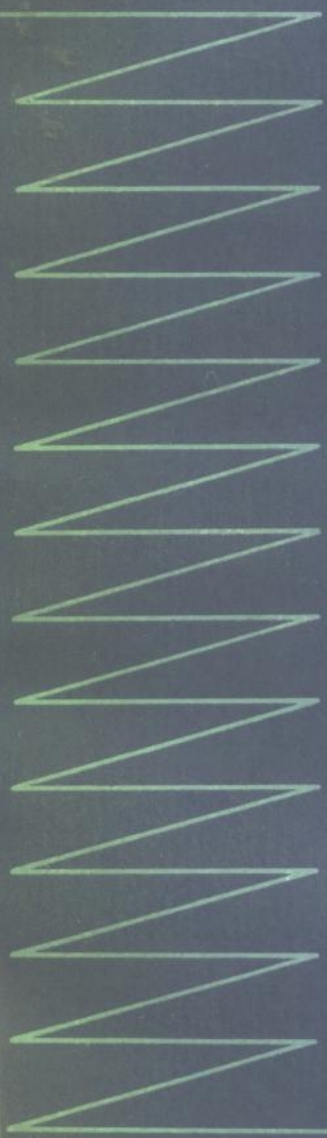




数理逻辑 导引

张尚水 著

中国社会科学出版社

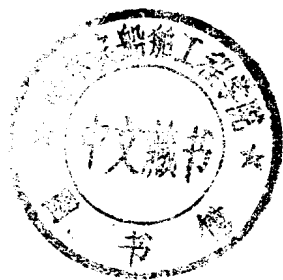
0141

Z24

413583

数理逻辑导引

张尚水 著



中国社会科学出版社

责任编辑：李树琦

责任校对：邓 华

封面设计：王 迪

版式设计：王丹丹

数理逻辑导引

Shuli luoji daoyin

*

中国社会科学出版社 出版
发 行

经 售 处
国防科工委印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本 10.5 印张 265 千字

1990年4月第1版 1990年4月第1次印刷

印数1— 3 000 册

ISBN 7-5004-0203-1/B·32 (平) 定价：4.40元

126660
内 容 提 要

本书主要讲述数理逻辑的基础部分，即命题逻辑和一阶谓词逻辑。两部分的论述都是从语义论到语形论，建立严格的公理系统，最后讨论它们的元逻辑性质。对于人们学习中常见的难点，书中都作出了详尽分析。作者除对基本逻辑系统的介绍外，还特别注意对其他公理系统、自然推理系统和表列方法的概要介绍。集合论和模型论也有专节讲述。全书开篇给出阅读本书的若干预备知识。这是一部供文、理专业共同使用的专著。

目 录

绪论

§1 数理逻辑	1
§2 预备知识	5

第一章 命题逻辑

§1 复合命题 联结词	20
§2 真值联结词 真值形式	23
§3 命题形式 真值表方法	32
§4 真值函数 重言式	40
§5 重言后承 推理的形式结构	48
§6 联结词的可定义性、完全性和独立性	58
§7 等值 对偶性 范式	65

第二章 命题演算

§1 形式系统	92
§2 命题演算P的语言及其语法	100
§3 P的公理和推理规则	112
§4 演绎定理	123
§5 P中定理的证明(续)	137
§6 赋值 重言式	149
§7 P的可靠性和协调性	153
§8 P的弱完全性	157
§9 P的强完全性	161
§10 公理的独立性	166

§11 命题逻辑的其它公理系统.....	171
§12 命题逻辑的自然推理系统.....	174
第三章 一阶谓词逻辑	
§1 个体词 谓词 函数词.....	184
§2 变元和量词.....	186
§3 自由变元和约束变元.....	193
§4 谓词逻辑的命题形式.....	195
§5 一阶语言.....	203
§6 一阶语言的语义.....	212
§7 代入.....	221
§8 表列方法.....	233
§9 范式.....	249
第四章 一阶谓词逻辑(续)	
§1 一阶谓词演算.....	259
§2 定理的推演 导出规则.....	262
§3 演绎定理.....	268
§4 定理的推演(续) 对偶原则.....	273
§5 可靠性和协调性.....	280
§6 完全性.....	283
§7 带等词的一阶谓词演算.....	292
§8 模型论初步.....	311

