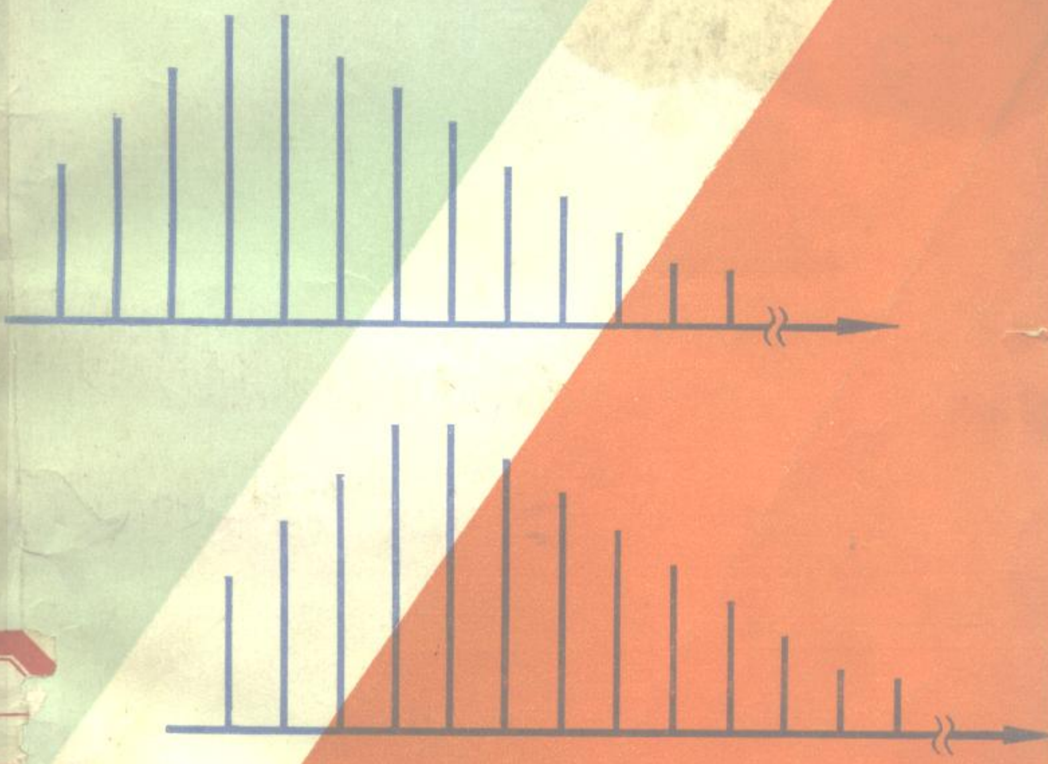
Z变换

摘译自《变换方法及其在工程和运筹学中的应用》



[美] E. J. 默斯 著　葛明浩 译　陈大棓 校

Z 变 换

摘译自《变换方法及其在工程和运筹学中的应用》

[美] E. J. 默斯 著

葛明浩 译

陈大棓 校

内容简介

Z变换是适用于对离散变量的序列进行运算的一种变换方法，在工程技术和应用科学中广泛地得到使用。本书摘译自E. J. 默斯所著的《变换方法及其在工程和运筹学中的应用》一书，比较系统而详尽地介绍了Z变换的概念、方法和应用。全书共分三章：第一章着重介绍Z变换的基本概念、运算规则和变换方法；第二章着重介绍Z反变换的各种方法；第三章分别介绍了用Z变换求解差分方程和微分-差分方程的方法，以及它在系统分析、库存模型和随机过程等多方面的应用。每部分都附有大量的例题和习题。书末附有四个变换表格。

本书可供应用科学、系统工程，以及计算机、无线电、自动控制等专业的教师、研究生、高年级大学生，及有关工程技术人员参考用。凡具有微积分基础的读者均能自学。

EGINHARD J. MUTH
TRANSFORM METHODS
With Applications To Engineering
And Operations Research
Prentice-Hall, Inc. 1977

