高等学校教学参考书

微积分学教程

第一卷　第二分册

Г.М.菲赫金哥尔茨著

叶彦谦等译

（修订本）

人民教育出版社

高等学校教学参考书

微积分学教程

第一卷 第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

叶彦谦等译

（修订本）

人民教育出版社

本书第一卷根据菲赫金哥尔茨(Г. М. Фихтенгольц)著《微积分学教程》(Курс дифференциального и интегрального исчисления)第一卷1951年第三版译出，照1958年第四版修订，可作为综合大学数学专业教学参考书。

微积分学教程

第一卷　第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

叶彦谦等译

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

北京印刷三厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·0107　开本 850×1168 $^{1}/_{32}$　印张 $8\ ^{10}/_{16}$

字数 247,000　印数 88,301—146,500　定价(6) ¥0.85

1955年1月第1版

1959年9月第2版(修订本)1980年3月北京第13次印刷

第二分册目录

第五章　多元函数

第六章　函数行列式及其应用

第七章 微分学在几何上的应用

附录 函数推广的问题

第五章　多元函数

§1. 基本概念

159. 变量之間的函数关系·例題　到現在为止，我們只研究过两个变量的共同变动，而它們之中的一个依賴着另一个：由自变量的数値已能完全决定因变量或函数的数値。然而在科学上及生活上常会遇見出現有几个自变量的情形，于是要想确定函数的数値，就必須先确定所有这些自变量在同一个时候各自所取的数値。

1）例如，圓柱体的体积 V 是它的底半徑 R 及高 H 的函数；这些变量之間的关系用公式

$$V=\pi R^2H$$

来表示，由这公式，若已知自变量 R 及 H 的数値，就可以决定对应的 V 的数値。

圓錐台的体积 V 显然是三个自变量——两底的半徑 R 及 r 以及高 H 的函数，表示这函数的公式是：

$$V=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

2）按照欧姆定律，电路中的电压 V 与綫路的电阻 R 及电流 I 具有关系 $V=RI$。若 V 及 R 当作是已給的，則由此可确定 I 为 V 及 R 的函数：

$$I=\frac{V}{R}.$$

3）設有放在汽缸的活塞下面的一定質量的气体，其溫度不是固定不变的；則这气体的体积 V 及压力 p 都与它的（絕对）溫度 T 有关系，其

关系式称为克拉披隆(Клапейрон)公式:

$$pV=RT \quad (R=\text{常量}).$$

由此,例如認为 V 及 T 是自变量,則它們的函数 p 就可写成:

$$p=\frac{RT}{V}.$$

4) 研究任何物体的物理状态时往往需要观察它的各种性質随着点的变化。如:密度、溫度、电位等等。所有这些量都是'点的函数',換言之,就是点的坐标 x, y, z 的函数。若物体的物理状态随时間而变化,則在这些自变量內还要加上时間 t。在这情形我們就得到四个自变量的函数。

类似的例子讀者自己还可以任意举出許多来。

要想对于几个自变量的函数的概念給以准确的定义,我們先从最簡單的情形,当自变量有两个时开始。

160. 二元函数及其定义域 凡說及二自变量 x 及 y 的变动,我們每一次都应当指出,它們可以同时取値的数对 (x, y) 是哪一些;这些数对所成的集 $\mathscr{M}$ 就是变量 x, y 的变动区域。

函数概念的定义与一元函数时所給出的定义有同样的說法:

若对于集 $\mathscr{M}$ 中的每一对数値 (x, y)——依某一法則或規律——有一确定的 z 的数値(在 $\mathscr{Z}$ 內)与它們对应,則变量 z(其变动区域为 $\mathscr{Z}$)称为自变量 x, y 在集 $\mathscr{M}$ 中的函数。

在此处說及的是單値函数;很易推广这一定义使适用于多値函数。

上面說及的集 $\mathscr{M}$ 就是函数的定义域。变量 x, y——对于它們的函数 z 而言——称为它的变元。与一元函数时相类似,z 与 x, y 之間的函数关系表示为:

$$z=f(x, y), \quad z=\varphi(x, y), \quad z=z(x, y)\text{等等。}$$

若 (x_0, y_0) 是从 $\mathscr{M}$ 中取出的一个数对,則 $f(x_0, y_0)$ 就表示当 $x=x_0$, $y=y_0$ 时函数 $f(x, y)$ 所取的一个特別(数字)值。

