吕洪生 曾新吾 编著

连续介质力学

连续介质力学基础

国防科技大学出版社

连续介质力学

Continuum Mechanics

（上册）

连续介质力学基础

Foundations for Continuum Mechanics

吕洪生　曾新吾　编著

国防科技大学出版社
长沙

图书在版编目(CIP)数据

连续介质力学．上册，连续介质力学基础/吕洪生，曾新吾编著．—长沙：国防科技大学出版社，1999.9
ISBN 7-81024-591-0

Ⅰ．连续介质力学　Ⅱ．①吕…②曾…　Ⅲ．连续介质力学-基础理论　Ⅳ．O33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 47855 号

内容简介

本书是连续介质力学上册，涉及连续介质力学学科的基础理论，内容包括：张量基础、场论初步、应力分析、连续介质运动学、连续介质力学基本定律、本构方程。

本书适合于爆炸力学、爆炸物理专业本科生和研究生作教材之用，亦可供一般力学、工程力学、爆炸加工等专业的本科生、研究生、科研人员作为教材和研修之用。

国防科技大学出版社出版发行
电话：(0731)4555681　邮政编码：410073
E-mail：gfkdcbs@ public. cs. hn. cn
责任编辑：潘　生　责任校对：黄八一
新华书店总店北京发行所经销
长沙交通学院印刷厂印装
*
787×1092　1/16　印张：10　字数：231 千
1999 年 9 月第 1 版第 1 次印刷　印数：1-1000 册
*
定价：15.00 元

目 录

第三章 连续介质运动学

第四章 连续介质力学的基本定律

第五章 本构方程

序　言

连续介质力学(Continuum Mechanics)，从广义上讲，它是以连续介质假设为基础的众多力学学科的总称，例如流体力学、水利力学、气体动力学、弹性力学、塑性力学、爆炸力学等均属于连续介质力学的范畴。它是一般的力学专业、工程力学专业、爆炸力学专业等最重要的共同基础或专业内容。

连续介质力学是经典理论力学的发展。作为力学，它当然是研究连续介质的宏观性状的，即研究物质的宏观机械运动，而不管物质的真实微观结构，尽管物质是由大量的分子组成。因此，连续介质不对物质的真实微观结构作任何探讨，但与物质结构理论并不矛盾，而是相辅相成的。物质结构理论研究的是物质微观情况，即研究物质的特殊结构，而连续介质力学则研究具有不同微观结构物质的共同性状。

连续介质力学的主要目的在于建立各种物质的力学模型，并给出各种物质的本构关系的数学表达式，同时在给定的初始条件和边界条件下求出问题的解。概括起来，它涉及如下基本内容：①变形几何学。研究连续介质变形的几何性质，确定变形所引起物质各部分空间位置和方向的变化，以及各邻近点相互距离的变化，即研究诸如运动、变形、变形梯度、变形张量等。②运动学。主要研究连续介质力学中各种物理量随时间的变化率，这包括速度梯度、变形速率、旋转速率等。③基本方程。根据适用于所有物质的守恒定律建立的方程，例如对于热力连续介质力学建立有连续性方程、运动方程、能量方程、熵不等式等。④本构关系。⑤特殊理论。例如弹性理论、塑性理论、流体与气体动力学、粘性流体理论等。⑥问题的求解。

连续介质力学分为经典连续介质力学(Classical Continuum Mechanics)和近代连续介质力学(Modern Continuum Mechanics)。

1. 经典连续介质力学。它侧重研究两种典型的理想介质，即线弹性物质和线粘性物质。这两种物质模型能够很好地描述在工程技术上所处理的很多介质的特性，因此经典连续介质理论至今仍被广泛应用并将继续发挥解决实际问题的能力。

2. 近代连续介质力学。它是在二次大战以后发展起来的，它是经典连续介质力学的发展和扩充，具体表现在：①物体不必只看作是质点的集合；它可能是由具有微结构的质点集合体。②运动不必总是光滑的，运动有激波、扩散等。③物体不必只受力的作用，它也可承受体力偶、力偶应力，以及电磁场所引起的效应等。④对本构关系进行更加概括的研究。⑤重点研究非线性问题。

近年来，近代连续介质力学在其深度和广度上都取得了很大进展，并出现了下述三个方向：①按照理性力学(Rational Mechanics)的观点和方法研究连续介质理论，从而发展成理性连续介质力学。②把近代连续介质力学和电子计算机结合起来，从而发展成为计算连续介质力学。③把近代连续介质力学的研究对象扩大，从而发展成为连续系统物理学(Continuum Physics)。

