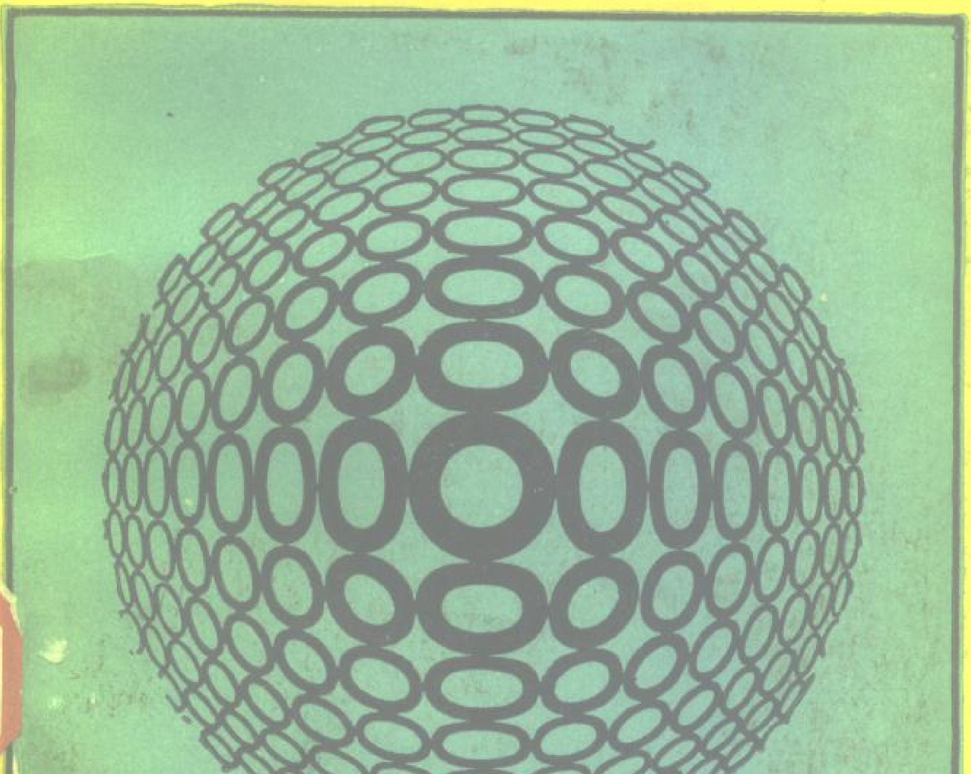
n端口网络



n 端口网络

周庭阳编

高等教育出版社

内 容 简 介

本书介绍 n 端口网络的短路、开路、混合以及散射参数矩阵，引进一系列通过图论计算参数的公式，同时介绍含源 n 端口网络的各种源向量。全书共分五章，即：n 端口网络的短路参数、n 端口网络的开路参数、n 端口网络的混合参数、n 端口网络的散射矩阵和含源 n 端口网络。

本书可供大专院校电类专业的师生和研究生阅读，也可供电气、电子工程技术人员、科研人员参考。

责任编辑　崔万胜

n 端口网络
周　庭　阳　编
*
高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
三河科教印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/32　印张 6.375　字数132 000
1991年 8 月第 1 版　1991年 8 月第 1 次印刷
印数 0001—1425册
ISBN 7-04-003018-7/TM·155
定价3.00元

前　　言

n 端口网络对于分析微电子网络、电力网络、声道网络等等都有实用价值，电路状态方程的建立、非线性电路的分析、电路综合以及模拟电路故障诊断等课题都可以通过 n 端口网络的方程进行研究。许多电网络教科书和参考书中均涉及 n 端口网络的内容，但是缺少专门论述 n 端口网络的书藉。本书较系统地论述了 n 端口网络的参数和性质，引入了许多计算参数矩阵的算例。书中有些公式未在别的著作中出现过，例如计算 Y、Z、H 参数矩阵的图论公式，连接有效性的判别式，含源网络源向量的转换公式等，均有较大的参考价值。

