高等学校试用教材

数值逼近引论

王德人 杨忠华 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

数值逼近引论

王德人　杨忠华　编

高等教育出版社

内容提要

本书是数值逼近基础教程的深化与继续，着重讨论了几类古典函数逼近问题的理论和算法分析。对近代逼近理论中非线性样条、Bezier 曲线、B 样条曲线以及 Coons 曲面等曲线和曲面的拟合、逼近问题，进行了较全面深入的论述．各章后面附有一定数量的习题，有些还需上机绘图，这对加深读者对内容的理解和对提高读者动手能力都有一定的好处．

本书可作为高等学校应用数学专业及有关专业的选修课教材，也可供实际计算工作者及工程技术人员参考应用。

高等学校试用教材

数值逼近引论

王德人　杨忠华　编

*

高等教育出版社 出版

新华书店北京发行所发行

国防工业出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 12.375　字数 296,000

1990 年 6 月第 1 版　1990 年 6 月第 1 次印刷

印数 0001—2,330

ISBN 7-04-002244-3/TP·50

定价 3.35 元

序

为了使已经学过数值分析基本教程的应用数学专业和其它有关专业的本科生和研究生进一步在数值逼近的理论分析和实际应用上得到提高，全国高等工业学校应用数学专业教材编审委员会委托我们编写了“数值逼近引论”一书．它是数值分析基础教程的加深与继续，其内容既可作为理、工科应用数学专业和其它有关专业的选修课教材，也可供实际计算工作者和工程技术人员参考．

本书的特点是，在较高的基点上，除对几类古典的函数逼近问题进行更为深入、细致的讨论外，还进一步完整了代数插值与有理插值问题的理论和算法．特别，在近代逼近理论——样条、曲线和曲面的拟合等方面，较全面、深入地讨论了非线性样条、Bezier 曲线、B 样条曲线以及 Coons 曲面等在计算机辅助几何设计中有着重要应用的内容．在介绍这些内容时，我们试图做到深入浅出，富有启发性，既重视理论，亦重视实际应用．各章后面附有一定数量的习题，选题力求理论联系实际．特别在曲线和曲面的拟合与逼近方面，我们精选了需要上机绘图的习题．但由于水平所限，不足之处在所难免．当然，本书一定还存在不少缺点与错误，敬请读者批评与指正．

全书共分十章，前五章由王德人执笔，后五章由杨忠华执笔．在成都召开的全国高等工业学校应用数学专业教材编审委员会计算数学专业组的教材评审会议上，李庆扬教授以及其它与会同志，对本书的初稿提出了许多宝贵意见．这些意见，对本书最后定稿是极有帮助的，特此表示感谢．我们还要感谢游兆永教授、曹志浩教授以及上海科技大学数学系对本书的大力支持，没有这些支持，

本书是很难完成的．此外，本书还得到国家自然科学基金会和上海市自然科学基金会的资助，在此，特表谢意．最后，还望广大读者不吝指正．这对提高本书质量是最好的帮助，我们将十分感谢．

编　者

一九八八年七月一日

目　　录

第一章　线性赋范空间中的最佳逼近问题

本章从一般线性赋范空间出发，讨论了其中子集对于空间中给定元素的最佳逼近问题，证明了最佳逼近元素的存在性. 为进一步得到最佳逼近元素的唯一性，我们特别揭示了它与空间范数以及子集结构的相关性. 所有这些讨论，都是为以后章节提供理论依据的.

§1　线性赋范空间与范数的凸性

设抽象元素集合 E 是一个线性空间，今若在 E 中定义映射 $\|\cdot\|$,

$$\|\cdot\|: E\to R (R \text{ 表示实数空间})$$

而此映射又满足下列条件

(1) $\|f\|\geqslant 0$, $\|f\|=0\Leftrightarrow f=0$, $\forall f\in E$;

(2) $\|cf\|=|c|\,\|f\|$, $\forall c\in R$, $\forall f\in E$;

(3) $\|f_1+f_2\|\leqslant\|f_1\|+\|f_2\|$, $\forall f_1, f_2\in E$.