然而，本书“别具一格”、“与众不同”，它既非“经典”，又非“近代”。它介于经典与近代之间，它也不同于现已出版的众多的《连续介质力学》，这些书都是针对具有流体力学和固

体力学基础的读者的高级概论。本书主要是针对爆炸力学和爆炸物理专业的本科生和研究生的，它系统地给出：连续介质力学的数学基础、应力分析、运动与变形、基本物理规律、本构方程、不可压流体力学、气体动力学、爆轰学、爆炸作用、动载固体力学、应力波理论等。总之，它给出了该专业所需要的全部基础内容。所以从本书的结构体系和所述内容来看，它也不同业已出版的针对爆炸物理和爆炸力学专业的力学著作。本书既考虑到该专业的已往基础，又考虑到该学科的最新发展，如增加了动载固体力学、应力波理论和不可压流体力学、本构方程等内容；同时结合大型专题介绍了力学中的三大计算方法（特征法计算、有限差分法和有限元法）。

本书除了适用于本专业的本科生和研究生之外，它还可作为爆炸作用、强冲击载荷、材料动载响应、爆炸加工以及一般的力学专业的本科生、研究生和有关的科技人员的教材或参考书。

本书分成三册，上册为《连续介质力学基础》，其内容包括：序言、张量基础、场论初步、应力分析、运动与流动、守恒规律和本构关系等；中册为《流体力学与爆炸力学》，内容包括：流体力学基本方程组、流体静力学、不可压流动、位势理论与射流、气体动力学方程、冲击波与特征线理论、量纲理论、波的相互作用与具体应用、炸药与爆炸概论、爆轰波理论、爆轰产物的飞散与爆炸作用等；下册为《动载固体力学与应力波》，内容包括：应变分析、弹性、塑性、滑移线理论、粘弹、流体弹塑性理论与计算、有限元法、高压本构、应力波理论基础等。

本书是在作者为原电力部工程技术人员编著的《爆炸压接理论基础》的基础之上，以G. E. Mase 的《Continuum Mechanics》为基本蓝图，并参照有关流体、固体与爆炸等方面的专著，扩充改编而成。由于内容较广、跨度较大，全书约 23 万字；更兼写作匆忙、作者学识有限，所以本书作为初次尝试，难免有缺点与不足，望多指正。

作者　1999 年 9 月

第一章 连续介质力学的数学基础

连续介质力学(Continuum Mechanics)是以广泛而深厚的数学作为研究的基础，它除了需要一般的高等数学基础之外，还需要一些特殊的数学分支，其中最重要的是张量和场论，特别是张量。

一 张量基础

1.1 张量及其定义

近代连续介质力学和理论物理中广泛地采用张量，这不仅因为采用张量来表示基本方程时，书写高度简练；而更重要的是，因为连续介质力学中所出现的一些重要的基本物理量，如应力、应变等，本身就是张量。所以张量对于连续介质力学的研究十分重要。

张量(tensors)，在数学上讲，它是不依赖于任何特定的坐标系而存在的量，它是用来描述客观存在的物理量的。

连续介质力学以及各物理学科中所研究的物理量均不依赖于坐标系，然而要在数量上表示某个物理量并对其进行计算，常常又需要选参考的坐标系。物理量在不同的坐标系中将给出不同的表征量，即给出一些不同的分量。但这些坐标系所表述的物理量又是客观存在的同一个物理量，因此在不同坐标系其不同的表征数值之间必有确定的变换规律：在一个坐标系下物理量(亦即张量)其诸分量已知，则在另一坐标系下该张量的各分量就完全确定了。这正是张量独立于坐标系的反映。其分量是满足一定的坐标变换规律的量，也作为张量的另一种定义。

在研究任意两个曲线坐标系之间的一般变换时所定义的张量称作一般张量或普遍张量(general tensors)。从一个笛卡尔坐标系(Cartesian coordinate system)到另一个笛卡尔坐标系变换的张量称作笛卡尔张量(Cartesian tensors)。由于连续介质力学的大部分物理量都是利用笛卡尔张量建立的，所以在本书中张量一词则意指笛卡尔张量，除非特别指出。

张量按照它们所服从变换规律的特定形式可以用秩或阶(rank or order)来分类，这种分类体现在一个给定张量在 n 维空间所具有分量的个数上，如在作为三维欧几里德空间(Euclidean space)的一个任意的物理空间中，一个张量的分量个数则为 3^N，在这里 N 为张量的阶。因此在物理空间中零阶张量在任一个坐标系中均以一个分量表征，零阶张量称作标量(scalars)，只具有大小的物理量由标量表示。在物理空间中一阶张量具有三个坐标分量，一阶张量称作矢量(vectors)，既具有大小又具有方向的物理量由矢量表示。二阶张量对应着并矢式(dyadics)，在连续介质力学中几个重要的物理量都由二阶张量表示，如应力张量(stress tensor)和应变张量(strain tensor)。当然在连续介质力学中也出现更高阶张量，三阶张量对应三并矢式(triadics)，四阶张量对应四并矢式(tetradics)……