本书承天津大学杨山教授审阅，提出了许多宝贵意见，在此致以深切的感谢。

由于作者水平所限，错误和不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

作　者

1988.6

目　　录

概　述

n端口网络的理论对于分析微电子电路、测量技术、故障诊断、电力系统、状态方程、非线性电路等方面都有重要的价值，在电路分析和综合方面也有一定的地位。在高等学校电路课程中已经详细讨论过一端口、二端口网络，本书将在此基础上进一步讨论端口数 $n>2$ 的情况，使这方面的理论更加系统、完整。

关于“端口”的概念，电路课程中已说明：即每一端口的两个端子电流必须两两成对，也就是由一端流入的电流必须等于另一端流出的电流。因此，n 端口网络是一 $2n$ 端网络，但 $2n$ 端网络通常不是 n 端口网络。一个 n 端网络，选其中一个端点的引出线作为公共回线(参考点)后，则可作为$(n-1)$端口网络。

在本书中端口电压、电流以及内部阻抗、导纳等参数将以相量、复数形式为主，实际上也适用于拉氏变换的形式，只需将 $j\omega$ 换为复变量 s 即可。对于直流情况则变为实数变量及方程。端口电压的参考方向一概采用从不带撇“′”的点指向带撇“′”的点，即 1、2、…、n 为正极性，$1'$、$2'$、…、n' 为负极性；端口电流的参考方向一概由 1、2、…、n 等端点进去，$1'$、$2'$、…、n'等端点出来。

在进行讨论之前，对网络的分类，即时变与非时变、线性与非线性、互易与非互易、有源与无源等概念必须有一个大体

上的了解，以下分别给予叙述。

若网络对激励源组 $e_1(t)$、$e_2(t)$、…、$e_m(t)$ 的响应为 $r(t)$，而对激励源组 $e_1(t+t_0)$、$e_2(t+t_0)$、…、$e_m(t+t_0)$的响应为 $r(t+t_0)$，则称其为非时变网络，否则为时变网络。非时变网络的所有电阻、电感、电容及受控源的控制系数等都不是时间的函数。本书限于讨论非时变网络。

若网络对 $e_1(t)$的零状态响应为 $r_1(t)$，对 $e_2(t)$的零状态响应为 $r_2(t)$，而对 $k_1e_1(t)+k_2e_2(t)$的零状态响应为 $k_1r_1(t)+k_2r_2(t)$，则称其为线性网络，否则为非线性网络。线性网络满足叠加定理。线性网络由 R、L、C、线性受控源和独立源等线性元件构成。

若对所有时间 t，对任何电压和由此电压引起的电流，提供给网络的能量

$$\int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\tau)\boldsymbol{i}(\tau)\mathrm{d}\tau\geqslant 0,$$

则称其为无源网络，否则即有源网络。上式 $\boldsymbol{u}(t)$、$\boldsymbol{i}(t)$分别为瞬时值形式的端口电压与电流向量。上标“T”为转置，所以 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i}$ 就是输入 n 端口网络总的瞬时功率，积分后为任一瞬间的总输入能量。上式说明，在任何条件下不会有总的能量输出的网络为无源网络。由正值 R、L、C 元件组成、不含独立源和受控源的网络为无源网络；包含独立源的网络通常为有源网络；包含受控源的网络不一定就是有源网络，例如理想回转器符合上式关系属于无源网络，但它又是包含受控源的网络。

符合互易定理的网络称为互易性网络，否则为非互易性网络。互易网络的节点导纳矩阵或回路阻抗矩阵是对称矩阵。

包含受控源的网络一般都是非互易网络。

此外，称纯电抗构成的网络为无损网络。对于无损网络，能量只会输入储存或返回电源，不会转化为热能等损耗掉。正弦稳态状况下、输入无损网络一周期内的平均功率为零。

本书重点讨论线性网络，个别处也分析一些非线性情况。前四章讨论不包含独立源的网络，第五章讨论包含独立源的网络，简称为含源 n 端口网络。所有章节互易和非互易网络并用，但读者应注意区分它们间的特点。

第一章　n 端口网络的短路参数

§1-1　用 Y 参数表示的基本方程

n 端口网络共有 n 个端口电压及 n 个端口电流变量，若以 n 个端口电压来表示 n 个端口电流，则可得一组线性方程。如图 1-1 所示的 n 端口网络，应用替代定理将全部端口用电