2000 / 7.10

Z 变 换

摘译自《变换方法及其在
工程和运筹学中的应用》

[美] E. J. 默斯 著
葛 明 浩 译
陈 大 棓 校

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.25 字数 174,000
1980 年 1 月第 1 版 1981 年12月第 2 次印刷
印数 5,601—8,600
书号 15012·0244 定价 0.75 元

译 者 序

Z 变换是对离散变量序列进行运算的一种有力的数学工具，它广泛地应用于应用科学和系统工程之中。

为了较为详尽地介绍Z变换，我们摘译了《变换方法及其在工程和运筹学中的应用》的有关几章。原著系美国佛罗里达大学工业工程和系统工程系使用的教材(1977年版)。全书共分七章，前四章为：复变数介绍、拉普拉斯变换、拉普拉斯反变换和拉普拉斯变换的应用。鉴于这些内容不仅读者比较熟悉，而且国内也有多种参考书，因此这几章没有翻译。

本书的第一、二、三章译自原著的第五、六、七章，它对Z变换及其应用作了比较系统的介绍。第一章着重介绍Z变换的基本概念、运算规则和变换方法；第二章着重介绍Z反变换的各种方法；第三章分别介绍了用Z变换求解差分方程和微分-差分方程的方法，以及它在系统分析、库存模型和随机过程等多方面的应用。书中附有五十多道例题和近三百个习题。可供有关专业的师生、工程技术人员参考使用，凡具有微积分和复变函数基础的读者均可自学。

为了简捷地引出Z变换和领会变换方法的共同实质，作者常把Z变换与拉普拉斯变换进行类比。因此，Z变换的某些问题涉及到前面章节中的内容。对这些内容，我们以备注的形式补译出来并附在各章末尾，以便于读者参考。

书中有些例题或习题对于我国的具体情况并不相符。但考虑到保持全文的完整性，特别是有些问题有助于概念的加深以及在方法上可作借鉴，因此照译出来。

由于译者的水平有限，书中定有错误和不妥之处，请同志们批评指正。

在本书的翻译过程中承北京工业大学颜超同志、张弘同志、谢长春同志大力支持，谨此感谢。特别要感谢四机部一〇一四研究所王平孙同志对全文作了详细的校阅并提出许多宝贵的修改意见。

译者

1978, 12.

原　序

拉普拉斯变换和Z变换是工程、运筹学和应用科学中所必需的基本数学工具。与这种工具的应用价值相对应的是我们对它的钻研程度；如果我们要充分发挥这种数学工具的全部潜力，则除需具有一定的运算技巧之外，还需在理论上进行严谨的学习。学生往往从非专门论述变换的课程中附带地获得一些变换方法的知识。在这种情况下，学生虽然可以学到一些诀窍以解决某些典型问题，但是非常容易发生严重错误，往往是利少弊多。本书是从大学生课程的变换方法的教材中发展而来的，它曾在佛罗里达大学的工业工程和系统工程系教用多年。所有的大学生，通常在三年级接受这门课程，大部分研究生也学习这门课程。此课程的主要目的是使学生能充分熟练地使用变换方法以及透彻的理解变换的数学基础、有关的推理和可能存在的不足之处。书中所列举的在应用上的例子是为了诱导启发，而并非主要重点。我们的学生会有充分的机会将变换方法运用于后学的课程中，诸如：运筹法、库存论、可靠性工程、生产控制和预报等。在我们对大学生课程的教学过程中，没有找到一本适合我们需要的课本。尽管有许多书在某种程度上涉及拉普拉斯变换，但它们不是在数学上太抽象，就是太偏重于电气工程和电路理论。Z变换的专著实在少见，凡是在有关主题的书籍中涉及这种变换之处，通常都是按电气工程师的取样数据的观点来论述的。当然这有历史上的原因，因为电气工程师首先广泛地使用这两种变换方法。