1.2 矢量与标量

某些物理量,如力和速度,它们既具有大小,又具有方向,在三维空间,它们可用服从平行四边形相加法则(parallelogram law of addition)的有向线段表示。这样的有向线段(directed line segments)是一阶张量或称矢量的几何表示,矢量的图示是一个指向一定方向的箭头,该箭头的长度与矢量的大小成比例。等价矢量是具有同样方向、同等大小的矢量;零矢量(null or zero vector)是一个具有零值大小不定方向的矢量;一个负矢量是与原矢量大小相等、方向相反的矢量。

对于像质量和能量的那样物理量,它们只具有大小,故由称作标量的零阶张量表示。

按吉布斯写法(Gibbs natation),矢量用正黑体字母表示,但在本书用黑斜字母。标量用斜体字母表示,如 a、b、λ 等。单位矢量用斜黑体字母之上加一个凸字符表示,如 $\hat{\boldsymbol{e}}$。图 1.1 给出任意矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和单位矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}$ 以及一对等矢量 $\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$。

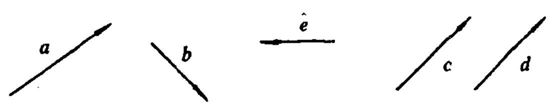


图 1.1

二阶及二阶以上的张量用大写全黑正体字母表示,如用 **D**、**E** 等(若按吉布斯写法用重黑正体字母)。

任一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小即数值,写成 a,或者表成 $|\boldsymbol{a}|$。

1.1.1 矢量相加、矢量与标量相乘

矢量相加服从平行四边形法则。按该法则,两个矢量的合矢量为以这两个矢量为邻边的平行四边形的对角线(diagonal),见图 1.2(a)。上述矢量相加法则也等价于三角形法则(triangle rule),按该法则,两个矢量的合矢量为由一个矢量的头接另一个矢量尾所构成三角形的第三边。代数上,矢量相加由如下矢量方程表示

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \tag{1.1}$$

矢量相减(vector subtraction)可用负矢量相加实现,如图 1.2(b)所示,因此

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{d} \tag{1.2}$$

矢量相加和矢量相减满足交换律和结合律(commutative law and associative law),如图 1.2(c)所示,因此

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{h} \tag{1.3}$$

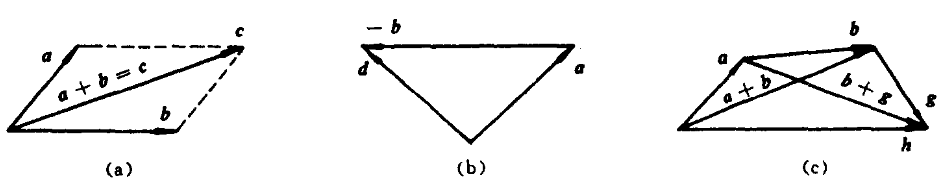


图 1.2

一个矢量与一个标量的积一般给出一个新的矢量，这个矢量与原矢量方向相同而长度不等，其例外的情形是矢量乘以零给出一个零矢量；矢量乘以单位 1 则不变。图 1.3 给出矢量 $\boldsymbol{b}$ 乘以标量 m 所给出的三种可能情况。

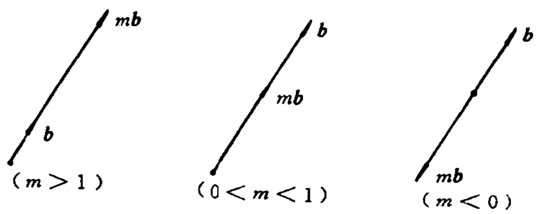


图 1.3

矢量与标量的积满足结合律和分配律(distributive rule)

$$m(n\boldsymbol{b}) = (mn)\boldsymbol{b} = n(m\boldsymbol{b}) \tag{1.4}$$

$$(m+n)\boldsymbol{b} = (n+m)\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{b} + n\boldsymbol{b} \tag{1.5}$$

$$m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = m(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}) = m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} \tag{1.6}$$

矢量乘以它的数值倒数给出与它同向的单位矢量(unit vector)

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b}/b \tag{1.7}$$

1.1.2 矢量的点积与叉积

矢量 $\boldsymbol{a}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}$ 点乘的结果称点积又称为标积(dot or scalar product)，这个积为标量，以 λ 表示

$$\lambda = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = ab\cos\theta \tag{1.8}$$