此时，映射 $\|\cdot\|$ 称为线性空间 E 的范数，亦可说我们在空间 E 中引进了范数，这样的线性空间 E，就称为线性赋范空间.

如果对任意 $f_1, f_2\in E$, $f_1\neq 0$, $f_2\neq 0$，条件(3)成等式，即有

$$\|f_1+f_2\|=\|f_1\|+\|f_2\|$$

时，必隐含着

$$f_1=\alpha f_2$$

成立，其中 α 为正常数. 此时，我们称此种范数为严格凸的. 相应地，称 E 为狭义赋范空间.

对此，我们容易证明下列事实：

引理 1 线性赋范空间 E 中范数的严格凸性等价于 E 中单位球面 $\|f\|=1$, $f\in E$ 不包含线段. 即若 f_1, $f_2\in E$, $f_1\neq f_2$, 且有 $\|f_1\|=\|f_2\|=1$, 则必有

$$\|\beta f_1+(1-\beta)f_2\|<1 \quad (0<\beta<1).$$

证明 若 $f_1\neq f_2$ 且 $\|f_1\|=\|f_2\|=1$, 则等式

$$\beta f_1=\alpha(1-\beta)f_2 \quad (\alpha>0;\ 0<\beta<1)$$

不可能成立. 因为如果成立, 必有 $\beta=\alpha(1-\beta)$, 从而亦有 $f_1=f_2$. 故 $\beta f_1\neq\alpha(1-\beta)f_2$, 于是必成立不等式

$$\begin{aligned}\|\beta f_1+(1-\beta)f_2\|&<\|\beta f_1\|+\|(1-\beta)f_2\|\\&=\beta\|f_1\|+(1-\beta)\|f_2\|=1.\end{aligned}$$

此即证明了 E 内单位球面不包含线段.

反之, 若 E 内单位球面不包含线段, 则对 f_1, $f_2\in E$, $f_1\neq 0$, $f_2\neq 0$, $f_1\neq f_2$, 有

$$\left\|\beta\frac{f_1}{\|f_1\|}+(1-\beta)\frac{f_2}{\|f_2\|}\right\|<1 \quad (0<\beta<1),$$

于是, 当 $\beta=(\|f_1\|+\|f_2\|)^{-1}\cdot\|f_1\|$时, 由上不等式得

$$\|(\|f_1\|+\|f_2\|)^{-1}(f_1+f_2)\|<1,$$

由此即知, E 中范数具严格凸性.

众所周知, 线性赋范空间的例子是有许多的, 但是, 它们并不都是狭义赋范空间. 为此, 我们举出以下例子.

例 1 在实 n 维欧氏空间 R^n 中, 我们可引进表示

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})}, \quad \forall\boldsymbol{x}\in R^n. \tag{1.1}$$

容易验证它满足范数条件(1)、(2)、(3). 因此, R^n 在此种范数意义下, 是一个线性赋范空间. 不仅如此, 范数条件(3)的等号成立, 当且仅当 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^n$ 为线性相关时, 即存在常数 $\beta\neq 0$, 成立 $\boldsymbol{x}=\beta\boldsymbol{y}$. 这表明范数(1.1)具有严格凸性, 从而 R^n 亦是狭义线性赋范空间.

今以 x_i, $i=1, 2, \cdots, n$ 表示向量 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 的分量, 则在 R^n 中

我们还可引进量

$$\|x\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i| \tag{1.2}$$

和

$$\|x\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|. \tag{1.3}$$

同样可以验证(1.2)、(1.3)满足范数条件(1)、(2)、(3)，故(1.2)、(1.3)亦分别定义了 R^n 中的两种范数. 但是，我们容易证明范数(1.2)、(1.3)均不具有严格凸性. 从而相应的 R^n 就不是狭义线性赋范空间. 这说明在同一空间中，由于范数定义的不同，会导致不同的空间特性.