绪 论

在这绪论中,我们将对什么是数理逻辑作一直观的简单说明,并且介绍阅读以后各章所需要的某些预备知识。

§1 数 理 逻 辑

为了说明数理逻辑的特点,我们首先简单说一说传统逻辑的局限。所谓传统逻辑,是指由亚里士多德所创立的逻辑,它的主要内容包括亚里士多德的三段论理论和由麦加拉-斯多亚派的学者创立的关于命题逻辑的一部分内容。传统逻辑也称为亚里士多德逻辑。从亚里士多德建立第一个系统的逻辑理论到一百多年前数理逻辑诞生,传统逻辑经历了2000多年的发展历史。传统逻辑研究的中心课题是命题形式和正确的推理形式。但是,传统逻辑对命题形式的研究和对正确的推理形式的研究,都存在巨大的局限。

传统逻辑的局限突出表现在,它以正确的推理形式作为自己的主要研究课题,但对一些很简单然而很根本的推理形式,却不能作出分析,并且没有把它们纳入自己的研究范围之内。可以用一个简单的例子来说明这一点。例如,从

(1)所有的展品都有人欣赏。得不出结论

(2)有人欣赏所有的展品。但是,从(2)无疑可推出(1)。传统逻辑没有分析从(2)推出(1)这样的推理,概括出这种推理的形式。其次,传统逻辑对推理形式的分析不精细、不严格,把不同的前提与结论之间关系看作相同的,把实际上并不是某种推理形式的前提与结论之间的关系,看成是某种形式的推理。例

如，下面的

(3) 如果一个数的各位数字的和是3的倍数，那么该数是3的倍数，369的各位数字的和是3的倍数，所以，369是3的倍数。和(4) 如果369的各位数字的和是3的倍数，那么369是3的倍数，369的各位数字的和是3的倍数，所以，369是3的倍数。在传统逻辑中都被看作是肯定前件的假言推理，有相同的形式：

(5) 如果A，那么B，A，所以，B。实际上，(3)和(4)是不同的。只有(4)才是具有形式(5)的肯定前件的假言推理。因为，(3)中的第一个前提是一个一般的命题，这个命题的前件与(3)的第二个前提是不同的，第一个前提的后件与(3)的结论也是不同的。因此，(3)并不是一个具有形式(5)的推理。从(3)的前提不能直接得出(3)的结论，而要通过中间步骤，还要用到其它的推理规则，包含其它形式的推理。从(3)的前提得出它的结论有一个推演过程，而需要加以分析，与(3)相应的推理形式不是(5)，要比(5)更复杂。在这一点上，和下面的例子是相似的。从下面的前提(a)、(b)和(c)：

(a) $a=a$ ；(b) 如果 $a=b$ ，那么 $b=a$ ；(c) 如果 $a=b$ 并且 $b=c$ ，那么 $a=c$ ；

能推出结论

(d) 如果 $a=b$ ，那么 $a=c$ ，当且仅当， $b=c$ 。

说从(d)是(a)、(b)和(c)的一个推论，当然是对的。但是，说从(a)、(b)和(c)可以推出(d)，这并不就是说这是一个推理，而是指有一个从(a)、(b)和(c)得出(d)的推演。一个推演可以是一步的推理，也可以包括许多步推理。因此，说从某些前提可推出某个结论，实际上包括两种情形，一种是例(4)这样的情形，另一种是从(a)、(b)和(c)得出结论(d)这样的情形。传统逻辑没有明确揭示这种区别。而逻辑研究应当把推理都分解成象例(4)这样的最简单的步骤，从而得到一些最简单的规则；用这些简单规则就能分析一切推理的形式。对推理缺乏精

细、严格的分析，也是造成传统逻辑没有包括或者说没有研究某些正确的推理形式的原因。

上面所说的传统逻辑在推理研究方面的缺陷和局限，是和它的对命题形式的分析不够精细分不开的，或者说，后者是前者的原因。例如，传统逻辑没有分析或者没有揭示出象(1)和(2)这样的命题的形式，因此，也不可能揭示从(2)得(1)这个正确推理的形式。造成这种局面的一个重要原因是，传统逻辑用以表示命题形式和推理形式的，是自然语言的某些语词，而自然语言是多义的、不适于用来精确表示各种命题形式和推理形式。但是，传统逻辑历经2000多年的时间却始终没有突破和克服这种种局限。