本书供工程、运筹学和应用数学专业的三年级或四年级大学生使用。它需要的预备知识是微分学和积分学等基础课程，这几

门课程通常已包括在工科和理科大学的一、二年级课程之中。本书题材的选取，以及由基本原理引出概念和方法的处理方式，均使此书适宜于自学或作参考书之用。

本书特意对两种变换方法给于平衡的论述，并利用二者之间的相似性。第一章给出复变数的基本论述，若无这些论述则不可能理解变换方法。关于拉普拉斯变换的第二章和第三章，与关于Z变换的第五章和第六章在结构上是平行的。不过，在2-1和2-2节中所给出的关于使用变换的原因，以及在3-3节给出的关于使用部分分式展开方法的原因，在第五章和第六章中就不重复了。若需要学习的仅仅是Z变换，则可学习第一章和五至七章。在后面这种情况下，读一下2-1、2-2和3-3节也是有帮助的。

为了达到良好的教学效果，一般可以把理论和应用综合起来，也可以使它们各自独立。在本书中，我有意识地把理论和应用分开来论述。其原因之一，是我喜欢用这种方法去处理教材。在我当学生和见习工程师的岁月里，我曾多次遭受挫折，原因是我只知如何去做而不知其所以然，所以我深信，学生在奔跑之前应先学会走路。把理论和应用分开的另一原因是，这样可以给出较大的灵活性和使本书适用的范围更广。例如，学生能把一、二、三、五章和第六章顺利地读下来，而不需要通晓任何工程上的专用术语。书中各章顺序的安排可以用作数学系教学的一门典型课程，也可供仅具有微积分基础的任何人使用。第四章和第七章以多方面的练习来论述应用问题。鉴于理论已被作了深入细致的研究，因而其应用范围是相当宽广的。写这两章的一个目的是要说明变换方法的多样性，并说明藉此方法可获解决的各种问题的分布范围。在这些论述应用的章节中，涉及一个新的关于物理原理和自然现象的模型的问题。为了使没有专业基础的学生也易于接受，我力图使这些问题的讨论尽可能地浅近易懂。这些章节之间自成段落，

所以教师能按照其所开课程的特点和所希望强调的重点自由地选用和进一步扩大应用范围。此外，尤其在学生原先已经接触过一些变换方法的情况下，教师也许愿意，从论述应用的章节出发开始他的课程，然后反过来讲所需的运算规则和理论。

E. J. 默斯

目　　录

第一章 Z 变换

1-1 引　　言

Z 变换是一种具有许多类似于拉普拉斯变换性质的数学变换。其与拉普拉斯变换的主要区别是，它并不对连续变量 t 的函数 $f(t)$ 进行运算，而是对离散的整数值变量 n 的序列 f_n 进行运算。序列是数值的函数，它的定义域是整数的集合。这里 n 为独立变量，它可以是包括所有整数的集合，即 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$。特定的序列将用符号 f_n, g_n, h_n, 等等来表示。用了这样的标记，由于独立变量 n 以下标形式出现，所以 n 也称为标志数*，于是按照上述定义，可见序列 f_n 实质上是一种对应规律，它对于标志数 n 的每一个值确定一个数 f_n。注意，这种规律体现在符号 f, g 和 h 里，而 n 仅仅是一个虚设的变量，对 n 可改用其它符号而并不改变对应规律。例如，规律

$$f_n=5(n+1)^2 \qquad n=0, \pm1, \pm2, \cdots \tag{1-1}$$

可等价地写作

$$f_k=5(k+1)^2 \qquad k=0, \pm1, \pm2, \cdots$$

为了着重说明，要表示的是一个序列即规律 f 的汇集的性质，而不是一个特定的值 f_n(比方说，f_{10})，人们有时在 f_n 两旁用大括号围起来。这大括号表示所有 f_n 的值的汇集。用此标记，则式(1-1)变为

$$\{f_n\}=\{5(n+1)^2\}$$

* 标志数，原文为 index。

不过，为了方便起见大括号在文献中经常被省略掉。但此时的情况与对 t 的函数 f 使用标记 $f(t)$ 的一样，无法区别 $f(t)$ 是表示规律 f 还是表示函数的特定值即一个数。这就需要读者根据上下文来加以判别。在本书里，我们明确规定无论何时用到下标 n，如 f_n，则其含义是指序列汇集的性质。凡与此规定不符的情况，将特别注明。