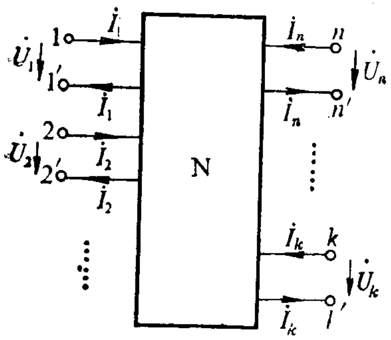


图　1-1

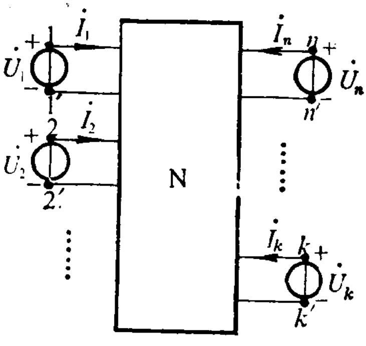


图　1-2

压源替代后如图 1-2 所示。再应用叠加定理后各端口的电流可表示为

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_1&=Y_{11}\dot{U}_1+\cdots+Y_{1k}\dot{U}_k+\cdots+Y_{1n}\dot{U}_n\\&\cdots\cdots\\\dot{I}_k&=Y_{k1}\dot{U}_1+\cdots+Y_{kk}\dot{U}_k+\cdots+Y_{kn}\dot{U}_n\\&\cdots\cdots\\\dot{I}_n&=Y_{n1}\dot{U}_1+\cdots+Y_{nk}\dot{U}_k+\cdots+Y_{nn}\dot{U}_n\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}1)$$

图 1-2 中每个电压源单独作用时(其余端口均短路)，任

一端口的电流与该电压源成正比，其比例系数具有导纳的量纲故用Y表示。其中任一系数可表示为

$$Y_{jk}=\left.\frac{\dot{I}_j}{\dot{U}_k}\right|_{k\text{除外的全部端口短路}} \qquad 1\leqslant j,k\leqslant n, \tag{1-2}$$

当$j=k$时，即得

$$Y_{kk}=\left.\frac{\dot{I}_k}{\dot{U}_k}\right|_{k\text{除外的全部端口短路}} \qquad 1\leqslant k\leqslant n \tag{1-3}$$

所以Y_{kk}就是其余端口短路情况下第k端口的入端导纳。由式(1-2)可知，当$j\neq k$时，Y_{jk}相当于其余端口短路，在第k端口施以单位电压源时第j端口的电流，也即端口j短路时在端口k处的转移导纳。因为这些参数都是在端口短路情况下的入端或转移导纳，所以也称它们为短路参数，或简称为Y参数。对于互易性网络，根据互易定理可知

$$Y_{jk}=Y_{kj} \tag{1-4}$$

称式(1-1)是用Y参数表示的n端口网络的基本方程。式(1-1)可写为矩阵形式，即

$$\dot{\mathbf{I}}=\mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}} \tag{1-5}$$

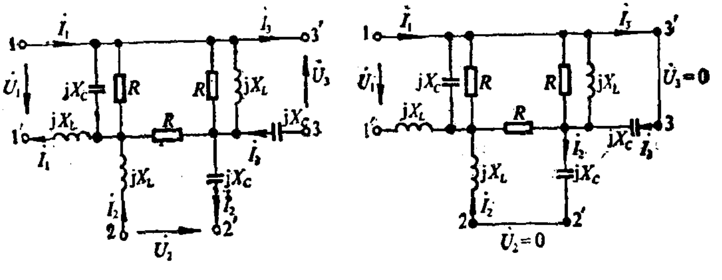
其中$\dot{\mathbf{I}}$、$\dot{\mathbf{U}}$分别为端口电流、电压向量；$\mathbf{Y}$称为短路参数矩阵，或简称为Y参数矩阵。

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\mathbf{I}}&=[\dot{I}_1\ \cdots\ \dot{I}_k\ \cdots\ \dot{I}_n]^T\\
\dot{\mathbf{U}}&=[\dot{U}_1\cdots\ \dot{U}_k\ \cdots\ \dot{U}_n]^T\\
\mathbf{Y}&=\begin{bmatrix}
Y_{11} & \cdots & Y_{1k} & \cdots & Y_{1n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
Y_{k1} & \cdots & Y_{kk} & \cdots & Y_{kn}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
Y_{n1} & \cdots & Y_{nk} & \cdots & Y_{nn}
\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

