁針が銅板にひかれて回転することを発見している。しかし当時この現象のおこる理由を説明することはできなかった。

1831年になって、ファラデーは、前に述べたような実験装置で、磁石を動かしたり、一方のコイルの電流を流したり、電流を切ったりすると、瞬間的にコイルに電流が発生することを発見した。ファラデーは従来用いられていた検流計を改良して、瞬時電流を感度よく検出する装置を工夫し、いろいろ実験を繰り返して、コイルに鎖交する磁束が変化するとそのコイルに起電力を発生することを見出し、その起電力は鎖交する磁束の減少する割合に比例することを見出している。

これを**ファラデーの法則 (Faraday's law)**といい、この現象を**電磁誘導**という。

さてこのように電磁誘導の現象はファラデーにより実験的に見出されたものである。しかしエルステッド、ビオ、サバール、アンペール等によって実験的に見出された静磁界に関するいろいろの法則も、理論的には特殊相対性原理を用いてクーロンの法則から導くことができたように、電磁誘導の法則や変位電流による磁界の発生やこれらを取りまとめた電磁界に関するマックスウェルの方程式は、静電界および静磁界の関係式から、特殊相対性原理を用いて導くことができる。この導き方については付録Ⅲ.2に示してあるが、本章では付録に述べるような厳密な理論式の誘導ではなく、前章までの知識を利用して電磁誘導の法則や変位電流の概念が尤もらしいことを説明することにしよう。

b) 磁界中での回路の移動

電磁誘導の現象はいろいろな表われ方がある。ここではファラデーの実験的

発見とは別に、いままでに学んで知っている法則により理解できる現象から考えてゆくことにしよう。

(i) 一様な磁界中におかれた矩形の回路の一边が速度 u で移動しているとき回路に発生する起電力 図 6.1 に示すように z 方向に一様な磁束密度 B の磁界があるとき, xy 面に平行におかれた回路 ABCD の一边 AB が y 方向に速度 u で移動しているとする. この場合導体 AB 中の電荷には, 力

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (6.1)$$

が働く. 導体が金属の場合には自由電子(電荷 $-e$)がこの力の作用で移動するので, 回路が閉じていれば, この回路に電子の移動による電流が発生する. また回路が開いていると, (CD がきれているとき) B 端に電子が集積し, A 端に電子が不足して, A 端がプラスに B 端がマイナスに荷電し, AB 間に電位差を生じる. この場合導体 AB 中の自由電子は磁界による力 $\mathbf{F}_B$ と電荷によって生じる電界 $\mathbf{E}$ による力 $\mathbf{F}_E$ とが平衡している筈であるから

$$\mathbf{F}_B + \mathbf{F}_E = 0 \quad (6.2)$$

ただし,

$$\mathbf{F}_B = -e(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

の関係があるから,

$$\mathbf{F}_E = -e\mathbf{E} = e(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

となって,

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (6.3)$$

が成立する. したがって AB 間の電位差 V_{AB} は

$$V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = uB \quad (6.4)$$

となる. この場合運動している導体 AB に電位差 V_{AB} を生じるのは磁界の作用により導体 AB に起電力 V_0 が発生しているからであって, この起電力 V_0 は AB 間の電位差 V_{AB} と大きさが等しく符号が反対である. すなわち

$$V_0 = -V_{AB} = -uB \quad (6.5)$$

またこの起電力のもとになる電気力を $\mathbf{E}_M$ とすれば

$$\mathbf{E}_M = -\mathbf{E} = (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (6.6)$$

である.

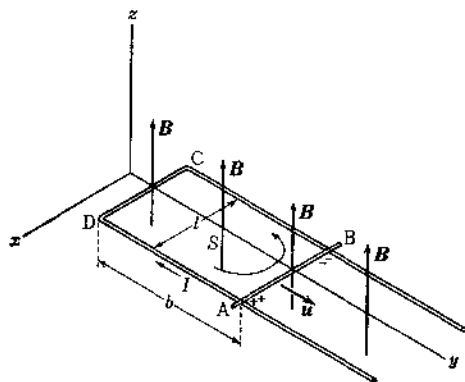


図 6.1 一様磁界中で一辺が移動する矩形回路

回路が閉じている場合でも運動している導体 AB 中には電気力 E_B が生じており, AB 間には起電力 V_0 が発生しているから, 閉回路 ABCDA の全抵抗が R のとき, この回路に流れる電流 I は

$$I = \frac{V_0}{R} = -\frac{ulB}{R} \quad (6.7)$$

でその方向は $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ となる.