例 2 线性空间 $L^p_{[a,b]}$, $1<p<\infty$. 易知量

$$\|f\|=\left\{\int_a^b|f|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f\in L^p_{[a,b]} \tag{1.4}$$

满足范数条件(1)、(2)、(3)，因此 $L^p_{[a,b]}$, $1<p<\infty$ 为一线性赋范空间. 此外，由于 Minkowski 不等式中，当且仅当存在常数 $\beta>0$，使得在 $[a,b]$ 上几乎处处成立 $f_1=\beta f_2$, f_1, $f_2\in L^p_{[a,b]}$ 时，有等式成立. 因此，$L^p_{[a,b]}$, $1<p<\infty$，也是一个狭义线性赋范空间. 但是，在 $p=1$ 时所相应空间 $L^1_{[a,b]}$，却并不是狭义赋范空间. 因为，此时范数 $\|f\|=\int_a^b|f|dx$，不具严格凸性.

例 3 定义在闭区间 $[a,b]$ 上的所有实连续函数集合 $C_{[a,b]}$ 是一个线性空间. 今对任意 $f\in C_{[a,b]}$，我们定义量

$$\|f\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|, \tag{1.5}$$

它是满足范数条件(1)、(2)、(3)的，因此，$C_{[a,b]}$ 为一线性赋范空间. 但是范数(1.5)并不具有严格凸性. 对此，只需观察下述例子：

考虑空间 $C_{[0,1]}$，今取 $f_1=1$, $f_2=x$，则

$$\|f_1\|=1, \ \|f_2\|=1$$

且

$$\|f_1+f_2\|=\|f_1\|+\|f_2\|=2,$$

然而函数 f_1, f_2 在 $[0, 1]$ 上并不存在常数 $c>0$, 使成立

$$f_1=cf_2.$$

今后, 我们称(1.5)为一致范数或 Чебышев 范数.

§2 线性赋范空间中的最佳逼近问题

今考虑线性赋范空间 E 中的子集 H_n 对于给定元素 $f\in E$ 的最佳逼近问题. 为此, 我们引进下述定义:

定义 1 设 $f\in E$ 为给定元素, $H_n\subset E$ 为 E 中一子集, 我们称量

$$\Delta(f; H_n)=\inf_{\Phi\in H_n}\|f-\Phi\| \tag{2.1}$$

为子集 H_n 对元素 f 的最佳逼近, 而使(2.1)成立的元素 $\Phi^*\in H_n$, 即成立

$$\Delta(f; H_n)=\|f-\Phi^*\|, \tag{2.2}$$

此时, 称为 f 的最佳逼近元素.

由此定义, 使我们清楚了所谓线性赋范空间 E 中的最佳逼近问题, 实际上就是对于给定的元素 $f\in E$, $f\overline{\in} H_n$, 要在子集 H_n 中寻求与元素 $f\in E$ 具最短距离的元素 $\Phi^*\in H_n$. 显然, 对 $f\in H_n$ 的情形, 则无讨论意义.

那么, 具有(2.2)性质的元素 $\Phi^*\in H_n$ 是否存在? 如果存在, 是否唯一? 这是两个逼近理论中最为基本的问题. 本节作为最佳逼近问题的一般理论, 我们将在线性赋范空间 E 中证明最佳逼近元素 Φ^* 的存在与唯一性定理. 最佳逼近问题的另一个基本而又重要的论题, 就是最佳逼近元素的特征, 这对我们具体求解最佳逼近问题是具有理论和实际意义的. 对此, 我们将在下面几章中结合具体空间进行讨论.

为此, 我们先考察子集 $H_n\subset E$. 它具形式

$$H_n=\mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}, \tag{2.3}$$

其中 $\varphi_i\in E$, $i=1, 2, \cdots, n$, 且元素系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 线性无关，即找不到 n 个不全为零的常数 a_i, $i=1, 2, \cdots, n$, 使成立

$$a_1\varphi_1+\cdots+a_n\varphi_n=0.$$

易知，由(2.3)定义的子集 H_n 构成了线性赋范空间 E 的一个有限维子空间，其中元素有形式

$$\Phi=a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+\cdots+a_n\varphi_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i. \tag{2.4}$$

今后，我们总称(2.4)为广义多项式.