我们说明一下，某些作者用标记 $f(n)$ 去表示一个序列。但因这种标记也用于具有连续变量的函数，故在论及序列时它就显得不明确。因此，本书宁愿采用 f_n，在文献中通常也是如此。

可用来说明一个特定序列的规律，不一定需要具有如式(1-1)那种闭合型表示式。一个序列也可以用 n 和 f_n 的值的表格来表示，尽管在此情况下，只能提供有限项数的值。例如，序列 $f_n=n/(1+n^2)$ 可用下面的表格来表示：

n	…	-1	0	1	2	3	…
f_n	…	$-1/2$	0	$1/2$	$2/5$	$3/10$	…

数值表是说明经验的或观察值的序列的唯一方法。例如用 f_n 表示某种存货在贸易的第 n 天末尾时的收盘价格。我们知道，在此情况下 f_n 不能定义于 $n\leqslant 0$。若令 f_0 为第一天贸易时的开盘价格，则此定义可以扩充到 $n=0$。

要作 Z 变换的序列只需要在 $n\geqslant 0$ 处有定义。然而，如果一个序列又被定义于 $n<0$，则它对于 $n<0$ 的值不影响 Z 变换。这是与实际情况相符合的，在实际应用中，总存在一个起始点 $n=0$，n 通常表示时间的离散值。对于 $n<0$，则相应的序列在某些情况下是无定义的，而在另一些情况下，它们的值是不知道的。即在所有的情况下，序列在 $n\leqslant 0$ 处的值是不相干的。为了数学上的方便，从

今以后我们定义 n 为负值的所有序列为 0。这一情况将在 1-5 节里详细讨论。按此规定，用式(1-1)定义的序列就不属于容许序列。今后我们明确规定，如将序列写成

$$f_n=5(n+1)^2$$

则是指如下的序列

$$f_n=\begin{cases}5(n+1)^2 & \text{当 } n=0,1,2,\cdots \\ 0 & \text{当 } n=-1,-2,-3,\cdots\end{cases}$$

因为现在仅需说明 $n\geqslant 0$ 时的 f_n 的值，故我们可以用一个有序的数集来表示一个序列，即

$$f_n=(f_0,f_1,f_2,\cdots)$$

例如，可将序列 $f_n=n/(n+1)$ 改写为

$$f_n=\left(0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots\right)$$

在实际工作中出现需要处理的是序列而不是连续函数的情况，这是因为有些物理现象具有固有的离散性质，而且即便我们观察许多连续的现象也只是在时间的离散点上进行的。我们曾经给出的存货的收盘价格就是一个例子。现在我们再来考察某一地点的温度，温度是时间 t 的连续函数 $f(t)$。假设每天在正午记录温度，令 t_n 表示第 n 个观察日的正午，则 $(t_1, t_2, t_3, \cdots)$ 组成一个时间上的点的列序；再令 $f_n=f(t_n)$，我们就得到每天正午温度的序列 f_n。这是一个连续现象在时间的离散点上取样的例子。时间点 t_n 构成取样点。在这个例子中，取样点的间隔是相等的，即由一个正午到另一个正午。然而，等间隔取样并不是必要的，倘使我们把存货的收盘价格看成是从一个连续的变动价格中取样而得，则我们可以看到这些取样点不是等间隔的，因为不是每天都是一个贸易日。与温度的每天取样的情况不同，日平均温度所构成的物理量则存在固有的离散性。另一个固有离散现象的例子是在服务站中售给