式中 θ 为这两个矢量夹角的较小者，见图 1.4(a)，矢量 $\boldsymbol{a}$ 同单位矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}$ 的标积为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\hat{\boldsymbol{e}}$ 方向上的投影(projection)。

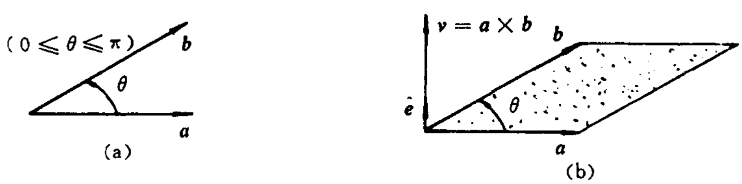


图 1.4

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 叉乘的结果称叉积或称作矢积(cross or vector product)，这个积为矢量，以 $\boldsymbol{v}$ 表示，它由下式给出

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = (ab\sin\theta)\hat{\boldsymbol{e}} \tag{1.9}$$

式中 θ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间小于 π 的夹角；$\hat{\boldsymbol{e}}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所构成的平面，且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\hat{\boldsymbol{e}}$ 三个方向成右手系。$\boldsymbol{v}$ 的大小等于以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积，如图 1.4(b)所示的阴影部分。叉乘不能交换。

三矢标积(scalar triple product)，又称混合积(mixed product)，又称箱积(box product)，为

$$[abc] = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \lambda \tag{1.10}$$

λ 等于以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体的体积。

三矢矢积(vector triple product)是这样两个矢量叉乘的结果:这两矢量之中一个又作为另外两个矢量的叉积。$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 的叉积 $\boldsymbol{w}$ 存在如下的恒等式

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{1.11}$$

矢量 $\boldsymbol{w}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所构成的平面内。

1.3 并矢与并矢式

矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的不定矢积(indeterminate vector product)称作并矢(dyad)，它表成 $\boldsymbol{ab}$，不定矢积一般不能交换:$\boldsymbol{ab}\neq\boldsymbol{ba}$，并矢的第一个矢量称作前项(antecedent)，第二个矢量称作后项(consequent)。并矢式(dyadic)$\mathbf{D}$ 对应一个二阶张量(tensor of order two)，它总可表成有限个并矢之和

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_N\boldsymbol{b}_N \tag{1.12}$$

当然，该式并不唯一。

如果将上式中的各并矢的前后项交换，给出的并矢式 $\mathbf{D}_c$ 称作 $\mathbf{D}$ 的共轭并矢式(conjugate dyadic)

$$\mathbf{D}_c = \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{b}_N\boldsymbol{a}_N \tag{1.13}$$

如果在(1.12)式中的每个并矢均换成为两个矢量的点乘，所得到的标量称作并矢式 $\mathbf{D}$ 的标量，它写成

$$\mathbf{D}_s = \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_N\cdot\boldsymbol{b}_N \tag{1.14}$$

(在上式中 $\mathbf{D}_s$ 是个标量，本应将它写成一般斜体，但按习惯仍写成黑斜体。在后面亦会遇到类似情况)。

如果在(1.12)式中的每个并矢均由其两个矢量的叉乘代替，其结果称作并矢式 $\mathbf{D}$ 的矢量(vector of the dyadic)，它写成

$$\mathbf{D}_v = \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_N\times\boldsymbol{b}_N \tag{1.15}$$

不定矢积服从分配律

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac} \tag{1.16}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc} \tag{1.17}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{bd} \tag{1.18}$$

如果标量 λ 和 μ 与并矢相乘，则有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{ab} = \lambda\boldsymbol{ab} + \mu\boldsymbol{ab} \tag{1.19}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{ab} \tag{1.20}$$

如果 $\boldsymbol{v}$ 是任一矢量，它与 $\mathbf{D}$ 的点积 $\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{v}$ 为由下式定义的矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$

$$\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{D} = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{b}_1 + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{b}_2 + \cdots + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_N)\boldsymbol{b}_N = \boldsymbol{u} \tag{1.21}$$

$$\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{v}) + \cdots + \boldsymbol{a}_N(\boldsymbol{b}_N\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} \tag{1.22}$$

在(1.21)式中的 $\mathbf{D}$ 称作后因子(postfactor)，而(1.22)式的 $\mathbf{D}$ 称作前因子(prefactor)。如果对于每个矢量 $\boldsymbol{v}$ 有如下两式之一成立

$$\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{D}=\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{E} \quad 或 \quad \mathbf{D}\cdot\boldsymbol{v}=\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{v} \tag{1.23}$$