若取 $E=C_{[a,b]}$, 而

$$\varphi_0=1,\ \varphi_1=x,\ \cdots,\ \varphi_n=x^n,$$

显然 $\varphi_i\in C_{[a,b]}$, $i=0, 1, \cdots, n$, 而且容易证明 $\varphi_i(i=0, 1, \cdots, n)$ 在 $[a, b]$ 上线性无关. 此时，子集 H_n 为

$$H_n=\mathrm{span}\{1, x, \cdots, x^n\},$$

它是所有次数不超过 n 的多项式

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

所构成的集合，是空间 $C_{[a,b]}$ 的一个子空间.

现在，我们证明最佳逼近广义多项式的存在性.

定理 1 (存在性定理)

对线性赋范空间 E 中任意给定元素 $f\in E$, 在由(2.3)定义的有限维子空间 $H_n\subset E$ 中，总存在广义多项式

$$\Phi^*=a_1^*\varphi_1+a_2^*\varphi_2+\cdots+a_n^*\varphi_n\in H_n,$$

使得

$$\Delta(f;H_n)=\|f-\Phi^*\|=\inf_{\Phi\in H_n}\|f-\Phi\| \tag{2.5}$$

成立.

定理 1 的证明，需要以下两个引理. 为此，我们先引进表示

$$g(a_1, \cdots, a_n)=\|\Phi\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i\right\|,\quad \Phi\in H_n, \tag{2.6}$$

$$h(a_1,\ \cdots,\ a_n)=\|f-\Phi\|=\|f-\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i\|,\ f\in E,\ \Phi\in H_n,\quad(2.7)$$

其中 a_i, $i=1, 2, \cdots, n$ 为实数. 若将数组 a_i, $i=1, 2, \cdots, n$ 表示成 n 维向量

$$\boldsymbol{a}^T=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]\in R^n,$$

则(2.6)、(2.7)分别定义了两个由 R^n 到 R 的映射, 即

$$g: R^n\to R$$

$$h: R^n\to R$$

引理 2 映射 $g: R^n\to R$, $h: R^n\to R$ 是 R^n 上的连续映射.

证明 我们只证 h 的连续性, g 的连续性证明完全相似. 考虑向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in R^n$, 我们有

$$\begin{aligned}|h(\boldsymbol{a})-h(\boldsymbol{b})|&=|h(a_1,\ \cdots,\ a_n)-h(b_1,\ \cdots,\ b_n)|\\&=\left|\|f-\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i\|-\|f-\sum_{i=1}^{n}b_i\varphi_i\|\right|\\&\leqslant\|\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)\varphi_i\|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|\,\|\varphi_i\|\\&\leqslant\max_i|a_i-b_i|\sum_{i=1}^{n}\|\varphi_i\|,\end{aligned}$$

由此, 即得映射 h 的连续性.

引理 3 当

$$\|a\|^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\to\infty,\qquad \boldsymbol{a}\in R^n$$

时, 有

$$h(\boldsymbol{a})=h(a_1,\ \cdots,\ a_n)=\|f-\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i\|\to\infty,\qquad f\in E,\ \boldsymbol{a}\in R^n.$$

证明 由 $g(\boldsymbol{a})=g(a_1,\ \cdots,\ a_n)$ 的连续性可知, g 在 R^n 中的单位闭球面 $\|\boldsymbol{a}\|^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2=1$ 上达到它的最小值 μ, 而且由 g 的定义及

φ_i, $i=1, 2, \cdots, n$ 的线性无关性，必有 $\mu>0$. 又由于

$$h(\boldsymbol{a})=h(a_1, \cdots, a_n)\geqslant\|\sum_{i=1}^{n}\|a_i\varphi_i\|-\|f\|$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\|\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}}\varphi_i\|-\|f\|$$

$$\geqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\mu-\|f\|,$$

由此即知，当 $\|\boldsymbol{a}\|^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\to\infty$ 时，有 $h(\boldsymbol{a})\to\infty$.

此引理表明映射 h 的最小值的位置，决不会在无穷远处.