由式(1-4)可知，对于互易性网络，Y 参数矩阵为对称矩阵。应该指出，有些 n 端口网络 Y 参数矩阵是不存在的，例如将理想变压器视为二端口网络，其 Y 参数矩阵即不存在。

式(1-1)或式(1-5)说明：对于一个 n 端口网络，通常都可以用一个矩阵来表征它。n 端口网络内部可以有上千万个元件，可以相当复杂，但为了分析端口电压，电流之间的关系，这 n^2[对互易网络为 $(n^2+n)/2$]个参数就足以表征它的特性。当网络的连接信息和参数值给定，按式(1-2)、(1-3)即可计算 Y 参数。

例 1-1 图1-3(a)所示的三端口网络中，$R=12\Omega$, $X_C=X_L=6\Omega$，试求 Y 参数矩阵。



(a) (b)

图 1-3

解 图(a)无受控源，为互易网络。将端口 2 与 3 短路，即 $\dot{U}_2=\dot{U}_3=0$，再令 $\dot{U}_1=1$ V，由式(1-2)可知，此时 $\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$、$\dot{I}_3$ 的数值即分别等于 Y_{11}、Y_{21}、Y_{31}。由图 1-2(b)得

$$Y_{11}=\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\bigg|_{\substack{\dot{U}_2=0\\ \dot{U}_3=0}}=\frac{1}{\mathrm{j}X_L+\dfrac{-\mathrm{j}X_C R/2}{R/2-\mathrm{j}X_C}}=\frac{1}{\mathrm{j}6+\dfrac{-\mathrm{j}36}{6-\mathrm{j}6}}$$

$$=\frac{1}{3+\mathrm{j}3}=1/6-\mathrm{j}1/6\mathrm{S}$$

$$Y_{12}=Y_{21}=\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\bigg|_{\substack{\dot{U}_2=0\\ \dot{U}_3=0}}=\dot{I}_1\frac{-\mathrm{j}X_C}{R/2-\mathrm{j}X_C}\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{3+\mathrm{j}3}\frac{1}{2+\mathrm{j}2}=-\mathrm{j}1/12\ \mathrm{S}$$

$$Y_{13}=Y_{31}=\frac{\dot{I}_3}{\dot{U}_1}\bigg|_{\substack{\dot{U}_2=0\\ \dot{U}_3=0}}=\frac{R\dot{I}_2}{-\mathrm{j}X_C}=1/6\ \mathrm{S}$$

将图 1-3(a)的端口 11′、33′短接，在 22′ 端口施以单位电压源，同理可得

$$Y_{22}=\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\bigg|_{\substack{\dot{U}_1=0\\ \dot{U}_3=0}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{2R}=1/8\ \mathrm{S}$$

$$Y_{23}=Y_{32}=\frac{\dot{I}_3}{\dot{U}_2}\bigg|_{\substack{\dot{U}_1=0\\ \dot{U}_3=0}}=\frac{\frac{1}{3}R\dot{I}_2}{-\mathrm{j}X_C}=\mathrm{j}1/12\ \mathrm{S}$$

当端口 1,2 短路，端口 3 的入端导纳

$$Y_{33}=\frac{1}{-\mathrm{j}X_C+\frac{\mathrm{j}X_LR/2}{R/2+\mathrm{j}X_L}}=\frac{1}{-\mathrm{j}6+\frac{\mathrm{j}36}{6+\mathrm{j}6}}=\frac{1}{3\text{-}\mathrm{j}3}=\frac{1}{6}+\mathrm{j}\frac{1}{6}\ \mathrm{S}$$

最后得Y参数矩阵

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}1/6-\mathrm{j}1/6 & -\mathrm{j}1/12 & 1/6\\ -\mathrm{j}1/12 & 1/8 & \mathrm{j}1/12\\ 1/6 & \mathrm{j}1/12 & 1/6+\mathrm{j}1/6\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{Y}$ 中元素的单位是 S，下文中对于导纳矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 和阻抗矩阵 $\mathbf{Z}$，如果元素的单位是 S 或 Ω，就不另作说明了。