兹举出几个解析地(即用公式)給定的函数的例題,并指出它們的定义域。公式:

$$1)\ z=xy \text{ 及 } 2)\ z=x^2+y^2$$

确定对于一切數对(x,y)全无例外的函数。公式:

$$3)\ z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ 4)\ z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

只被分别满足不等式 $x^2+y^2\leqslant 1$ 或 $x^2+y^2<1$

的那些数对(x,y)所适合(若我們只想得到有穷实数 z 的話)。

由公式:

$$5)\ z=\arcsin\frac{x}{a}+\arcsin\frac{y}{b}$$

所确定的,是其数值分别满足不等式

$$-a\leqslant x\leqslant a,\quad -b\leqslant y\leqslant b$$

的 x 及 y 的函数。

在一切这些情形中我們都指出了公式适用的最广闊的——自然的[46,2°]——范圍。

今再考察这样的例題。

6) 設三角形的各边在周長保持为常量 $2p$ 的条件下任意变化着。若用 x 及 y 表示它的二边,则第三边就是 $2p-x-y$,于是三角形可以由边 x 及 y 完全确定。問三角形的面积 z 与它們的关系怎样?

依海倫(Герон)公式,这面积表示为:

$$z=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

至于这函数的定义域 $\mathscr{M}$,在这一次,就应受到引入这函数的具体問題的限制。因为三角形的每一边是一个正数而且小于半周,所以应当满足不等式

$$0<x<p,\quad 0<y<p,\quad x+y>p;$$

它們就表現了区域 $\mathscr{M}$ ①的特征。

这样,虽然在一元函数的情形,作为变元的标准变动区域的只是(有穷的或无穷的)区間,而在二元函数的情形,我們已碰到变元的各种各样極其复杂的可能(和自然的)变动区域。

利用这些区域的几何說明来考察它們,常使事情变成非常簡易。若在平面上取互相垂直的二軸,再用通常的办法使它們上面的点各自和 x 或 y 的值相对应,那末大家知道,由每一对(x,y)可以單值地确定平面上的一点,它以这些数值作为自己的坐标,反之亦然。

于是,要表現出那些使函数有定义的数对(x,y),就只須簡單地指

---

① 虽然所得出的公式本身在更广的范圍內,例如对于 $x>p$ 及 $y>p$,仍保持有意义。

出它們所对应的点在 xy 平面上塡滿了怎样的圖形。

如此，就說，函数 1) 及 2) 定义于全平面内，函数 3) 及 4) 依次定义于閉的(即包括圓周在内)或开的(除去圓周)圓内(圖 89)；函数 5) 定义于矩形内(圖 90)；最后，我們仅在开的三角形(圖 91)内考察函数 6)。

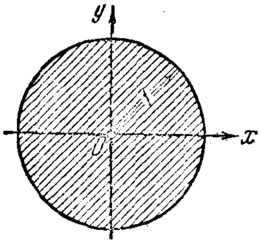

圖 89.

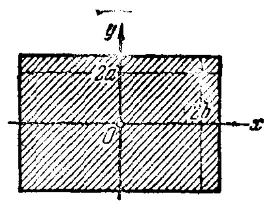

圖 91.

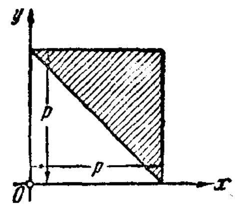

圖 92.

这种几何說明是如此的方便，以致通常就称数对(x, y)为‘点’而这种‘点’所成的集合也就依照其所对应的圖形的名称来称呼它。例如，滿足不等式

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

的‘点’集或数对(x, y)的集是‘矩形’，其度量等于 $b-a$ 及 $d-c$；将用記号$[a, b; c, d]$来表示它，与区間的表示法相类似。滿足不等式

