上海交通大学出版社

BIANJIE YUANFA JICHU

边界元法基础

王元淳　编著

边界元法基础

王 元 淳

上海交通大学出版社

内 容 简 介

本书系统地阐述了边界元法的基本理论及其应用，内容包括位势问题、弹性问题、离散化单元和边界元法的应用等。在边界元法的应用中介绍了三维问题、弹性扭转问题、板的弯曲问题、断裂力学问题、热弹性问题、非定常问题、非线性问题，满足边界条件的基本解的应用，区域分割法，以及边界元和有限元的结合解法等。

书中给出了用国际标准的 FORTRAN 77 语言和 BASIC 语言编写的求解多连域泊桑方程问题及多连域有体积力弹性问题的计算程序，并附有算例。

本书可作为大专院校的教材，也可供从事边界元法工作的工程技术人员参考。

边界元法基础

上海交通大学出版社出版

（淮海中路1984弄19号）

新华书店上海发行所发行

常熟文化印刷厂印装

开本：850×1168 毫米 1/32 印张 9.75 字数 250000

1988 年 9 月第 1 版 1989 年 1 月第 1 次印刷

印数：1—2,300

ISBN 7-313-00302-1/O·3 科技书目：180—245

定价：2.20 元

前　　言

本书介绍边界元法及其应用，着重阐述边界元法的基本理论，必要的公式都加以推导，并力求做到简明扼要，深入浅出。第二章和第三章阐述了边界元法的基本概念，以及二维位势问题和弹性问题的边界元解法。第五章简述了边界元法的应用。此外，还介绍了边界元法在应用中的一些处理方法。例如第二章中的多连域问题和高斯积分公式；第四章中的高次单元和角点的处理；第五章中的区域积分的边界积分表示，满足边界条件的基本解的应用和区域分割法等。

为了便于工程应用，在第二章和第三章中用国际标准的FORTRAN 77 语言和 BASIC 语言编写了多连域泊桑方程问题和具有体积力的弹性问题的计算程序，并附有算例。

本书计算程序(FORTRAN)承上海交通大学计算中心蒋思杰副教授审阅和修改；编写过程中得到日本大阪府立大学名誉教授、大阪電気通信大学教授閑谷壮，近畿大学副教授松本鉄一，东京都立科学技術大学副教授田中喜久昭和大阪府立大学片山忠一等先生的指导和帮助，出版过程中还得到我校章林副教授的大力支持，在此表示衷心感谢。由于作者水平有限，难免有错误缺点，请读者批评指正。

王　元　淳

1987.9.于上海交通大学

目　　录

第一章　绪　　论

本章叙述边界元法的特点和基本解的概念。

§1.1　边 界 元 法

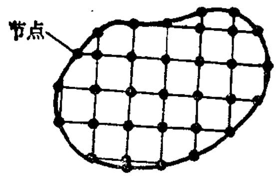
物理学、力学和工程技术方面的许多问题都可归结为按初始条件和边界条件求解偏微分方程的初值-边值问题。当只有初始条件而没有边界条件时就成为初值问题，反之则是边值问题。区域内的偏微分方程称为基本方程，或称为支配方程、控制方程。初始条件是表示初始状态的条件，边界条件是表示边界上约束情况的条件。也可以把初始条件和边界条件合称为边值条件，则初始条件为时间边值条件，而边界条件为空间边值条件。

对于工程上提出的问题，能采用解析法按照边值条件求解偏微分方程的仅限于极少数情况。所以，一般只能采用近似方法求解。近年来，随着电子计算机的广泛应用，数值解法逐渐成为解边值问题的一种非常有效的方法。

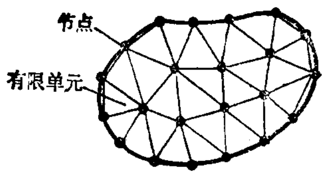
数值解法分为区域型和边界型两大类。区域型数值解法主要是有限元法(Finite Element Method， 简写为 FEM)和有限差分法(Finite Difference Method， 简写为 FDM)。边界型数值解法主要是边界元法(Boundary Element Method，简写为 BEM)。

采用差分法时，将所考虑的区域织成网格，如图 1-1(a)所示。用差分近似微分，把微分方程变换成差分方程。也就是通过数学上的近似，把求解微分方程的问题变换成求解关于节点未知量的代数方程的问题。

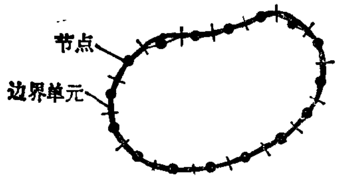
采用有限元法时，将所考虑的区域分割成有限大小的小区域，



(a)



(b)



(c)

图 1-1

称为有限单元，这些单元仅在有限个节点上相连接，如图 1-1(b)所示。根据变分原理把微分方程变换成变分方程。它是通过物理上的近似，把求解微分方程的问题变换成求解关于节点未知量的代数方程的问题。