例 1-2 图 1-4 所示四端口网络的 $R=X_L=X_C=10\Omega$，$\alpha=5$，试求矩阵 $\mathbf{Y}$。

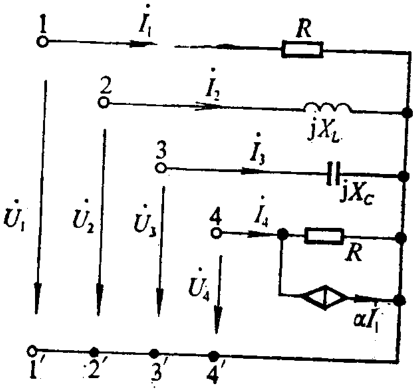


图 1-4

解 令 $\dot{U}_1=1$ V，$\dot{U}_2=\dot{U}_3=\dot{U}_4=0$，由图 1-4 电路得

$\dot{I}_1=\dot{U}_1/R=0.1$ A，$\dot{I}_2=\dot{I}_3=0$，$\dot{I}_4=\alpha\dot{I}_1=0.5$ A，故知 $Y_{11}=0.1$ S，$Y_{21}=Y_{31}=0$，$Y_{41}=0.5$ S

又令 $\dot{U}_2=1$ V，$\dot{U}_1=\dot{U}_3=\dot{U}_4=0$，可得

$\dot{I}_2=\dot{U}_2/\mathrm{j}X_L=-\mathrm{j}0.1$ A，$\dot{I}_1=\dot{I}_3=\dot{I}_4=0$，

故知

$Y_{22}=-\mathrm{j}0.1$ S，$Y_{12}=Y_{32}=Y_{42}=0$

同理可得 $Y_{33}=\mathrm{j}0.1$ S，$Y_{13}=Y_{23}=Y_{43}=0$，$Y_{44}=0.1$ S，$Y_{14}=Y_{24}=Y_{34}=0$。最后得

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}0.1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\mathrm{j}0.1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{j}0.1 & 0\\ 0.5 & 0 & 0 & 0.1\end{bmatrix}$$

例 1-3 已知某三端口网络的短路参数矩阵

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} 0.20 & 0.070 & -0.090 \\ 0.070 & 0.160 & -0.080 \\ -0.090 & -0.080 & 0.120 \end{bmatrix}$$

现将该三端口网络按图 1-5 所示联接，其中

$U_{s1}=12\ \text{V}$，$U_{s2}=2\ \text{V}$，$R_{i1}=6\ \Omega$，R_L 变化，试问 R_L 上能获得的最大功率为多少？

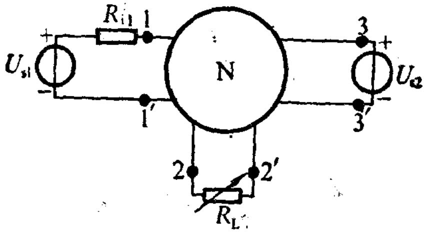


图 1-5

解 R_L 除外的部分为含源一端口网络，可先求其戴维南等效电路。由图 1-5 可知：$U_1=U_{s1}-R_{i1}I_1=12-6I_1$，$U_3=2\text{V}$。先求 22′ 端口的开路电压 U_{2o}，此时 $I_2=0$。将 U_1、U_3、I_3 代入矩阵方程式(1-5)，并展开取前二式得

$$\left.\begin{aligned} I_1&=0.2(12-6I_1)+0.07U_{2o}-0.09\times 2 \\ I_2&=0=0.07(12-6I_1)+0.16U_{2o}-0.08\times 2 \end{aligned}\right\}$$

即
$$\left.\begin{aligned} 2.2I_1-0.07U_{2o}&=2.22 \\ 0.42I_1-0.160U_{2o}&=0.680 \end{aligned}\right\}$$