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 \leqslant r^2$$

的‘点’集或数对(x, y)的集是中心在‘点’(α, β)而半徑为 r 的‘圓’，等等。

恰象函数 $y=f(x)$ 可用其圖綫来几何地說明一样 [47]，方程 $z=f(x, y)$ 也可以得到几何上的說明。在空間取以 x 軸、y 軸、z 軸組成的直角坐标系；再在 xy 平面上画出变量 x 及 y 的变动区域 $\mathscr{M}$，最后，在这区域中的每一点 $M(x, y)$作 xy 平面的垂綫，并在垂綫上按数值 $z=f(x, y)$ 来取点。这样所得的点的軌迹就是我們的函数的空間圖形。一般地說来，这是一个曲面；同时等式 $z=f(x, y)$ 就称为曲面的方程。

为了举例，在圖 92、93 及 94 中画着函数：

$$z=xy,\quad z=x^2+y^2,$$
$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

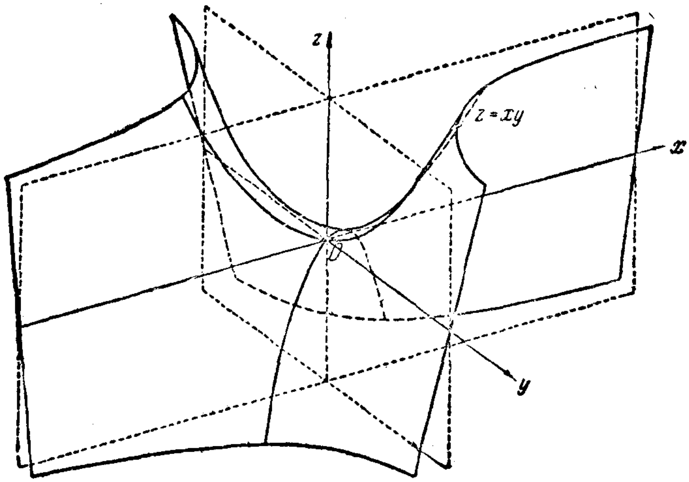

圖 92.

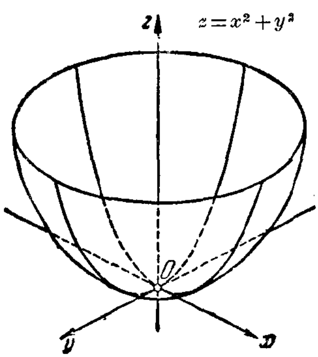

圖 93.

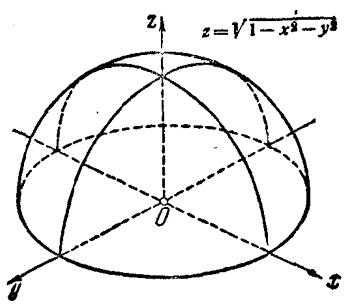

圖 94.

的几何圖形。其中第一个圖形是双曲抛物面，第二个是迴轉抛物面，第三个是半球面。

最后要講到，有时不得不考察变量 $x_{m,n}$，它的数值是用二自然数标 m 及 n 来編号的(m 与 n 各自独立地依自然数列而遞变)。在某种意义上来說，这种变量是整序变量 x_n 的推广。

例如，可以令

$$x_{m,n}=\frac{(m+n)!}{m!n!},\quad x_{m,n}=\frac{1}{m^2+n^2},\quad x_{m,n}=\frac{(m+1)\cdot n}{m\cdot(n+1)}\text{ 等等。}$$

事实上，标号 m 及 n 应該看作自变量，而变量 $x_{m,n}$ 看成是它們的函数。在当前的情形，自变量的变动区域可用第一象限內的全部方格子点作为其几何說明。

161. n 維算术空間 轉移到 n 个自变量($n\geqslant 3$)的函数，我們首先来考虑这些变量的协同数值組。

在 $n=3$ 时，讀者都明白，三数(x, y, z)所成的数值組还可以几何地解釋为空間的点，而这种数值的集則可以解釋为空間的一部分或几何学中的体。但在 $n>3$ 时已不可能再有直接的几何說明，因为我們幷沒有維数大于三的空間的直覚。

虽然如此，由于仍然希望把(对于二元及三元函数显得是有效的)那些几何方法扩充到更多个变元的函数的理論上去，在分析学内就引入了 n 維‘空間’的概念(n 可以大于 3)。

n 个实数所成的組 $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$① 称为(n 維的)‘点’；数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 就是这‘点’M的坐标。所有可以想象的 n 維的‘点’就組成一个 n 維‘空間’(它有时称为算术空間)。

