高等财经院校试用教材

经济应用数学基础（一）

微积分

中国人民大学出版社

高等财经院校试用教材

经济应用数学基础(一)

微　　积　　分

中国人民大学数学教研室编

中国人民大学出版社

高等财经院校试用教材

经济应用数学基础（一）

微　积　分

中国人民大学数学教研室编

中国人民大学出版社出版
（北京西郊海淀路39号）
外　文　印　刷　厂　印　刷
新华书店北京发行所发行

开本：850×1168毫米32开　印张：10.875
1982年5月第1版　1982年10月第2次印刷
字数：284,000　册数：31,001—81,500
统一书号：13011·21　定价：1.35元

前　言

《经济应用数学基础》是受教育部委托编写的，共分五册：第一册《微积分》；第二册《线性代数》；第三册《概率论与数理统计》；第四册《线性规划》；第五册《运筹学通论》。这部书可作为高等学校财经专业的试用教材，也可作为财经工作者自学用书。

第一册《微积分》介绍了微积分学的基本知识。因各校学时不一致，书中有些内容加注了“※”号，时间不够时可略去不讲。

本书在编写过程中得到了兄弟院校的指导与帮助，谨在此表示感谢。由于我们水平不高，教学经验不足，书中一定有不少缺点和错误，请广大读者提出批评指正。

编　者

1981年12月

目　　录

第一章　函　数

§1.1　集合

（一）集合的概念

“集合”是数学中一个重要的概念，它在现代数学中起着非常重要的作用。

我们常常研究某些事物组成的集体，例如一班学生、一批产品、全体正整数等等，这些事物组成的集体都是集合。

一般说来，集合是具有某种属性的事物的全体，或是按照某一法则进行研究的对象的全体，构成集合的事物或对象，称为集合的元素。

下面举几个集合的例子：

例 1. 1980 年 2 月 1 日在北京市出生的人。

例 2. n 个生产部门。

例 3. $x^2-5x+6=0$ 的根。

例 4. 全体偶数。

例 5. 直线 $x+y-1=0$ 上所有的点。

通常，我们用大写字母 A、B、C……等表示集合，用小写字母 a、b、c……等表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作 a 属于 A 或 a 在 A 中；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\overline{\in} A$，读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中。

例 6. 如果 F 表示全体有理数的集合，则 $\frac{3}{5}\in F$，$\sqrt{2}\overline{\in} F$。

集合 A 中元素的数目称为 A 的基数（或势）。基数为有限数的集合，称为有限集合，如上面的例 1、2、3；基数不是有限数的集合，称为

无限集合，如上面的例 4、5。

（二） 集合的表示法

（1） 列举法：按任意顺序列出集合的所有元素，并用花括号{ }括起来。

例 1. 由 a、b、c、d 四个元素组成的集合 A，可表示为

$$A=\{a, b, c, d\}$$

例 2. 由 $x^2-5x+6=0$ 的根所构成的集合 A，可表示为

$$A=\{2, 3\}$$

用列举法表示集合时，必须列出集合的所有元素，不得遗漏和重复。

（2） 构造式法：设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则，A 为满足 $P(a)$的一切 a 构成的集合，则记为

$$A=\{a|P(a)\}$$

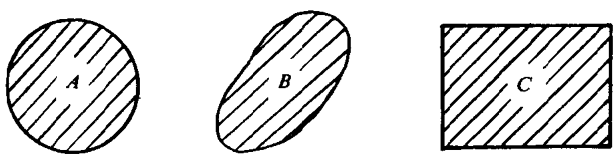
例 3. A 为$x^2-5x+6=0$ 的根构成的集合，可表示为

$$A=\{x|x^2-5x+6=0\}$$

例 4. A 为全体偶数的集合，可表示为

$$A=\{x|x=2n, n \text{ 为整数}\}$$

集合以及集合间的关系可以用图形表示，称为文氏图。文氏图是用一个简单的平面区域代表一个集合，如图 1-1。集合内的元素以区域内的点表示。



集合 A　　集合 B　　集合 C

图 1-1

（三） 空集与全集

不包含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$。

例 1. $x^2+1=0$ 的实根集合为空集。

例 2. 全班学生考试均及格，则不及格学生的集合为空集。

由所研究的所有事物构成的集合称为全集，记为 U。全集是相对的，一个集合在一定条件下是全集，在另一条件下就可能不是全集。例如，讨论的问题仅限于正整数，则全体正整数的集合为全集；讨论的问题包括正整数和负整数，则全体正整数的集合就不是全集。