第 n 个顾客的汽油量。最后，我们还可看到，数字计算机处理数据也是以离散时间的形式出现的。计算机广泛地使用于生产过程的控制之中，例如对一造纸工厂的生产过程的控制。在这些应用中，输入至计算机的取样数据是从大量的连续量或离散量中取样而得。这就很明显，在今日之工程应用中，取样数据系统扮演着一个很重要的角色。

1-2 Z 变换举例

拉普拉斯变换已被证明是求解线性微分方程的简便工具。Z 变换对线性差分方程的求解具有相似的作用。差分方程是确定序列的函数方程，恰如微分方程确定函数一样。这样，我们可以把差分方程视作微分方程的离散状态对应者。为了阐明这一点，今考察一个微分方程的数值解，数值解涉及一种步进逼近的算法。这是我们想用数字计算机解微分方程时会遇到的情况。作为一个简单的例子，我们选择一阶微分方程

$$\frac{d}{dt}y(t)+ay(t)=x(t) \qquad a>0 \tag{1-2}$$

为了用数值法求解这个方程，我们在时间点 $t_n=nT$ 的序列上将函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 进行取样。这里 T 是一个固定的时间间隔，我们置

$$x_n=x(t_n) \qquad y_n=y(t_n) \qquad n=0,1,2,\cdots$$

由微积分学可知，$y(t)$ 对 t 的导数的定义为

$$\frac{d}{dt}y(t)=\lim_{h\to 0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h}$$

因此，只要给出的 T 足够小，则 $y(t)$ 对 t 的导数在 t_n 的近似值为

$$\frac{d}{dt}y(t_n)\approx\frac{y(t_n+T)-y(t_n)}{T}=\frac{y_{n+1}-y_n}{T} \tag{1-3}$$

序列 $y_{n+1}-y_n$ 称为 y_n 的一阶前向差分。这个差分的运算可用差分算子 Δ 来表示，今将它用于序列 y_n。这样我们就有

$$\Delta y_n = y_{n+1}-y_n \tag{1-4}$$

由近似关系式(1-3)，方程(1-2)的离散型为

$$\Delta y_n + aTy_n = Tx_n \tag{1-5}$$

这是一个一阶差分方程，它是用已知序列 x_n 来定义未知的序列 y_n 的。显然，这种形式，与式(1-2)很相似。不过，方程(1-5)通常写成

$$y_{n+1}+(aT-1)y_n = Tx_n \tag{1-6}$$

当然，方程(1-6)是一个真正的无穷的方程系，它适用于 $n=0, 1, 2, \cdots$。这个方程系能够递推地解出。若要求出一个唯一的解，则除了已知序列 x_n 外，还必须说明初始条件 y_0。第一个方程(当 $n=0$)是

$$y_1=(1-aT)y_0+Tx_0$$

可由第一个方程解出 y_1，然后再由第二个方程解出 y_2，依次类推。这是用于计算机的方法。而另一方面，对所有 n 的值均有效的闭合型解，则可通过 Z 变换的方法而获得。

我们期望式(1-6)的解是式(1-2)在时间点序列 t_n 上的近似解。为证明这一点，考虑对所有的 t，$x(t)=0$ 的情况，此时式(1-2)的解 $y(t)$ 在 t_n 点已知为

$$y_n = y_0e^{-at_n} = y_0(e^{-aT})^n \tag{1-7}$$

而当 $x_n=0$ 时式(1-5)的解是

$$y_n = y_0(1-aT)^n \tag{1-8}$$

这一点是很容易验证的，只要将式(1-8)代入式(1-6)就是了。比较式(1-7)和(1-8)可以看出，解答(1-7)是按几何关系(指数地)下降；而如果 $aT<1$，则解答(1-8)也同样按几何关系下降。事实上，当 $aT\ll 1$，则 e^{-aT} 近似等于 $1-aT$，而方程的解答(1-8)将非常接