引入两个(n 維)‘点’

$$M(x_1, x_2, \cdots, x_n)\text{ 与 }M'(x_1', x_2', \cdots, x_n')$$

之間的‘距离’$\overline{MM'}$ 的概念是有需要的。仿照大家知道的解析几何学

① 由于所論变量的个数沒有一定，所以不用不同的字母，而只用带有不同序号的同一字母来表示它們，显得更是方便。这样，x_i(与以前的用法相反)幷不表示某一变量的第 i 个值，而是表示可以具有許多不同数值的第 i 个变量本身。

中的公式，令

$$\overline{MM'}=\overline{M'M}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i'-x_i)^2}=$$

$$=\sqrt{(x_1'-x_1)^2+(x_2'-x_2)^2+\cdots+(x_n'-x_n)^2}; \qquad (1)$$

在 $n=2$ 或 3 时这‘距离’与对应的两几何点之間的通常距离相同。

若再取一‘点’

$$M''(x_1'', x_2'', \cdots, x_n''),$$

則可以証明，‘距离’$\overline{MM'}$, $\overline{M'M''}$ 及 $\overline{MM''}$ 满足不等式

$$\overline{MM''}\leqslant\overline{MM'}+\overline{M'M''}, \qquad (2)$$

这便是大家知道的几何定理：“三角形的一边不大于其他二边之和”。

实际上，对于任何两組实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 常成立不等式

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$ ①

若在此处令

$$a_i=x_i'-x_i,\quad b_i=x_i''-x_i',\quad \text{于是}\ a_i+b_i=x_i''-x_i,$$

$$(i=1, 2, \cdots, n),$$

---

① 这个不等式不是别的，而是我們曾經遇到的閔可夫斯基不等式［133(7)］在 $k=2$ 时的特殊情形。如果将它两边各自平方并消去相等的項，則它就变成大家熟知的柯西不等式［133(5a)］。对柯西不等式 同时，也对書中的不等式我們举一个十分初等的証明。

二次三項式

$$\sum_{i=1}^{n}(a_ix+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot x^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\cdot x+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

显然不能取負值。在这个情形它不能有两个不同的实根，因而表达式

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2-\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right\}^2$$

应当是非負的．这就相当于柯西不等式。

則得

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x''_i-x_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x'_i-x_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x''_i-x'_i)^2},$$

这就相当于(2)。这样,距离的这一重要性質在我們的‘空間’中也同样成立。

在 n 維‘空間’內也可以考察連續‘曲綫’。

大家知道[106],方程式

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

(此处的 $\varphi(t)$及 $\psi(t)$是参变量 t 的函数,在某一区間$[t', t'']$是連續的)表示平面上的連續曲綫。类似于此,但用三个連續函数:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)\quad (t'\leqslant t\leqslant t''),$$

就可表示(通常)空間中的連續曲綫。仿此,今考察 t 的 n 个連續函数:

$$x_1=\varphi_1(t),\quad x_2=\varphi_2(t),\cdots,\quad x_n=\varphi_n(t)\quad (t'\leqslant t\leqslant t''),$$

則当参变量 t 取不同数值时所得的‘点’集

$$(\varphi_1(t),\quad \varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)),$$

就組成 n 維‘空間’內的連續‘曲綫’。令

$$x'_1=\varphi_1(t'),\cdots,x'_n=\varphi_n(t');\quad x''_1=\varphi_1(t''),\cdots,x''_n=\varphi_n(t''),$$

就可以說,这‘曲綫’連接着两‘点’

$$M'(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)\text{ 与 }M''(x''_1,x''_2,\cdots,x''_n).$$