(四) 子集

定义 1.1 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即"如果 $a \in A$，则 $a \in B$"，则称 A 为 B 的子集。记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A。如图 1-2。

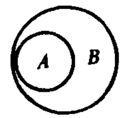


图 1-2

例 1. 设 N 表示全体自然数的集合，F 表示全体有理数的集合，则有

$$N \subset F$$

例 2. 设 A 表示全部产品的集合，B 表示全部废品的集合，则有

$$B \subset A$$

定义 1.2 设有集合 A 和 B，如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

例 3. 设 $A=\{x \mid x$ 为大于 1 小于 4 的整数$\}$

$B=\{x \mid x$ 为小于 5 的质数$\}$

则 $A=B$

根据定义有下列结论：

(1) $A \subset A$，即"集合 A 是其自己的子集"；

(2) 对任意集合 A，有 $\varnothing \subset A$，即"空集是任意集合的子集"；

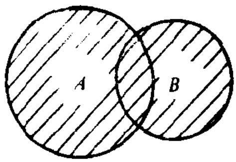
(3) 如果 $A \subset B$，$B \subset C$，则 $A \subset C$，即"集合的包含关系有传递性"。

(五) 集合的运算。

定义 1.3 设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$，如图 1-3，即

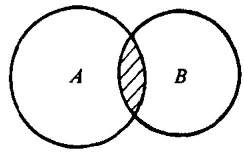
$$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

集合的并有下列性质：



$A \cup B$

图 1-3



$A \cap B$

图 1-4

(1) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$

(2) 对任何集合 A有

$A \cup \varnothing = A, A \cup U = U, A \cup A = A$

定义 1.4 设有集合 A 和 B, 由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合,称为 A 与 B 的交,记为 $A \cap B$。如图 1-4 的阴影部分,即

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

集合的交有下列性质:

(1) $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$

(2) 对任何集合 A, 有

$A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap U = A, A \cap A = A$

例1. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$, 则

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{3, 4\}$

例 2. 设 $A = \{a, b, c\}, B = \{a, b\}$, 则

$A \cup B = \{a, b, c\}, A \cap B = \{a, b\}$

例 3. 设 A 为某单位会英语的人的集合, B 为会日语的人的集合,则

$A \cup B$ 表示会英语或会日语的人的集合;

$A \cap B$ 表示既会英语又会日语的人的集合。

例 4. 设 $A = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}, B = \{x \mid x > 0\}$, 则

$A \cup B = \{x \mid x \geqslant -1\}$

$A \cap B = \{x \mid 0 < x \leqslant 1\}$

例 5. 如果 A 为奇数集合, B 为偶数集合, 则

$A \cup B = \{x \mid x \text{ 为奇数或偶数}\}$

$A \cap B = \varnothing$

如果 $A \cap B = \varnothing$，则称 A、B 是分离的，如图 1-5。

定义 1.5　设有集合 A 和 B，属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$。如图 1-6 的阴影部分，即

$A-B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \bar{\in} B\}$

例 6. 如果 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{1, 3, 5, 7\}$，则

$A-B=\{2, 4\}$

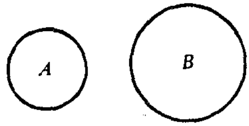


图 1-5

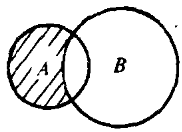


图 1-6

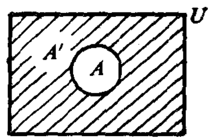


图 1-7

定义 1.6　全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合，称为 A 的补集，记为 A'，如图 1-7，即

$A'=\{x \mid x \in U \text{ 且 } x \bar{\in} A\}$

补集有下列性质：

$A \cup A'=U$，　$A \cap A'=\varnothing$

例 7. 设参加考试的学生为全集 U。

如果 A 表示及格的学生集合，则 A' 表示不及格的学生集合。

如果将考分分为优秀、良好、及格和不及格四类，以 A 表示考分为优秀或良好的学生集合，则 A' 表示考分为及格或不及格的学生集合。

例 8. 设 U 为全体正整数集合，A 为全体正奇数集合，则 A' 为全体正偶数集合。

例 9. 某地区的 100 个工厂，有 80 个工厂生产甲种机床，以集合 A 表示这些厂，有 61 个厂生产乙种机床，以集合 B 表示这些厂，有 55 个厂两种机床都生产。试用集合表示下列各类工厂，并计算出各类工厂的数目：

(1) 只生产甲种机床的工厂;