数理逻辑是逻辑发展的一次突破和飞跃，是克服了传统逻辑的诸多局限而建立的新的逻辑。除了其它方面的特点，数理逻辑的一大特点是使用人工的符号语言。这种人工语言叫做形式语言。这种形式语言不仅适于用来分析和表示各种命题形式和推理形式，并且本身成为逻辑研究的对象。应用形式语言，数理逻辑建立各种逻辑演算。这种逻辑演算叫做形式系统。形式系统包括形式语言、公理和推演规则（变形规则）等三个组成部分。命题形式和推理形式都表现为形式系统中的符号公式，前提和结论之间推理关系则表现为公式与公式之间符号组合的变换关系。

数理逻辑另一重要特点是，它不仅研究命题形式和推理形式，并且把整个逻辑演算（形式系统）作为研究对象，并且这种研究比对命题形式和推理形式的研究处于更重要的地位。这后一种研究就是所谓元逻辑的研究。元逻辑是逻辑之后的逻辑，是关于逻辑的逻辑理论。在元逻辑中，关于符号、符号序列（公式）之间的关系的理论叫做语法理论。关于符号、符号序列的意义的理论叫做语义理论。同时，也研究语法和语义二者之间的关系和联系。

为什么这种新的逻辑叫做数理逻辑、在逻辑前面加上形容词“数学的”（在西方语言中，逻辑前面的形容词是“数学的”，汉

语中译成数理逻辑)呢?这是由于这种新逻辑与数学之间的密切联系。数理逻辑与数学之间的关系可以从三个方面作简单的说明。

首先,推动研究和创立数理逻辑的动机和目的,是为了探究数学科学的性质和数学思维的规律。数理逻辑创立可以1879年出版的弗雷格的《概念文字》为标志。在这本书中,弗雷格建立了第一个数理逻辑系统。弗雷格是一位数学家,他对逻辑的兴趣来自数学基础问题,要把数学建立在逻辑原理之上。罗素与怀特海合作,撰写三大卷巨著《数学原理》,其目的就是要从逻辑原则推导出全部现有的数学。希尔伯特提出了一个研究方案(计划),叫做“希尔伯特方案”,它的目标是要证明,“普遍接受的数学的方法,作为一个整体,不会导致矛盾”。通过证明数学推理和数学证明的逻辑规律不会导致矛盾,从而证明数学理论是协调的(没有矛盾的)。撇开他们的主张和观点是否正确、他们的目的能否实现等等不说,他们对数理逻辑发展的贡献和影响都是十分重大的,这乃是为人们所公认的。数理逻辑后来的发展,也始终以数学的语言、数学的证明等等作为研究的对象,并成为数学的一个分支学科。

其次,数理逻辑的方法是数学的。这包括两层意思。其一是,数理逻辑吸收和应用其它数学分支的方法和结果。但主要的是指,数理逻辑中形成新的概念、下定义、证明定理等等的方式,是和其它数学学科一样的。

第三,在应用方面,数理逻辑的方法和结果被应用于代数、拓扑等许多数学领域,与数学的发展有密切的关系。

但是,数理逻辑的这些特点,它的数学性质,以至它是数学的一个分支,并没有使得它只对数学有意义,只有数学家才对它感兴趣。它研究的中心课题,即推理和证明的性质和规律,仍是和传统逻辑一致的,只是它突破了传统逻辑的局限,内容更丰富,结果也更深刻。传统逻辑提出的概念和问题,在数理逻辑中得到了进一步的澄清和解决。在应用方面,也比传统逻辑更广泛

和更有成效得多，可以说是传统逻辑不可比拟的。数理逻辑与哲学有复杂的密切关系。在数理逻辑的发展初期，传统的哲学问题是起推动作用的因素之一。至于数理逻辑对哲学的影响和意义，是一个需要加以研究和总结的课题。在应用方面，除了数学以外，两个值得特别提出的领域是计算机科学和语言学。特别是逻辑与计算机已经成为一个不太确定的但又相对独立的研究领域。