この場合

$$u = \frac{dy}{dt}$$

であるから, AD の長さを b , ABCD の面積を S とすれば(6.5)から

$$V_0 = -ulB = -\frac{dy}{dt} lB = -\frac{d}{dt}(b lB) = -\frac{d}{dt}(SB)$$

となる. ここで回路 ABCD に鎖交する磁束を Φ_m とすれば

$$\Phi_m = SB$$

であるから

$$V_0 = -ulB = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (6.8)$$

となって, この回路に誘起する起電力は, 回路に鎖交する磁束の減少する割合であることがわかる. ただしこの場合起電力の方向は, 磁束の方向へ右ねじを

進ませるために、ねじを回転する方向を正にとる。

なお、運動する導体の一边が図 6.1 AB のような導線でなく、図 6.2 のように導体の板である場合にもこの回路に発生する起電力 V_0 は (6.5) で示される。

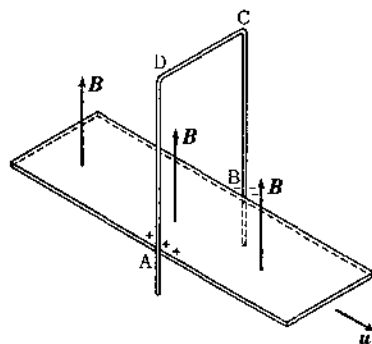


図 6.2 導体の板が移動する場合

(ii) 単極誘導 図 6.3(a) に示すように一様な磁束密度 B に平行な導体の軸をもった導体円板が角速度 ω で回転しているとき、軸と円板の端に導線を接続させて閉回路を作ると、この閉回路には起電力が発生する。この場合閉回路を形成する円板の一部 A_5 (円板の半径方向の長さ dr) に生ずる電気力 E_B は

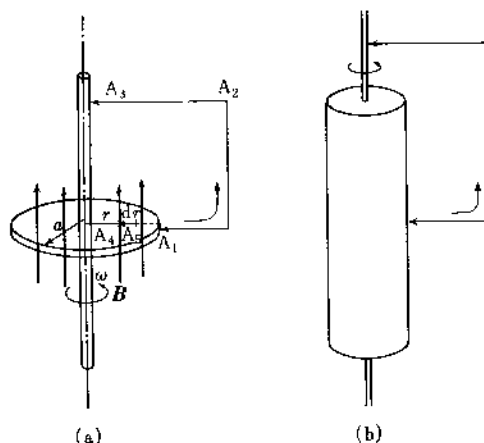


図 6.3 一様磁界中で回転させる円板と軸をむすぶ回路(a)と棒磁石を用いた場合(b)

$$\mathbf{E}_v = (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \omega r B \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \omega B \mathbf{r} \quad (6.9)$$

したがって、この閉回路に生ずる起電力は矢印の方向に

$$V = \int_0^a \omega B r \cdot dr = \frac{1}{2} \omega a^2 B \quad (6.10)$$

となる。なお図 6.3(a) のように外部から磁界を加えないで同図(b)のように棒磁石を用いた場合でも、磁石中の磁束密度を $\mathbf{B}$ とすれば、(6.9)、(6.10) が成立する。

この現象を単極誘導(unipolar induction)という。

(iii) 不均一な磁界中を運動するコイル 図 6.4 に示すように、たとえばソレノイド S に流れる電流によって生じる磁界中を矩形のコイルが速度 $\mathbf{u}$ で y 方向に運動しているとする。この場合導体 BC および DA 中の電子に働く力はそれぞれ導体 BC および DA に垂直でコイル中に起電力を発生しないが、導体 AB および CD 中の電子は磁界によって導体に沿った力をうけ、回路に起電力を発生する。いまある時刻に導体 CD の部分の磁束密度が $\mathbf{B}_1$ 、導体 AB の部分の磁束密度が $\mathbf{B}_2$ であるとすれば、このコイルの矢印のむきの起電力 V は

$$V = \int_C^D (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_1) \cdot d\mathbf{l} + \int_A^B (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_2) \cdot d\mathbf{l} = ul(B_1 - B_2) \quad (6.11)$$