定理 1 的证明. 由引理 3 可知，必存在充分大的数 $r>0$，使当 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2>r^2$ 时，总有

$$h(\boldsymbol{a})=h(a_1, \cdots, a_n)>\|f\|.$$

而另一方面，在闭球域 $\|a\|^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\leqslant r^2$ 内，由 h 的连续性可知，必存在 $a^{*T}=[a_1^*, a_2^*, \cdots, a_n^*]$，使 h 在 a^* 处达到其最小值，且

$$\min h(a_1, \cdots, a_n)=h(a_1^*, a_2^*, \cdots, a_n^*)$$
$$\leqslant h(0, 0, \cdots, 0)=\|f\|,$$

而在闭球外 h 又恒大于 $\|f\|$. 由此可见，$h(a_1^*, \cdots, a_n^*)$ 还必定是 R^n 空间上的全局最小值. 到此定理 1 的证明全部完成.

仔细分析定理 1 的证明，我们可以看到有限维子空间 H_n 的闭集性质以及 H_n 中每一有界子集都是 E 中列紧集等事实，是使存在定理成立的主要依据. 据此，我们可以更为广泛地将存在定理叙述为下述形式：

定理 2 设 $\overline{H}_n$ 是线性赋范空间 E 中的一个闭子集且其中每一个有界集都是 E 中的列紧集. 则对任意给定元素 $f\in E$，$\overline{H}_n$ 中总存在 f 的最佳逼近元素 $\Phi^*\in\overline{H}_n$. 即成立

$$\Delta(f; H_n) = \|f - \Phi^*\| = \inf_{\Phi \in \overline{H}_n} \|f - \Phi\|.$$

证明 给定元素 $f \in E$, $f \overline{\in} \overline{H}_n$($f \in \overline{H}_n$, 则结论显然成立), 由于 $\overline{H}_n$ 是 E 中闭子集, 故

$$\inf_{\Phi \in \overline{H}_n} \|f - \Phi\| = \mu > 0,$$

又由下确界的定义知, 对 $l = 1, 2, \cdots$ 存在元素 $\Phi_l \in \overline{H}_n$, 使成立

$$\|f - \Phi_l\| < \mu + l^{-1}.$$

易知序列$\{\Phi_l\}$有界, 这是因为有

$$\|\Phi_l\| \leqslant \|\Phi_l - f\| + \|f\| \leqslant \mu + 1 + \|f\|, \quad l = 1, 2, \cdots.$$

由于 H_n 中任何有界集都是 E 中的列紧集, 所以存在收敛子序列 $\{\Phi_{l_j}\}$: 有

$$\lim_{j \to \infty} \Phi_{l_j} = \Phi^*, \ \Phi^* \in \overline{H}_n,$$

同时亦有

$$\mu \leqslant \|f - \Phi_{l_j}\| < \mu + l_j^{-1},$$

由此, 令 $j \to \infty$, 即得

$$\|f - \Phi^*\| = \mu.$$

这就证明了极限元素 Φ^* 是子集 $\overline{H}_n$ 中距离 $f \in E$ 最近的元素. 定理证完.

以上两个定理, 使我们清楚地看到, 只需对线性赋范空间 E 中的子集 H_n 作适当的限制, 那么, 对任意给定元素 $f \in E$, 关于该元素 f 的最佳逼近元素 $\Phi^* \in H_n$ 总是存在的.

本节的另一个基本问题是最佳逼近元素 $\Phi^* \in H_n$ 的唯一性问题. 对此, 我们首先应该看到, 由上述存在定理所保证的元素, 并不一定是唯一的. 事实上, 我们若取 $E = R^2$, 范数为

$$\|\boldsymbol{x}\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}, \quad \boldsymbol{x} \in R^2, \tag{2.8}$$

今取所有形如 $\boldsymbol{y}^T = [y_1, 0] \in R^2$ 的点, 构成子空间 $H \subset R^2$. 若取点 $\boldsymbol{z}^T = [0, 1] \in R^2$, $\boldsymbol{z}^T \overline{\in} H$, 显然, 点 $\boldsymbol{z}$ 到 H 的距离为 1. 在(2.8)

定义的范数意义下，点 $W^T=[w_1, 0]\in H$、$|w_1|\leqslant 1$ 都能达到此值. 此例告诉我们，要得到唯一性结果，存在定理中，给空间或子集所加的条件还不够，需要进一步加强. 这里，我们先讨论加强空间条件的情形.