数理逻辑的范围，通常认为包括五个部分：(1)逻辑演算，(2)公理集合论，(3)模型论，(4)递归论，(5)证明论。对于逻辑演算有狭义和广义的不同理解。狭义的理解，逻辑演算即指狭谓词演算或一阶谓词演算，通常也称一阶逻辑。这是数理逻辑中的纯逻辑部分，是其它四个分支的共同基础。广义的理解，除了一阶逻辑，还包括高阶逻辑，非二值外延系统构造性逻辑、多值逻辑、无穷逻辑等。其中构造性逻辑与证明论有密切的关系，也把这二者一起看作是数理逻辑的一个分支。还有一种更广义的理解，逻辑演算也包括模态逻辑、时态逻辑、相干逻辑、道义逻辑等等。这些逻辑系统的数学内容较少，它们不是由数学的需要推动发展起来的。当然，这些系统也并不是和数学没有关系，除了它们都是在一阶逻辑发展的基础上建立和发展起来的之外，近些年来也有内涵数学等的研究和发展。在文献中，也把多值逻辑、模态逻辑等等非古典逻辑，称为哲理逻辑。

本书的内容介绍一阶逻辑，是数理逻辑的基础理论。

§2 预 备 知 识

在本节中我们简单介绍集合论的初步知识，包括集的概念及其运算和关系，关系、函数、可数集、不可数集等。同时，也简单讲一讲数学归纳法。熟悉这些内容的读者，可以把这一部分略去不读。

集或集合，是作为出发点的初始概念，是不能给予定义的。

直观地说，给定一些对象，我们可以把它们汇聚在一起组成一个集。组成集的事物（对象）称为这个集的元或元素。给定一个对象 a 和集 A ，我们用

$$a \in A$$

表示 a 是集 A 的元，也说 a 属于 A ， a 在 A 中。符号 $\in$ 表示集的元与集之间的关系。

一个集完全由它的元确定。如果集 A 和 B 有相同的元，就说它们是相等的，记作： $A=B$ 。如果集 A 的元都是集 B 的元，就说 A 包含在 B 中或说 B 包含 A ，并称 A 是 B 的子集，记作： $A \subseteq B$ 。因此有 $A=B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 并且 $B \subseteq A$ 。

我们用 $a \notin A$ 表示“非 $a \in A$ ”（ a 不属于 A ）；用 $A \neq B$ 表示“ A 不等于 B ”。如果 $A \subseteq B$ 但 $A \neq B$ ，就称 A 是 B 的真子集（集 A 的元都是 B 的元，但有 B 的元不是 A 的元），记作： $A \subset B$ 。

没有任何元素的集称为空集，记作： ϕ 。对任何 x ， $x \notin \phi$ 。对任何 A ， $\phi \subseteq A$ 。

一个以 $a_1, \dots, a_n$ 为仅有的元素的集，记为

$$\{a_1, \dots, a_n\}.$$

因此， $\{a\}$ 是仅以 a 为元的集， $\{a, b\}$ 是仅有 a, b 为元的集。并且，显然有，任何 x ，

$$x \in \{a\} \text{ 当且仅当 } x = a.$$

同样地，任何 x ，

$$x \in \{a, b\} \text{ 当且仅当 } x = a \text{ 或 } x = b.$$

并且，一般地，任何 x ，

$$x \in \{a_1, \dots, a_n\} \text{ 当且仅当 } x = a_1 \text{ 或 } \dots \text{ 或 } x = a_n.$$

由上面的说明可知，一个集由它的元确定，与元在其中的次序无关，也与其中的元是否重复无关（一个元重复多次仍是一个元）。如

$$\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, b, a\} = \{a, a, b, b, a, b\}.$$

一个由满足一定条件的 x 组成的集，记为

$$\{x | \dots x \dots\},$$

其中的“ $\dots x \dots$ ”表示 x 所满足的条件，是一个讲 x 的语句（命题）。例如：

$$A = \{x | x \text{ 是小于 } 10 \text{ 的素数}\},$$

$$B = \{x | x \text{ 是 } x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \text{ 的根}\},$$