则并矢式 D 和 E 相等。单位并矢式或称幂等因子(unit dyadic or idemfactor)I，它是以下式表示的并矢式

$$\mathbf{I}=\hat{e}_1\hat{e}_1+\hat{e}_2\hat{e}_2+\hat{e}_3\hat{e}_3 \tag{1.24}$$

其中 $\hat{e}_1$、$\hat{e}_1$、$\hat{e}_3$ 构成三维欧几里德空间的任一正交基(orthonormal basis)，见图 1.5。单位并矢式 I 对于所有的矢量 $\boldsymbol{v}$ 均有下式成立

$$\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{I}=\boldsymbol{v} \tag{1.25}$$

叉积 $\boldsymbol{v}\times\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{D}\times\boldsymbol{v}$ 是并矢式，它们分别定义如下

$$\boldsymbol{v}\times\mathbf{D}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{b}_1+(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{b}_2+\cdots+(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}_N)\boldsymbol{b}_N=\mathbf{F} \tag{1.26}$$

$$\mathbf{D}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{v})+\cdots+\boldsymbol{a}_N(\boldsymbol{b}_N\times\boldsymbol{v})=\mathbf{G} \tag{1.27}$$

并矢 $\boldsymbol{ab}$ 和 $\boldsymbol{cd}$ 的点积为下式所定义的并矢

$$\boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{cd}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{ad} \tag{1.28}$$

根据(1.28)式，任两个并矢式 D 和 E 的点积为如下所表示的并矢式 G

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}&=(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_N\boldsymbol{b}_N)\cdot(\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{d}_2+\cdots+\boldsymbol{c}_N\boldsymbol{d}_N)\\&=(\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{d}_1+(\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{c}_2)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{d}_2+\cdots+(\boldsymbol{b}_N\cdot\boldsymbol{c}_N)\boldsymbol{a}_N\boldsymbol{d}_N\\&=\mathbf{G}\end{aligned} \tag{1.29}$$

对于并矢式 D 和 E 满足

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}=\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{I} \tag{1.30}$$

则称这两个并矢式互为可逆(reciprocal)。对于逆并矢式常使用如下写法

$$\mathbf{E}=\mathbf{D}^{-1} \quad 和 \quad \mathbf{D}=\mathbf{E}^{-1}$$

对于并矢 $\boldsymbol{ab}$ 和 $\boldsymbol{cd}$ 的双点积(double dot product)和双叉积(double cross product)定义如下

$$\boldsymbol{ab}:\boldsymbol{cd}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})=\lambda, \quad 标量 \tag{1.31}$$

$$\boldsymbol{ab}\overset{\times}{\cdot}\boldsymbol{cd}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})=\boldsymbol{h}, \quad 矢量 \tag{1.32}$$

$$\boldsymbol{ab}\underset{\times}{\cdot}\boldsymbol{cd}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{g}, \quad 矢量 \tag{1.33}$$

$$\boldsymbol{ab}\overset{\times}{\underset{\times}{}}\boldsymbol{cd}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{uw}, \quad 并矢 \tag{1.34}$$

根据这些定义，并矢式的双点积和双叉积也就确定了。当然亦有定义为如下形式的双点积

$$\boldsymbol{ab}\cdot\cdot\,\boldsymbol{cd}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})=\lambda, \quad 标量 \tag{1.35}$$

如果并矢式 D 有下式成立

$$\mathbf{D}=\mathbf{D}_C \tag{1.36}$$

则称 D 为自共轭(self-conjugate)或对称(symmetric)。如果

$$\mathbf{D}=-\mathbf{D}_C \tag{1.37}$$

则称 D 为反自共轭(anti-self-conjugate)或反对称(anti-symmetric)。

每一个并矢式都可表成唯一的对称并矢式和反对称并矢式之和

$$\mathbf{D}=\frac{1}{2}(\mathbf{D}+\mathbf{D}_C)+\frac{1}{2}(\mathbf{D}-\mathbf{D}_C)=\mathbf{G}+\mathbf{H} \tag{1.38}$$

现在上式中 G 是对称的，而 H 是反对称的，因为

$$\mathbf{G}_C = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_C + (\mathbf{D}_C)_C) = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_C + \mathbf{D}) = \mathbf{G} \tag{1.39}$$

$$\mathbf{H}_C = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_C - (\mathbf{D}_C)_C) = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_C - \mathbf{D}) = -\mathbf{H} \tag{1.40}$$