(2) 只生产乙种机床的工厂;

(3) 甲、乙两种机床中至少生产其中一种的工厂;

(4) 甲、乙机床都不生产的工厂。

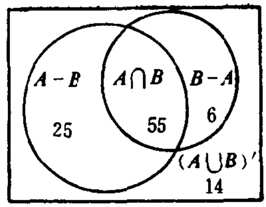


图 1-8

解: (1) 只生产甲种机床的工厂为 $A-B$, 工厂数目为

$80-55=25$(个);

(2) 只生产乙种机床的工厂为 $B-A$, 工厂数目为

$61-55=6$(个)

(3) 甲、乙两种机床中至少生产其中一种的工厂为 $A\cup B$, 工厂数目为

$55+25+6=86$(个)　或 $80+61-55=86$(个)

(4) 甲、乙机床都不生产的工厂为 $(A\cup B)'$, 工厂数目为

$100-86=14$(个)

(六) 集合运算律

(1) 交换律: (i) $A\cup B=B\cup A$

(ii) $A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律: (i) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

(ii) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配律: (i) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

(ii) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(4) 吸收律: (i) $(A\cup B)\cap A=A$

(ii) $(A\cap B)\cup A=A$

(5) 摩根律: (i) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

(ii) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

下面证明结合律的(i)和摩根律的(i), 作为示范, 其它几条定律可类似地证明。

结合律(i)的证明:

如果　　$x\in(A\cup B)\cup C$

则　　$x\in A\cup B$ 或 $x\in C$

即　　$x\in A$ 或 $x\in B$ 或 $x\in C$

因而　　$x\in A$ 或 $x\in B\cup C$

所以　　$x\in A\cup(B\cup C)$

由此可得　$(A\cup B)\cup C\subset A\cup(B\cup C)$

　　同理可证　$A\cup(B\cup C)\subset(A\cup B)\cup C$

所以　　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

　　下面用文氏图说明结合律(i)成立，如图 1-9。

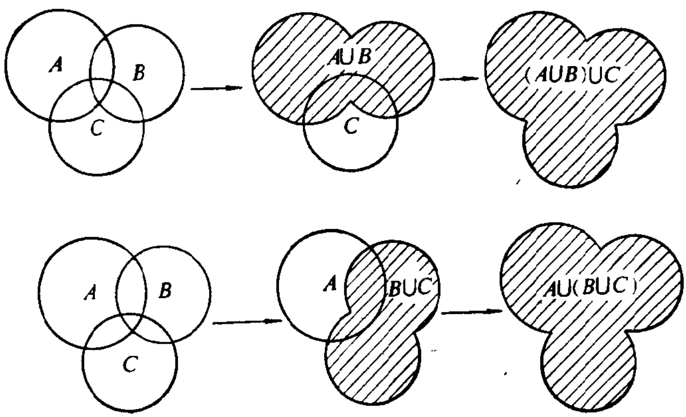


图　1-9

　　摩根律(i)的证明：

如果　　$x\in(A\cup B)'$，则 $x\overline{\in}A\cup B$

即　　$x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B$

亦即　　$x\in A'$ 且 $x\in B'$

因此　　$x\in A'\cap B'$

所以　　$(A\cup B)'\subset A'\cap B'$

反之，如果 $x\in A'\cap B'$，则 $x\in A'$ 且 $x\in B'$

即　　$x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B$

亦即　　$x\overline{\in}A\cup B$

因此　　$x\in(A\cup B)'$

所以　　$A'\cap B'\subset(A\cup B)'$

于是得到　$(A\cup B)'=A'\cap B'$

下面用文氏图说明摩根律(i)成立，如图 1-10。

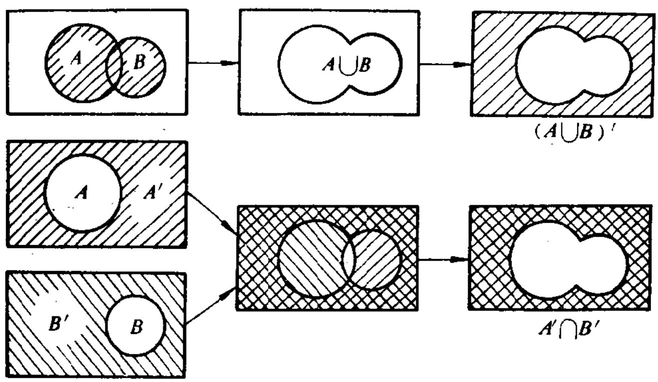


图　1-10

例 1. 设学生考试成绩分为优、良、中、差四类。如果 A 是成绩为优的学生集合，B 是成绩为良的学生集合，试验证摩根律(i)成立。

解：$A\cup B$ 是成绩为优或良的学生集合，因此，$(A\cup B)'$ 是成绩为中或差的学生集合。A' 是成绩为良或中或差的学生集合，B' 是成绩为优或中或差的学生集合，因此 $A'\cap B'$ 是成绩为中或差的学生集合。所以 $(A\cup B)'=A'\cap B'$。