定理 3 （唯一性）

若 E 是狭义线性赋范空间，则对给定元素 $f\in E$, $f\overline{\in}H_n$, 由(2.3)定义的有限维子空间 $H_n\subset E$ 中，存在唯一的元素 $f\in E$ 的最佳逼近元素.

证明 反证法，若在 H_n 中有 $f\in E$ 的两个最佳逼近元素，设为

$$\Phi_1^*=\sum_{i=1}^n a_i^*\varphi_i,\qquad \Phi_2^*=\sum_{i=1}^n b_i^*\varphi_i,$$

则有

$$\|f-\Phi_1^*\|=\|f-\Phi_2^*\|=\inf_{\Phi\in H_n}\|f-\Phi\|=\mu>0.$$

另外，由于

$$\begin{aligned}\mu&\leqslant\left\|f-\left(\frac{1}{2}\Phi_1^*+\frac{1}{2}\Phi_2^*\right)\right\|=\left\|f-\sum_{i=1}^n\left(\frac{a_i^*+b_i^*}{2}\right)\varphi_i\right\|\\&=\left\|\frac{1}{2}\left(f-\sum_{i=1}^n a_i^*\varphi_i\right)+\frac{1}{2}\left(f-\sum_{i=1}^n b_i^*\varphi_i\right)\right\|\\&\leqslant\frac{1}{2}\|f-\Phi_1^*\|+\frac{1}{2}\|f-\Phi_2^*\|=\mu,\end{aligned}\tag{2.9}$$

从而亦有

$$\left\|f-\frac{1}{2}(\Phi_1^*+\Phi_2^*)\right\|=\mu,\tag{2.10}$$

表明 $\frac{1}{2}(\Phi_1^*+\Phi_2^*)$ 亦是 f 的最佳逼近元素. 再联立(2.9)、(2.10)，即得等式

$$\left\|f-\frac{1}{2}(\Phi_1^*+\Phi_2^*)\right\|=\frac{1}{2}\|f-\Phi_1^*\|+\frac{1}{2}\|f-\Phi_2^*\|.$$

由于 E 是狭义线性赋范空间，故必存在常数 $\alpha>0$，使成立

$$f-\Phi_1^*=\alpha(f-\Phi_2^*).$$

然而由于 $f\in H_n$，故必有 $\alpha=1$，否则将会导致元素 $f\in H_n$ 的矛盾。于是，我们可得

$$\Phi_1^*-\Phi_2^*=\sum_{i=1}^{n}(a_i^*-b_i^*)\varphi_i=0,$$

由此，即得

$$a_i^*=b_i^*,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

表明元素 Φ_1^* 和 Φ_2^* 是同一个，唯一性证毕.

这个定理利用了范数的严格凸性，给出了最佳逼近元素唯一性的一个充分条件，但并不必要．因为，对于一致范数而言，空间 $C_{[a,b]}$ 并非狭义赋范空间，然而，最佳逼近问题解的唯一性，同样成立．我们将会在下一章关于空间 $C_{[a,b]}$ 的最佳逼近问题的讨论中看到，只要对空间 $C_{[a,b]}$ 中的子集 H_n 作进一步限制，即对子集 H_n 的结构提出更为特殊的要求，则空间 $C_{[a,b]}$ 中最佳逼近广义多项式 $\Phi^*\in H_n$ 的唯一性是容易得到证明的。

习　　题

(1) 证明范数

$$\|f\|=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ f^T=[\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n]\in R^n,\ 1<p<\infty$$

具有严格凸性．但是，当 $p=1,\ \infty$ 时，此结论并不成立。

(2) 证明范数

$$\|f\|_4=\left[\int_a^b|f(x)|^4dx\right]^{\frac{1}{4}},\quad f\in C_{[a,b]}$$

是严格凸的.

(3) 证明不等式

$$\|f\|_1\leqslant(b-a)^{\frac{1}{2}}\|f\|_2\leqslant(b-a)\|f\|_\infty,\quad f\in C_{[a,b]},$$

其中