那么 A 就是 $\{2, 3, 5, 7\}$ ， B 就是 $\{-1, 1, 2\}$ 。

从已有的集经由集的运算可构成新的集。由集 A 的元和集 B 的元构成的集称为 A 和 B 的并（并集，也称和集），记作： $A \cup B$ 。

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或者 } x \in B\},$$

或者说， $x \in A \cup B$ ，当且仅当， $x \in A$ 或者 $x \in B$ 。

由既是 A 的元又是 B 的元构成的集，称为 A 和 B 的交（交集），记作： $A \cap B$ 。

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 并且 } x \in B\},$$

或者说， $x \in A \cap B$ ，当且仅当， $x \in A$ 并且 $x \in B$ 。

由不是 A 的元的对象构成的集，称为 A 的补（补集），记作： $\bar{A}$ 。

$$\bar{A} = \{x | x \notin A\},$$

或者说， $x \in \bar{A}$ ，当且仅当， $x \notin A$ 。

由属于 A 而不属于 B 的元构成的集，称为 A 与 B 的差（差集），记为： $A - B$ 。

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 并且 } x \notin B\},$$

或者说， $x \in A - B$ ，当且仅当， $x \in A$ 并且 $x \notin B$ 。

集 A 和 B 称为不相交的，如果 $A \cap B = \phi$ ，即 A 与 B 没有共同的元。

关于集的运算，有下面这样一些基本定律：

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cap \overline{A} = \phi$$

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$A \cup \phi = A$$

$$A \cap \phi = \phi$$

$$A - A = \phi$$

关于集合的运算与集的包含关系，有下面这样一些定律：

$$A \subseteq A \cup B$$

$$A \cap B \subseteq A$$

$$A - B \subseteq A$$

$$A \subseteq B, \text{ 当且仅当, } A \cap B = A$$

$$A \subseteq B, \text{ 当且仅当, } A \cup B = B$$

$$A \subseteq \overline{B}, \text{ 当且仅当, } A \cap B = \phi$$

$$A \subseteq B \cap C, \text{ 当且仅当 } A \subseteq B \text{ 并且 } A \subseteq C$$

$$A \cup B \subseteq C, \text{ 当且仅当 } A \subseteq C \text{ 并且 } B \subseteq C$$

以上所列的定律，都可以根据子集和集的运算的定义给出证明，证明也不困难，有兴趣的读者不妨自己作出证明。

集 $A_1, \dots, A_n$ 的并，记作： $\bigcup_{i=1}^n A_i$,

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup \dots \cup A_n.$$

集 $A_1, \dots, A_n$ 的交，记作： $\bigcap_{i=1}^n A_i$,

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap \cdots \cap A_n$$

一个集 A 的所有子集构成的集,称为 A 的幂集,记为: $P(A)$.

$$P(A) = \{x | x \subseteq A\}$$

例. 设 $A = \{a, b\}$. A 的子集有: $\phi, \{a\}, \{b\}$ 和 $\{a, b\}$, 共四个. A 的幂集

$$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

这里提醒注意 $\in$ 与 $\subseteq$ 的区别, 集之间的关系 $\subseteq$ 与集的运算的区别. $\in$ 是表示集的元与集之间关系, $\subseteq$ 表示两个集之间的关系. $\phi \notin \phi$, 但 $\phi \subseteq \phi$. 又如, 设 $A = \{a\}$, 那么 $a \in \{a\}$, 但 $a \nsubseteq \{a\}$; $\{a\} \notin \{a\}$, 但 $\{a\} \subseteq \{a\}$. 对任何集 A , $A \subseteq A$, 但一般 $A \notin A$ (在公理集合论中, 任何 A , $A \notin A$.) $\cup, \cap$ 和 $-$ 等是集的运算, 而 $\subseteq$ 是集之间的关系. $A \cup B, (A \cap B)$ 是从集合 A 和 B 应用运算 $\cup (\cap)$ 得到的集, 但 $A \subseteq B$ 只表示 A 是 B 的子集这一关系, $A \subseteq B$ 不是一个集.

由 a 和 b 构成的序偶记作: (a, b) . 序偶 (a, b) 与集 $\{a, b\}$ 不同. (a, b) 中的 a, b 是有次序的, $\{a, b\}$ 中的元是不分次序的. $\{a, b\} = \{b, a\}$, 但 $(a, b) \neq (b, a)$. 若 $(a, b) = (b, a)$, 则 $a = b$. $\{a, a\} = \{a\}$, 而 $(a, a) \neq (a)$. 对于序偶 (a, b) 和 (c, d) ,

$$(a, b) = (c, d), \text{ 当且仅当 } a = c \text{ 并且 } b = d.$$

由 $a_1, \dots, a_n$ 构成的有序 n 元组, 记为

$$(a_1, \dots, a_n).$$

$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_m)$, 当且仅当, $n = m$, 并且 $a_i = b_i (i = 1, \dots, n)$.