例 2. 利用集合运算律证明：

$$(A\cap B)\cup(A'\cap B)=B$$

证：由分配律(i)有

$$(A\cap B)\cup(A'\cap B)=(A\cup A')\cap B=U\cap B=B$$

§1.2　实数集

(一) 实数与数轴

人们对数的认识是逐步发展的，先是自然数.继而发展到有理数（即正负整数，正负分数以及零），有理数可以表示为$\frac{p}{q}$，其中p、q都是整数，且$q \neq 0$，再进一步就发展到无理数（例如$\sqrt{2}$，π等都是无理数）。

设有一条水平直线，在这条直线上取定一点O，称为原点．规定一个正方向（习惯上规定由原点向右的方向为正方向），再规定一个长度，称为单位长度。这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为数轴。如图 1-11。

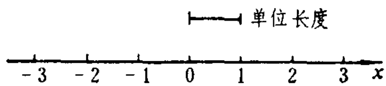


图 1-11

任何一个有理数$\frac{p}{q}$，都可以在数轴上找到一个点B与之对应，使得OB的长度与单位长度OA之比等于$\frac{p}{q}$，即$\frac{OB}{OA}=\frac{p}{q}$。这样得到的点$B$称为有理点，它是有理数$\frac{p}{q}$的几何表示，而$\frac{p}{q}$称为有理点的坐标。反之，数轴上任何一个有理点必对应于一个有理数。

任给两个有理数a、b ($a<b$)，则在a、b之间至少可以找到一个有理数c，使得$a<c<b$，例如$c=\frac{a+b}{2}$，同样地，在a、c之间也至少可以找到一个有理数d，使得$a<d<c$，依此类推，可知不论有理数a、b相差多么小，在a、b之间总可以找到无穷多个有理数，这就是有理数的稠密性。因为任何一个有理数必和数轴上的一个有理点相对应，因此数轴上任意两个有理点之间总可找到无穷多个有理点，即有理点在数轴上是处处稠密的。

虽然有理点在数轴上处处稠密，但是有理点尚未充满数轴。例如边长为 1 个长度单位的正方形，其对角线的长度为$\sqrt{2}$个长度单位，可以证明$\sqrt{2}$不是有理数，因此数轴上坐标为$\sqrt{2}$的点不是有

理点。这种点也有无穷多个，而且在数轴上也是处处稠密的。例如，坐标为$\sqrt{2}+1$，$\sqrt{2}+0.1$，$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{7}$，π 等的点都不是有理点。因此，数轴上除有理点之外还有无穷多个“空隙”，这些空隙处的点称为无理点，与无理点相对应的数(即无理点的坐标)称为无理数。

有理数与无理数统称为实数。实数充满数轴而且没有空隙，这就是实数的连续性。由此可知，每一个实数必是数轴上某一个点的坐标；反之，数轴上每一点的坐标必是一个实数，这就是说全体实数与数轴上的全体点形成一一对应的关系。全体实数所成的集合称为实数集，记为 R。今后我们所研究的数都是实数，为了简单起见，常常将实数和数轴上与它对应的点不加区别，用相同的符号表示，如点 a 和实数 a 是相同的意思。

（二）绝对值

在研究一些问题时，我们常常要用到实数绝对值的概念。下面介绍一下实数绝对值的定义及性质。

定义 1.7　一个实数 x 的绝对值，记为 $|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义：　$|x|$ 表示数轴上点 x（不论 x 在原点左边还是右边）与原点之间的距离。

绝对值及其运算有下列性质：

(1)　$|x|=\sqrt{x^2}$

(2)　$|x|\geqslant 0$

(3)　$|-x|=|x|$

(4)　$-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

因为 $x>0$ 时　$-|x|<x=|x|$

$x<0$ 时　$-|x|=x<|x|$

$x=0$ 时　$-|x|=x=|x|$

所以，总起来有 $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$。

(5)　如果 $a>0$，则下面两个集合相等：