近于解答(1-7)。这样，闭合型解(1-8)就使我们能够确定要选择什么样的取样间隔T以得出具有一定精确度的数值解。

这个例子指出了微分方程与差分方程之间的类似地方，它的主要目的是启发已经熟悉微分方程并惯于用拉普拉斯方法求方程解的读者。但这个例子并不意味着差分方程经常是从对微分方程进行取样而获得的。差分方程凭其自身的规律而存在，一如序列之存在。在第三章的应用问题中这一点将显得更为明确。

我们还能进一步地指出拉普拉斯变换与Z变换的类似之处。对于拉普拉斯变换的每一个运算规则就有一个相应的Z变换的运算规则；而对于拉普拉斯变换的每一种应用也存在一种相应的Z变换的应用。所以，我们不需要从头开始去发展一个全新的数学理论。取代的方法是，我们将利用在学习拉普拉斯变换时已曾获得的全部知识。这里建议读者发挥一下引出类似之处的思考习惯，这样，他将看到这两种变换方法的各种相似之点。

习　题

1-1. 试根据你自己的经验，描述一个产生数的序列的物理现象，并描述一个从连续函数中取样得到的序列。

1-2. 以下各现象究竟应表示为连续时间的函数呢还是离散时间(序列)的函数？试确定之。并给出一个简明的解释。

(a) 出现在某段公路上的汽车数。

(b) 在某城市每天出售的报纸数。

(c) 在美国每月汽油的消耗量。

(d) 你的汽车的转卖价格。

1-3. 试用一个闭合型表达式来表明以下各序列的规律：

(a) $f_n=(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots)$

(b) $f_n=(0,\ \sqrt{1/2},\ 1, \sqrt{1/2},\ 0,\ -\sqrt{1/2},\ -1,\ \cdots)$

(c) $f_n=(-2,\ -1,\ 2,\ 7,\ 14,\ 23,\ \cdots)$

1-4. 试把以下各序列用f_n和f_{n+1}之间的关系来表达：

(a) $f_n=(0.6,\ 2.6,\ 4.6,\ 6.6, \cdots)$

(b) $f_n=(-1.2,\ 0.4,\ 1.2,\ 1.6,\ 1.8,\ 1.9, \cdots)$

1-5. 逐次应用差分算子 Δn 次，可得一个序列的第 n 次差分，今将其运算结果写作 Δ^n，试证明

$$\Delta^2 y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

1-6. 若二阶微分方程为

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = x(t)$$

试写出用于求此微分方程的数值解的差分方程。用算子 Δ 表示差分方程，并将此方程写成类似于式(1-6)的形式。

1-7. 令 f_n 为某一序列，对此序列进行求和运算可得出一个新的序列 g_n

$$g_n = \sum_{i=0}^{n} f_i$$

试确定用 Δg_n 定义的序列。你对有关差分及求和的运算能略作评述吗？并指出同连续函数的运算的类似之处。

1-8. 令

$$g_n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

求序列 Δg_n 的闭合型表达式，然后用一个特定序列的和来表示 g_n。

1-3 Z 变换的定义[注1]

Z 变换是一种算子，它将序列 f_n 映射成函数 $F(z)$，这里 f_n 是原空间的元素，而函数 $F(z)$ 是变换空间的元素。这种关系如图 1-1 所示。函数 $F(z)$ 称为序列 f_n 的变换式或称序列 f_n 的象。一个特定的序列 f_n 和它的象函数 $F(z)$ 构成了一个变换对。Z 变换的算子用符号 $\mathscr{Z}$ 表示，我们把 Z 变换写成

$$\mathscr{Z}[f_n] = F(z)$$

而把反变换写成

$$\mathscr{Z}^{-1}[F(z)] = f_n$$