解得 $U_{2o}=-1.75\ \text{V}$

再求端口 2 短路时的电流 I_{2s}，此时 $U_2=0$，代入矩阵展开式得

$$I_1=0.2(12-6I_1)-0.09\times 2$$

$$I_{2s}=-I_2=-[0.07(12-6I_1)-0.08\times 2)]$$

解得　$I_{2s}=-0.256$ A

从而得戴维南等效电路的内阻

$$R_i=\frac{U_{2o}}{I_{2s}}=6.82\ \Omega$$

由传输最大功率的条件知 $R_L=R_i$ 时获最大功率，

$$P_{max}=\frac{U_{2o}^2}{4R_i}=0.112\ \mathrm{W}$$

本例说明，知道 n 端口网络的 Y 参数矩阵后，给出网络外部的激励和负载状况，即可分析各端口以及外电路的响应。

§1-2　通过关联矩阵计算 Y 参数矩阵

对于端口数较多，较复杂的网络，象上节那样根据定义用手工直接计算 Y 参数将十分麻烦，而且也是不现实的。本节将通过图论方程，推导出由关联矩阵及支路导纳矩阵直接计算 Y 参数矩阵的公式。

考察式(1-2)、(1-3)、(1-5)可知：短路参数矩阵 $\mathbf{Y}$ 的第一列元素实际上就是端口 1 施以单位电压源，其余端口全部短接情况下，端口电流(参考方向由 k 指向 k'，见图 1-6)的列向量；同理，$\mathbf{Y}$ 的第二列即端口 2 施以单位电压源，其余端口全部短路情况下，端口电流的列向量，其余类推。也即顺次分别将每一端口施以单位电压源，其余端口短接，求得相应的端口电流向量即可得 Y 参数矩阵。

由电路课程可知，建立图论方程必须选取典型支路，现选典型支路如图 1-6(a)所示。因为不需要考虑电流源，所以该典型支路只含电压源。从该典型支路即可列写出支路电压

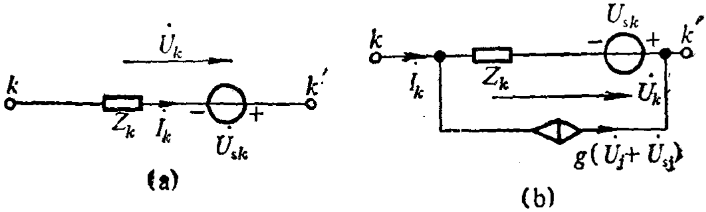


图 1-6

和电流向量的矩阵关系式

$$\dot{\boldsymbol{I}}_b=\mathbf{Y}_b\dot{\boldsymbol{U}}_b+\mathbf{Y}_b\dot{\boldsymbol{U}}_s \tag{1-7}$$

其中$\dot{\boldsymbol{I}}_b$、$\dot{\boldsymbol{U}}_b$分别为支路电流、电压向量，$\dot{\boldsymbol{U}}_s$为支路电压源向量，$\mathbf{Y}_b$为支路导纳矩阵。若不含受控源，$\mathbf{Y}_b$是由支路导纳构成的对角阵；若含一种受控源，例如元件电压控制电流源，可选图 1-6(b)所示的典型支路，此情况下仍可直接写出支路导纳矩阵$\mathbf{Y}_b$，对角元素仍为支路导纳；控制系数将出现在非对角元素上。例如当支路k有受支路j的元件电压控制的电流源，且参考方向与图 1-6(b)相符，则$\mathbf{Y}_b$的第k行第j列具有非零元g_{kj}。如果网络只含一种元件电流控制的电压源，同理可选相应的典型支路，并直接写出支路阻抗矩阵$\mathbf{Z}_b$，通过求逆可获支路导纳矩阵。总之，联系支路电压和电流向量间关系的支路导纳矩阵在有关电路书中均有详细讨论，此处不再作过多重复。

将式(1-7)代入矩阵形式的 KCL 方程，即$\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{I}}_b=0$，可得

$$\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{I}}_b=\boldsymbol{A}\mathbf{Y}_b\dot{\boldsymbol{U}}_b+\boldsymbol{A}\mathbf{Y}_b\dot{\boldsymbol{U}}_s=0$$

其中$\boldsymbol{A}$为关联矩阵；支路电压向量$\dot{\boldsymbol{U}}_b$又可以表示为节点电压向量$\dot{\boldsymbol{U}}_n$，即$\dot{\boldsymbol{U}}_b=\boldsymbol{A}^T\dot{\boldsymbol{U}}_n$，代入上式并经整理后得

$$\mathbf{Y}_n\dot{\boldsymbol{U}}_n=-\boldsymbol{A}\mathbf{Y}_b\dot{\boldsymbol{U}}_s \tag{1-8}$$