当所有的 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 都是綫性函数时,‘曲綫’就变成‘直綫’:

$$x_1=\alpha_1 t+\beta_1,\cdots,x_n=\alpha_n t+\beta_n;$$

其中系数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 假定不全等于零,而 t 从 $-\infty$ 变至 $+\infty$。我們将算作这直綫上的‘点’是依着参变量漸增的次序一个跟着一个的;若 $t'<t<t''$,則在对应的‘点’ M', M, M'' 內,‘点’M就位于其他两点之間,因为它在 M' 之后而又在 M'' 之前。在这些条件之下,容易証明,它們之間的距离满足于关系式:

$$\overline{M'M''}=\overline{M'M}+\overline{MM''},$$

这正是通常空間内的直綫的特性。

經过二給定‘点’

$$M'(x_1', \cdots, x_n') \text{ 及 } M''(x_1'', \cdots, x_n'')$$

的‘直綫’的方程式显然可以写成：

$$x_1=x_1'+t(x_1''-x_1'), \cdots, \quad x_n=x_n'+t(x_n''-x_n')$$
$$(-\infty<t<+\infty),$$

于此令 $t=0$ 及 1，就得到‘点’M' 及 M''。又若使 t 从 0 变至 1，就得到連接这两‘点’的‘直綫段’。

由有穷数的‘直綫段’所組成的‘曲綫’称为‘折綫’。

162. n 維空間内的区域举例 今轉而考察一些 n 維‘空間’内的‘体’或‘区域’的例子。

1）坐标各自互相独立地满足于不等式

$$a_1\leqslant x_1\leqslant b_1, \quad a_2\leqslant x_2\leqslant b_2, \cdots, \quad a_n\leqslant x_n\leqslant b_n$$

的一切‘点’$M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$所成的集，称为（n 維）‘長方体’，并記成：

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n].$$

在 $n=2$ 时，就由此得出[160]内曾經講及的‘長方形’；通常空間中的長方体則对应于三維‘長方体’。

若在前面写着的关系式内去掉等号，得到

$$a_1<x_1<b_1, \quad a_2<x_2<b_2, \cdots, \quad a_n<x_n<b_n,$$

就可用它們来定义开的‘長方体’：

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n),$$

因为要与它区别，前一个就称为閉的‘長方体’①。差 $b_1-a_1, b_2-a_2, \cdots, b_n-a_n$ 称为两种長方体的度量，而点

① 也可以考察无穷‘長方体’，如果确定它的各区間（或其中的某几个）是无穷区間时。在說及 n 維‘長方体’时，若沒有特别声明，我們总是指有穷‘長方体’。

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2},\ \frac{a_2+b_2}{2},\ \cdots,\ \frac{a_n+b_n}{2}\right)$$

称为它們的**中心**。

任一中心在 M^0 的开的'長方体'

$$(x_1^0-\delta_1, x_1^0+\delta_1;\ x_2^0-\delta_2, x_2^0+\delta_2;\ \cdots;\ x_n^0-\delta_n, x_n^0+\delta_n) \tag{3}$$

$(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n>0)$称为'点' $M^0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$的**邻域**，最常遇見的邻域是'立方体'：

$$(x_1^0-\delta, x_1^0+\delta;\ x_2^0-\delta, x_2^0+\delta;\ \cdots;\ x_n^0-\delta, x_n^0+\delta)$$

$(\delta>0)$，其一切度量都相等$(=2\delta)$。

2）考察坐标满足不等式

$$x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, \cdots, x_n\geqslant 0,\quad x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant h\quad (h>0)$$

的一切'点' $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$所成的集。在 $n=2$ 时对应于这集的几何圖形是等腰直角三角形，在 $n=3$ 时是四面体（圖 95）。在一般情形称它为**最簡体**①（这里是**閉的**最簡体，以区别于在上列不等式內去掉等号而得出的**开的**最簡体）。

3）最后，若 $M_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$是定'点'，而 r 是正常数，則由不等式

$$(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2\leqslant r^2\ (\text{或}<r^2)$$

所确定的一切'点' $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$所成的集，称为**閉的**（或**开的**）n 維'球'，其半徑为 r，而中心在'点' M_0 处。換句話說，'球'是所有与某一定'点'M_0 的'距离'不超过（或小于）r 的点所成的集。这是很清楚的，$n=2$ 时的'球'就是圓［参閱 160］，$n=3$ 时就是通常的球。

中心在点 $M_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$处而有任意半徑 $r>0$ 的开'球'也可以看作这点的**邻域**；要使它区别于我們先前引入的那种'長方体形'的邻域，就称它为'球形'的邻域。