关于唯一性可以这样确定:假定 **D** 还可分解成为另一种形式,即为对称的 $\mathbf{G}^*$ 与反对称的 $\mathbf{H}^*$ 之和

$$\mathbf{D} = \mathbf{G}^* + \mathbf{H}^* \tag{1.41}$$

而据式(1.38)、(1.39)、(1.40)式,则有

$$\mathbf{D} = \mathbf{G} + \mathbf{H} = \mathbf{G}^* + \mathbf{H}^* \tag{1.42}$$

$$\begin{cases} \mathbf{D}_C = \mathbf{G}_C + \mathbf{H}_C = \mathbf{G} - \mathbf{H} \\ \mathbf{D}_C = \mathbf{G}_C^* + \mathbf{H}_C^* = \mathbf{G}^* - \mathbf{H}^* \end{cases} \tag{1.43}$$

故由以上三式推出

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{G} \tag{1.44}$$

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} \tag{1.45}$$

所以将 **D** 分解成对称的并矢式 **G** 和反对称的并矢式 **H** 存在且唯一。

1.4 坐标系

我们要表征一个矢量需要一个坐标系。原则上讲,坐标系可以任选,然而针对不同情况选取不同的坐标系却是有益的。通常,首选的坐标系是直角笛卡尔坐标系(rectangular Cartesian coordinate system),简称:直角坐标系,它是由三个相互垂直的坐标轴构成的,如图 1.5 所示 $Oxyz$ 坐标系。

在 $Oxyz$ 中任何一个矢量 $\boldsymbol{v}$ 均可表成三个任意的非共面的非零矢量的线性组合,这样的三个矢量则称作基矢量(basis vectors)。对于取定的一组基矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$,只要适当地选取标量 λ、μ、ν,就可将矢量 $\boldsymbol{v}$ 表成

$$\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{v} + \nu \boldsymbol{c} \tag{1.46}$$

由于假定这组基矢量是线性无关的,所以,若使

$$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{v} + \nu \boldsymbol{c} = 0 \tag{1.47}$$

成立,只有

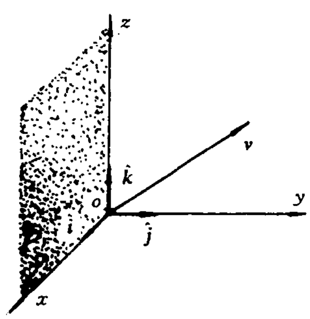


图 1.5

$$\lambda = \mu = \nu = 0 \tag{1.48}$$

在给定的坐标系中任何一组基矢量都可当成该坐标的一组基。不过,对于直角笛卡尔坐标系而言,最寻常的选择是将基矢量取成沿三个坐标轴的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{i}}$、$\hat{\boldsymbol{j}}$、$\hat{\boldsymbol{k}}$,如图 1.5 所示,这组基矢量构成一个右手系的单位矢量三基(unit vector triad),对于它则有

$$\hat{\boldsymbol{i}} \times \hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{k}}, \quad \hat{\boldsymbol{j}} \times \hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{i}}, \quad \hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{i}} = \hat{\boldsymbol{j}} \tag{1.49}$$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{i}} \cdot \hat{\boldsymbol{i}} = \hat{\boldsymbol{j}} \cdot \hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = 1 \\ \hat{\boldsymbol{i}} \cdot \hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{j}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{i}} = 0 \end{cases} \tag{1.50}$$

这样的一组基矢量通常称作一个正交基(orthonormal basis)。

利用单位三基$\hat{i}$、$\hat{j}$、$\hat{k}$，矢量$\boldsymbol{v}$可表成

$$\boldsymbol{v} = v_x\hat{\boldsymbol{i}} + v_y\hat{\boldsymbol{j}} + v_z\hat{\boldsymbol{k}} \tag{1.51}$$

见图 1.6 所示，式中的三个分量(亦称笛卡尔分量)为

$$v_x = \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{i}} = v\cos\alpha \tag{1.52}$$

$$v_y = \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{j}} = v\cos\beta \tag{1.53}$$

$$v_z = \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = v\cos\gamma \tag{1.54}$$

v_x、v_y、v_z为$\boldsymbol{v}$在坐标轴上的投影。据(1.7)式，$\boldsymbol{v}$方向的单位矢量$\hat{\boldsymbol{e}}_v$为

$$\hat{\boldsymbol{e}}_v = \boldsymbol{v}/v = (\cos\alpha)\hat{\boldsymbol{i}} + (\cos\beta)\hat{\boldsymbol{j}} + (\cos\gamma)\hat{\boldsymbol{k}} \tag{1.55}$$