采用边界元法求解时，根据积分定理，将区域内的微分方程变换成边界上的积分方程。然后，将边界分割成有限大小的边界元素，称为边界单元，如图 1-1(c)所示，把边界积分方程离散成代数方程。同样，把求解微分方程的问题变换成求解关于节点未知量的代数方程的问题。

边界元法只需将区域的边界分割成边界单元，使所考虑问题的维数降低一维，即可把三维问题转变成二维问题来处理，将二维

问题转变成一维问题来处理。因此，与对整个区域进行分割的区域型解法相比，它具有输入数据少，计算时间短等优点，便于微机应用，特别适用于无限域问题和三维问题。此外，边界元法只对边界离散，离散化误差仅来源于边界，区域内的有关物理量可由解析式的离散形式直接求得，因此提高了计算精度；求解时要改变内点的数量或位置也非常方便；对于只需求出边界值的问题，关于区域内的物理量可以不必进行计算，能提高计算效率。

边界元法分为直接法和间接法两类。直接法用物理意义明确的变量来建立积分方程，积分方程中的未知函数就是所求物理量在边界上的值；间接法用物理意义不一定明确的变量来建立积分方程。例如，在位势问题中用单层位势或双层位势等表示所求的物理量。本书就直接法加以论述。

积分方程是边界元法的理论基础。它的研究可以追溯到19世纪初，当时仅从理论上对各类问题推导出解的积分方程，并未涉及到数值计算。60年代初，积分方程法作为数值计算方法开始应用于实际问题。当时主要以边界元法的间接法为主，采用边界选点法求解，就是使边界积分方程在边界上有限个点满足边界条件，并进行求解的方法。60年代后半期，边界元法的研究更趋活跃，边界元法的直接法被应用于各类问题。70年代后，在经典的边界积分方程法的基础上吸收了有限元法的离散化技术，使边界元法的发展有了重大突破。又经过10年多的发展和普及，边界元法已成为数值计算方法的一个重要分支，在工程各领域中得到了广泛的应用。

§1.2 基 本 解

边界元法中，将微分方程变换成积分方程时要应用基本解。设以函数 u 表示的某一物理现象与时间无关，微分方程为

$$L[u(P)]=0, \tag{1.1}$$

其中的L为线性微分算子，P为区域内的点。

式(1.1)的基本解u^*定义为下列方程的解

$$L[u^*(P,\ Q)]+\delta(P-Q)=0, \tag{1.2}$$

式中的P和Q为无限域中的任意两点，$\delta(P-Q)$为狄拉克(Dirac) δ函数：

$$\delta(P-Q)=\begin{cases}0 & P\neq Q\\ \infty & P=Q\end{cases}, \tag{1.3}$$

它的值由P和Q两点的相对位置决定，所以叫做二点函数。通常把这两点分别称为观察点和源点。

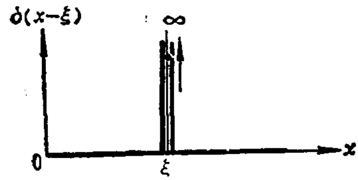


图 1-2

一维狄拉克δ函数如图1-2所示，P点和Q点的坐标分别以x和ξ表示。它具有下列性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)\mathrm{d}x=1, \tag{1.4}$$

$$\int_a^b u(x)\delta(x-\xi)\mathrm{d}x=\begin{cases}u(\xi) & a<\xi<b\\ 0 & \xi<a \text{ 或 } b<\xi\end{cases}。 \tag{1.5}$$

二维、三维场合，狄拉克δ函数的性质可以写成

$$\int_\Omega \delta(P-Q)\mathrm{d}\Omega=1,\quad Q\text{在区域}\Omega\text{内}, \tag{1.6}$$

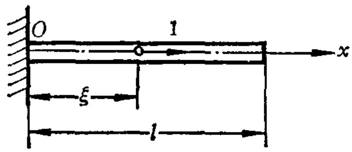
$$\int_\Omega u(P)\delta(P-Q)\mathrm{d}\Omega=\begin{cases}u(Q), & Q\text{在区域}\Omega\text{内}\\ 0, & Q\text{不在区域}\Omega\text{内}\end{cases}, \tag{1.7}$$

二维时为面积分，三维时为体积分。

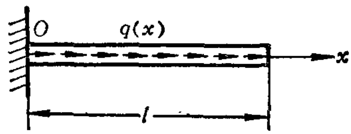
按狄拉克δ函数的定义，式(1.2)的解，即基本解$u^*(P,\ Q)$表示在Q点存在着单位强度的“源”时，对无限域中任意点P产生

的影响。

现以图 1-3(a)所示的受单位集中力的拉杆为例，说明基本解的物理意义。



(a)



(b)