---

① 按拉丁文 simplex 的意思是'簡單的'；实际上，**最簡体**就是最簡單的多面'体'，对于所給定空間而言，它具有最少数目的面。

茲証明下一經常要用到的事实：已給一个‘点’M_0的上述任一类型的邻域时，一定可以找到M_0的一个另一类型的邻域，使得后者包含于前者之中。

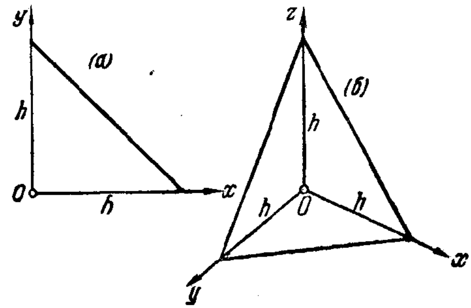

圖 95.

設首先給定中心在‘点’M_0处的‘長方体’(3)。那末，要取有同一中心的开‘球’，使它包含在所給‘長方体’之內，只要取开‘球’的半徑r小于一切$\delta_i (i=1, 2, \cdots, n)$就够了。实际上，对于这球內的任一‘点’$M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$(对每一$i=1, 2, \cdots, n$)将有：

$$|x_i - x_i^0| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2} = \overline{MM_0} < r < \delta_i$$

或

$$x_i^0 - \delta_i < x_i < x_i^0 + \delta_i,$$

于是这点必屬于給定的‘長方体’。

反之，若給定中心在M_0而半徑为r的‘球’，那末‘長方体’(3)，例如，在$\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_n = \frac{r}{\sqrt{n}}$时就包含在它里面。因为这‘長方体’中任一‘点’$M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$距‘点’$M_0$的‘距离’是

$$\overline{MM_0} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2} = r,$$

所以，它也屬于給定的‘球’。

163. 开域及閉域的一般定义 若‘点’$M'(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$連同它的充分小的邻域都屬于($n$維‘空間’內的)集$\mathscr{M}$，則称‘点’$M'$是集$\mathscr{M}$的內‘点’。

由前一段末所证明的论点很明显地推得，此处所论及的邻域的类型，不论是‘长方体形的’或是‘球形的’，并不影响于内点的定义。

开的‘长方体’

$$(a_1, b_1; \cdots; a_n, b_n) \tag{4}$$

的每一‘点’都是内‘点’。实际上，若

$$a_1 < x_1' < b_1, \cdots, a_n < x_n' < b_n,$$

则容易找出这种 $\delta > 0$，使得

$$a_1 < x_1' - \delta < x_1' + \delta < b_1, \cdots, \quad a_n < x_n' - \delta < x_n' + \delta < b_n.$$

仿此，对于中心在‘点’M_0处而半径为 r 的开‘球’，属于它的每一‘点’M' 也都是它的内‘点’。若取 ρ 使合于

$$0 < \rho < r - \overline{M'M_0},$$

并以 M' 为中心作出半径为 ρ 的‘球’，则它必全部包含在原来的‘球’内：因为只要 $\overline{MM'} < \rho$，就有[160，(2)]

$$\overline{MM_0} \leqslant \overline{MM'} + \overline{M'M_0} < \rho + \overline{M'M_0} < r,$$

于是‘点’M 亦属于原来的‘球’。

关于开的最简体：

$$x_1 > 0, \cdots, x_n > 0, x_1 + \cdots + x_n < h \quad (h > 0),$$

也可以作出同样的结论。

这种完全由内‘点’所组成的集就称为开‘域’。

这样，开‘长方体’、开‘球’、开的最简体都是开‘域’的例子。

现在再把聚点的概念[52]推广到 n 维‘空间’内的集 $\mathscr{M}$ 的情形去。若在‘点’M_0 的任一邻域（不论什么类型）内总包含着集 $\mathscr{M}$ 中的至少一个异于 M_0 的‘点’，则‘点’M_0 称为集 $\mathscr{M}$ 的‘聚点’。

开‘域’的‘聚点’而不属于这域的称为它的界‘点’。界‘点’的全体组成‘域界’。开‘域’连同着它的‘界’就称为闭‘域’。

不难看出，只有满足诸式：

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \cdots, \quad a_n \leqslant x_n \leqslant b_n,$$