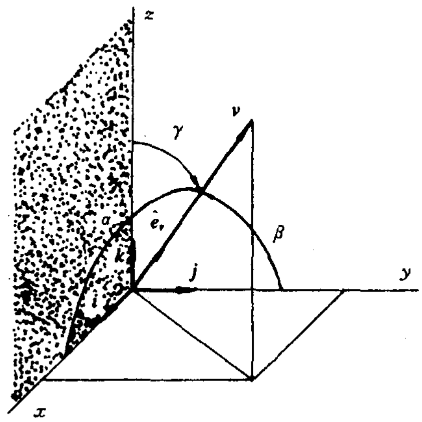


图 1.6

由于$\boldsymbol{v}$是任意的，从而得出任一单位矢量的方向余弦(direction cosines)均为该单位矢量的笛卡尔分量(Cartesian components)。

利用笛卡尔分量可将一些矢量运算表成分量形式，如对于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的点乘可化成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_x\hat{\boldsymbol{i}} + a_y\hat{\boldsymbol{j}} + a_z\hat{\boldsymbol{k}}) \cdot (b_x\hat{\boldsymbol{i}} + b_y\hat{\boldsymbol{j}} + b_z\hat{\boldsymbol{k}}) \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z\end{aligned} \tag{1.56}$$

对于$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的叉乘可表成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_x\hat{\boldsymbol{i}} + a_y\hat{\boldsymbol{j}} + a_z\hat{\boldsymbol{k}}) \times (b_x\hat{\boldsymbol{i}} + b_y\hat{\boldsymbol{j}} + b_z\hat{\boldsymbol{k}}) \\ &= (a_yb_z - a_zb_y)\hat{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{k}\end{aligned} \tag{1.57}$$

这个结果亦常表成行列式形式(determinant form)

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{1.58}$$

对于三矢标积亦可写成行列式形式

$$[\boldsymbol{abc}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{1.59}$$

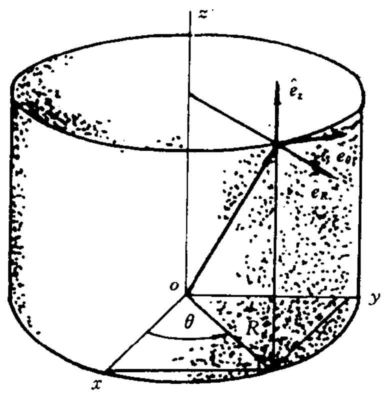
利用笛卡尔分量，并矢$\boldsymbol{ab}$可表成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ab} &= (a_x\hat{\boldsymbol{i}} + a_y\hat{\boldsymbol{j}} + a_z\hat{\boldsymbol{k}})(b_x\hat{\boldsymbol{i}} + b_y\hat{\boldsymbol{j}} + b_z\hat{\boldsymbol{k}}) \\ &= a_xb_x\hat{\boldsymbol{i}}\hat{\boldsymbol{i}} + a_xb_y\hat{\boldsymbol{i}}\hat{\boldsymbol{j}} + a_xb_z\hat{\boldsymbol{i}}\hat{\boldsymbol{k}} \\ &\quad + a_yb_x\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{i}} + a_yb_y\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}} + a_yb_z\hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{k}} \\ &\quad + a_zb_x\hat{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{i}} + a_zb_y\hat{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{j}} + a_zb_z\hat{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{k}}\end{aligned} \tag{1.60}$$

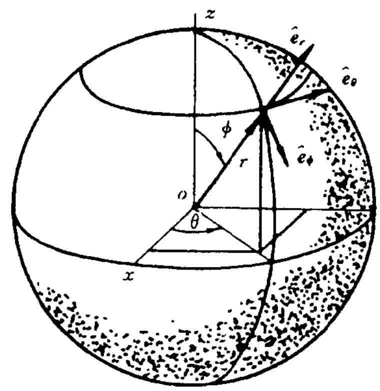
利用单位三基$\hat{i}$、$\hat{j}$、$\hat{k}$，幂等因子可以表成

$$\mathbf{I} = \hat{\boldsymbol{i}}\hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}\hat{\boldsymbol{j}} + \hat{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{1.61}$$

除了上述的直角笛卡尔坐标系* 外，像图 1.7 所示的柱坐标系(R,θ,z)和球坐标系(r,θ,ϕ)等曲线坐标系也广泛地使用，在图 1.7 中给出这两种坐标系以及基矢量的单位三基$(\hat{e}_R,\hat{e}_\theta,\hat{e}_z)$和$(\hat{e}_r,\hat{e}_\theta,\hat{e}_\phi)$，但须注意，这两组单位三基的各自方向并不是固定不变，它们一般是位置的函数。