图 1-3

当拉杆受分布拉力 $q(x)$ 作用时，如图 1-3(b)所示，以 x 方向位移 $u(x)$ 表示的平衡方程为

$$EA\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}+q(x)=0, \tag{1.8}$$

式中的 E 为材料的拉压弹性模量，A 为杆的横截面面积。

受单位集中力时

$$q(x,\ \xi)=\delta(x-\xi)。 \tag{1.9}$$

将上式代入式(1.8)，则有

$$EA\frac{\mathrm{d}^2u^*(x,\ \xi)}{\mathrm{d}x^2}+\delta(x-\xi)=0。 \tag{1.10}$$

可见，上述方程的解 $u^*(x,\ \xi)$ 表示单位集中力作用在 ξ 点时，在拉杆任意点 x 处产生的轴向位移。

各种方程的基本解可查阅有关文献。

第二章 位势问题

本章以位势问题中的拉普拉斯(Laplace)方程为主，叙述边界元法的基本概念。首先推导了拉普拉斯方程的基本解，并将它应用于格林(Green)定理，得到拉普拉斯方程问题的积分方程和边界积分方程。然后采用最简单的常单元说明边界积分方程的离散化方法。最后简述了泊桑(Poisson)方程和多连域问题的边界元解法。

本章给出了求解多连域泊桑方程问题的计算程序和数值计算例子，以及数值积分所使用的一维、二维高斯(Gauss)积分公式。计算程序分别用国际标准的FORTRAN 77语言和BASIC语言写成。

§2.1 拉普拉斯方程的边值问题

拉普拉斯方程是物理学和工程中最重要的方程式之一，应用于电磁场、热传导、流体力学和弹性力学等问题。

2.1.1 拉普拉斯方程的例子

1．静电场方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0, \tag{2.1}$$

式中的U为电位，它与电场强度E之间有下列关系：

$$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x},\quad E_y=-\frac{\partial U}{\partial y},\quad E_z=-\frac{\partial U}{\partial z}.$$

2．静磁场方程

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}=0, \tag{2.2}$$

式中的$\boldsymbol{A}$为矢势，它与磁通密度B之间有下列关系：

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$B_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$B_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}。$$

3．热传导方程

区域内无内热源时，定常热传导方程为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0, \tag{2.3}$$

式中的T为温度。

4．不可压缩流体方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=0, \tag{2.4}$$

式中的ϕ为速度势，它与速度v之间有下列关系：

$$v_x=\frac{\partial \phi}{\partial x},\qquad v_y=\frac{\partial \phi}{\partial y},\qquad v_z=\frac{\partial \phi}{\partial z}。$$

5．直杆弹性扭转方程

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0, \tag{2.5}$$

式中的F为扭转函数。

2.1.2 拉普拉斯方程的边值问题

上述各例的微分方程可统一写成下列形式：

$$\nabla^2 u=0, \tag{2.6}$$

式中的u为势函数，∇^2为拉普拉斯算子。

按照边界条件的不同，拉普拉斯方程的边值问题分为三类。

1．第一类边界条件(Dirichlet 条件)

全部边界上的函数值已知，即

$$u=\bar{u}, \tag{2.7}$$

式中的字母上加“－”的量表示边界上的给定值。

2．第二类边界条件(Neumann 条件)

全部边界上的函数的法向导数值已知，即

$$q=\frac{\partial u}{\partial n}=\bar{q}。 \tag{2.8}$$

3．第三类边界条件(混合边界条件)

一部分边界已知函数值，另一部分边界已知函数的法向导数值。或者，已知函数和它的法向导数之间的关系。

§2.2 积 分 方 程

考虑下述二维拉普拉斯方程的第三类边值问题：

$$\nabla^2 u=0, \qquad 区域\ \Omega\ 内, \tag{2.9}$$

$$\left.\begin{aligned} &u=\bar{u}, && 边界\ \Gamma_u\ 上\\ &q=\frac{\partial u}{\partial n}=\bar{q}, && 边界\ \Gamma_q\ 上\end{aligned}\right\}。 \tag{2.10}$$

如图 2-1 所示，将所考虑问题的区域以 Ω 表示，函数值已知的边界以 Γ_u 表示，函数的法向导数值已知的边界以 Γ_q 表示。整个边界以 Γ 表示，$\Gamma=\Gamma_u+\Gamma_q$。区域内的点以 P、Q 等表示，边界上的点以 P'、Q' 等表示。

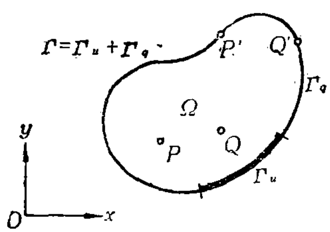


图 2-1

2.2.1 格林公式

设函数 u 和 v 在区域 Ω 和边界 Γ 上可微，按高斯定理有

$$\left.\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\,d\Omega=\int_\Gamma u n_x d\Gamma\\ \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial y}\,d\Omega=\int_\Gamma u n_y d\Gamma\end{aligned}\right\}, \tag{2.11}$$