となる。図 6.4 の場合には $B_1 > B_2$ であるから、このコイルには矢印の方向に起電力が発生することがわかる。また一様な磁界の場合には $B_1 = B_2$ で $V = 0$

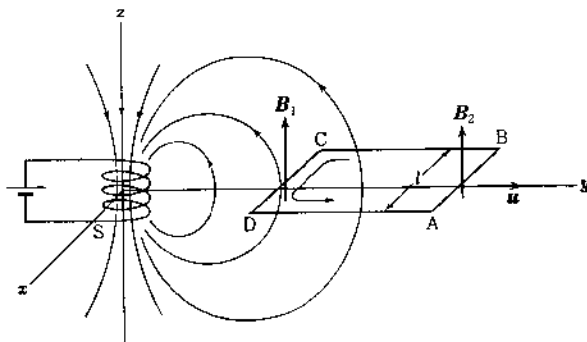


図 6.4 ソレノイドによる磁界中を移動する矩形コイル

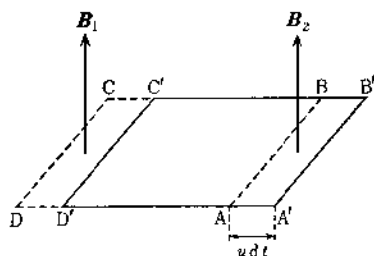


図 6.5 移動する矩形コイル

となりコイルには起電力を発生しない。

さて、いま時刻 t にコイルが図 6.5 の ABCD の位置にあり、時刻 $t+dt$ に A'B'C'D' の位置に移ったとすれば、 dt 時間の間にこのコイルを通り抜ける磁束の変化 $d\Phi_m$ は

$$d\Phi_m = -B_1 u dt + B_2 u dt = -(B_1 - B_2) u dt$$

したがって、(6.11) からこのコイルに生じる起電力は

$$V = u l (B_1 - B_2) = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (6.12)$$

となる。

すなわち、この場合もコイルに生じる起電力は、そのコイルに鎖交する磁束の数の減少する割合に等しいことがわかる。またこの起電力の向きに電流が流れると z 方向に磁束を生ずるから、コイルの運動によって生じる鎖交磁束の減少を妨げることになる。すなわち、電磁誘導によって生じる起電力は、コイルに鎖交する磁束の変化を妨げるような電流を流す向きに発生することがわかる。

これを**レンツの法則**(Lenz's law)という。

この関係は以上述べたような特別の形のコイルではなく図 6.6 のような一般的な形のコイルが運動している場合についても成立する。いま図 6.6 のように時刻 t において軌跡 C_1 にあったコイルの辺素 dl が速度 u で運動しているため、時刻 $t+dt$ には軌跡 C_2 に移動したとすれば、辺素 dl は $u dt$ だけ移動したことになる[†]。さて運動する導体に誘起する起電力は

[†] この場合場所によって速度 u が異なっても一向差支えない。

$$V = \oint_{C_1} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

であるが,

$$\begin{aligned} & \oint_{C_1} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= - \oint_{C_1} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \times d\mathbf{l}) \\ &= - \frac{1}{dt} \oint_{C_1} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} dt \times d\mathbf{l}) \end{aligned}$$

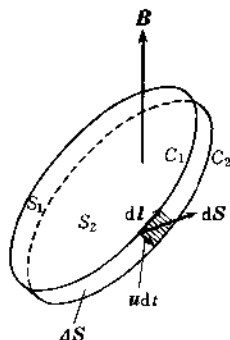


図 6.6 コイルが移動する場合

しかるに $\mathbf{u} dt \times d\mathbf{l} = d\mathbf{S}$ はコイルの移動により生ずる面素であるから

$$- \frac{1}{dt} \oint_{C_1} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} dt \times d\mathbf{l}) = - \frac{1}{dt} \int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