(a) 柱坐标



(b) 球坐标

图 1.7

1.5 张量的指标表示法

任何阶次的张量本身或者说它的分量，均可用清楚简明的指标写法(indicial notation)表示。按照这种表示法，在表示张量的字母符号之上要加上"上标或下标"，如表示张量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\mathbf{T}$、$\mathbf{F}$、…可写成

$$a_i, b^j, T_{ij}, F_i^{\cdot j}, \cdots$$

对于混合形式的 $F_i^{\cdot j}$，在指标 j 之前加上"·"，这表示 j 为第二个指标。

在指标表示法的规则里，对于一个按指标写法的张量或张量项，其字母指标可能只出现一次，亦可能出现两次。当字母指标不重复出现时，该字母要在 $1,2,\cdots,N$ 的范围内取值，其中 N 为规定指标域(range of index)的确定整数。不重复出现的指标称作自由指标(free indices)，一个给定的张量或张量项，它的张量阶则等于其指标写法中自由指标的个数。同样，在一个正确写法的张量式中，对于每个项中作为自由指标的字母均应相同。

1.5.1 一般的求和约定

当在按指标写法的张量或张量项中，若有一个字母指标重复出现共两次，则该指标要取完指标域中所有的值，然后将所得的各项加起来，这个求和约定称作爱因斯坦求和约定(Eistein's summation convention)，在这个求和约定中重复的指标称作哑标(dummy indices)。作为一个张量项中的哑标，它们可用除该项中的自由指标以外的任何字母代替而不改变该项的意义。一般讲，在一个正确写法的张量项中不会有任何指标出现两次以上，如果为满意地表示某个量必须重复使用某些指标两次以上，则求和约定必须中止。

---

* 坐标系有多种写法，如对直角坐标系，有时写成 $x_1x_2x_3$；有时写成：(x_1,x_2,x_3)；亦有写成：x^i 等。

自由指标的个数和位置可直接表明按指标写法的那个量的确切张量性质，一阶张量由一个带有一个自由指标的字母符号表示，因此任何一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 均可由一个带有一个"下标"或"上标"的字母符号表示，或者再加上一个括号表示*，即

$$a_i \quad 或 \quad a^i$$

或写成

$$(a_i) \quad 或 \quad (a^i)$$

对于只具有一个自由指标的如下各项式，亦作为一阶张量，即为

$$a_{ij}b_j, F_{ikk}, R^{p}_{\cdot qp}, \in_{ijk}u_jv_k$$

或写成

$$(a_{ij}b_j), (F_{ikk}), (R^{p}_{\cdot qp}), (\in_{ijk}u_jv_k)$$

二阶张量由带两个自由指标的字母符号表示，所以任何并矢式 $\mathbf{D}$ 都可按下述三种形式之一表示

$$D^{ij}, D_i^{\cdot j} \quad 或 \quad D^i_{\cdot j}, D_{ij}$$

或写成

$$\{D^{ij}\}, \{D_i^{\cdot j}\} \quad 或 \quad \{D^i_{\cdot j}\}, \{D_{ij}\}$$

在上述"混合形式"中 j 前加"·"，表示 j 为第二指标。二阶张量当然还可以其他不同形式出现，如

$$A_{ijip}, \; B^{ij}_{\cdot\cdot jk}, \; \delta_{ij}u_kv_k$$

或写成

$$\{A_{ijip}\}, \; \{B^{ij}_{\cdot\cdot jk}\}, \; \{\delta_{ij}u_kv_k\}$$

按照如上的逻辑，三阶张量则用带三个自由指标的字母符号表示。当然，不带有任何自由指标的字母符号则代表零阶张量即标量，如符号 λ。

在一般的物理空间中任一组基都是由三个非共面的矢量组成，因此在该空间中任一个矢量则由它的三个分量完全确定，于是在三维物理空间中表示一个矢量的 a_i 或 (a_i)，其指标的取值为 1、2、3。但须注意，在许多书（包括本书）中符号 a_i 有时代表矢量本身，有时代表该矢量的第 i 个分量。在指标域为 3 时，表示一个二阶张量（并矢式）$\mathbf{A}$ 的符号为 A_{ij} 或 $\{A_{ij}\}$，它共有 9 个分量，$\{A_{ij}\}$ 通常表成

$$\{A_{ij}\} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{1.62}$$

按同样方式，在三维空间中一阶张量 (a_i) 可表成一行或者一列

$$(a_i) = (a_1, a_2, a_3) \quad 或 \quad (a_i) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{1.63}$$

一般讲，对于指标域为 N 时，一个 n 阶张量将有 N^n 个分量。

---

* 在许多著作中表示一个矢量，如表示矢量 $\boldsymbol{a}$，只用 a_i 或 a^i 即可。但本书有时为了将矢量（或张量）的本身同其分量明确分开，而使用括号，即加括号者表示矢量（或张量）本身，不加者表示一个分量。对一阶张量（矢量）加圆括号；对一阶以上张量加大括号。