ここで

$$\int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = d\Phi_m$$

はコイルの移動によって生じたコイルに鎖交する磁束の変化であるから

$$V = \oint_{C_1} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

が得られる。

c) 時間的に変化する磁界中に静止した回路

回路が静止していても、磁界が変化すると、電磁誘導により回路に起電力を発生する。以下二三の例をあげて説明しよう。

(i) 磁石または電流の流れているソレノイドが移動するとき 図 6.7 に示すように、図 6.4 と同様の磁界を発生するソレノイドまたは磁石と、回路 ABCD が存在し、回路が静止していて、磁石またはソレノイドが左方に速度 $-\mathbf{u}$ で移動しているとする。この場合磁石に固定した座標系で観測したときは図 6.4 の場合に等しいから、この回路には

$$V = \int (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = u l (B_1 - B_2) = - \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (6.13)$$

の起電力が発生する。いま磁石の移動速度が光速に比べて非常に小さければ、磁石に固定した座標系で観測しても、回路に固定した座標系で観測しても、現象は殆んど変化しないようにみえるから†、図 6.7 の場合も同様の関係が成立すると考えることができる。

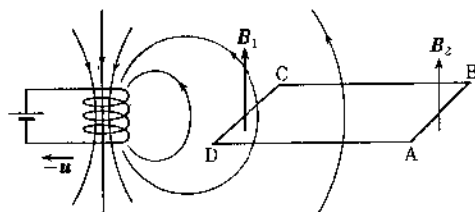


図 6.7 ソレノイドが移動する場合

いま回路 ABCD が非常に小さい場合を考え、回路 ABCD にかこまれた面積を ΔS とすれば、回路に発生する起電力 V は

$$V = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.14)$$

いま回路 ABCD が小さくて、回路内での磁束密度 $\mathbf{B}$ が一様とみなすことができれば

† 磁石に固定した座標系を $X'Y'Z'$ 、回路に固定した座標系を XYZ とし、それぞれの座標系で観測される電界の強さ、および磁束密度をそれぞれ $\mathbf{E}', \mathbf{E}, \mathbf{B}', \mathbf{B}$ とすれば、 $\mathbf{E}'=0$ で $\mathbf{B}'$ は座標系の移動する速度 $-\mathbf{u}$ に垂直であるから、付録 III.2 より

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (\mathbf{E}' + \mathbf{u} \times \mathbf{B}') = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left\{ \mathbf{B}' - \frac{1}{c^2} (\mathbf{u} \times \mathbf{E}') \right\} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

となる。

さて回路中の電荷 Q に働く力を $\mathbf{F}$ とすれば、回路に発生する起電力 V は $V = \frac{1}{Q} \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ であるから、電荷 Q は座標系 XYZ に対して静止していることを考慮して

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} = Q \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}'}{\sqrt{1-\beta^2}} = Q(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

したがって

$$V = \frac{1}{Q} \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

が得られる。

$$V = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \Delta \mathbf{S} \quad (6.15)$$

となる。

(ii) 変化する磁界中に静止している回路に誘起する起電力 図6.8に示すように、静止した微小回路があるとき、電流 I の流れているソレノイドが $-u$ の速度で運動していると、(6.15)に示す起電力が回路に発生する。すなわち、回路に誘起する起電力は、その回路の部分における磁束 $\mathbf{B}$ の時間的変化の割合によってきまる。

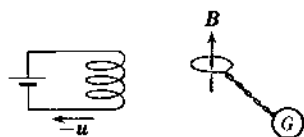


図 6.8 微小回路とソレノイド

いまソレノイドを動かす代りに、ソレノイドに流れる電流 I を変化して、ちょうど微小回路の存在する部分の磁束密度 $\mathbf{B}$ の変化がソレノイドを動かしたときと全く同様になるようにしたとすれば、回路にとってはソレノイドが運動しているときと何等の相違もないことになるから、(6.15)に示す起電力が発生する筈である。したがって、一般に任意の大きさの回路が存在する場合にも、その回路に鎖交する磁束が変化している場合には、その原因が磁石やソレノイドの運動にもとづくものであろうと、ソレノイドの電流の変化にもとづくものであろうと、次式によって与えられる

$$V = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (6.16)$$

なおこの場合図6.9のように同じ磁束 Φ_m に N 回鎖交する回路には N 倍の起電力が発生し

$$V = -N \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (6.17)$$

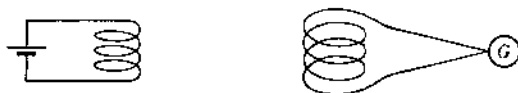


図 6.9 N 回鎖交する回路とソレノイド