给定集 $A_1, \dots, A_n$, 我们令

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in A_i \text{ 并且 } x_2 \in A_2 \cdots x_n \in A_n\}.$$

$A_1 \times \cdots \times A_n$ 称为 $A_1, \dots, A_n$ 的笛卡尔乘积. n 个相同的集的笛卡尔

乘积用幂表示, 即令

$$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ 个 } A}$$

A^n 就是所有由 A 中的元构成的有序 n 元组的集。 A^n 称为 A 的 n 次笛卡尔乘积。

例: 设 $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$ 。 A 和 B 的笛卡尔乘积

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$$

A 的2次笛卡尔乘积

$$A^2 = A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}.$$

A 的3次笛卡尔乘积

$$A^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}.$$

对于 $n \geq 1$, 集 A 中的 n 元关系, 是 A 中的 n 个 (未必互异的) 元之间的关系。例如 $<$ 和 $\leq$ 都是自然数集 N 中的二元关系, 2和3之间有 $<$ 关系也有 $\leq$ 关系, 3和3没有关系 $<$, 但有关系 $\leq$ 。

“在 $\cdots$ 之间”是三元关系, 如由直线上的点所构成的集中的三个点之间的关系。

设 $a_1, \cdots, a_n$ 是 A 中的元, R 是 A 中的一个 n 元关系, 我们用

$$R(a_1, \cdots, a_n)$$

表示 $a_1, \cdots, a_n$ 之间有关系 R , 其中 $a_1, \cdots, a_n$ 是有次序的。对于二元关系, 通常把 $R(a, b)$ 写成 aRb 。例如, 一般不写 $<(3, 4)$, 而写成 $3 < 4$ 。我们把 A 中的 n 元关系 R 等同于一个由 A 中的元所构成的某些有序 n 元组 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的集, 其中的 $a_1, \cdots, a_n$ 有关系 R 。或者说, A 中的一个 n 元关系 R 是 A^n 的一个子集, 即

$$R = \{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_1, \cdots, a_n \in A \text{ 并且 } R(a_1, \cdots, a_n)\},$$

或者

$$R = \{(a_1, \cdots, a_n) \mid (a_1, \cdots, a_n) \in A^n \text{ 并且 } R(a_1, \cdots, a_n)\}.$$

一元关系也叫做性质, A 中的一个一元关系是 A 的一个子集。即由 A 中具有该性质的元所构成的集。例如自然数的性质“是素

数”即是素数的集合，设这个性质是 p ，那么，

$$p = \{x \mid x \in N \text{ 并且 } x \text{ 是素数}\}.$$

A 中同一关系是二元关系

$$\{(x, x) \mid x \in A\}.$$

一种特殊的二元关系称为等价关系。 A 中二元关系 R 称为 A 中的等价关系，如果对所有 的 $x, y, z \in A$ ， R 满足下面的条件：

(1) xRx ，(自反性)

(2) 如果 xRy ，则 yRx ，(对称性)

(3) 如果 xRy 并且 yRz ，则 xRz 。(传递性)

利用 A 中的等价关系 R 可以把 A 划分成若干不空的互不相交的子集，使得 A 中的每一元必定而且只属于其中的一个子集，这些子集的并就是 A 。划分的方法是把 A 中互有 R 关系的元分在同一个子集中。对于 A 的任何元 x, y ， x 和 y 同属于根据关系 R 划分成的一个子集，当且仅当 xRy 成立。这样划分成的 A 的子集称为 A 的 R 等价类。对任 $x \in A$ ， A 的子集 $[x]_R = \{y \mid y \in A \text{ 并且 } xRy\}$ 称为 x 的 R 等价类。 $[x]_R = [y]_R$ 当且仅当 xRy 。一个由 A 的子集所成的集合称为 A 的一个划分，如果这些子集互不相交，那么这些子集的并就是 A 。如果 R 是 A 的一个等价关系，那么 A 的元的 R 等价类的集合就组成 A 的一个划分。

一个函数(映射) f 是一个二元关系，使得对每一 x 至多存在一个 y ，使得 $(x, y) \in f$ 。换句话说，如果 $(x, y) \in f$ 并且 $(x, z) \in f$ ，那么 $y = z$ 。当 f 是一函数，通常写成 $f(x) = y$ 以代替 $(x, y) \in f$ ，并说 y 是 f 在 x 的值。

例如， $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ 是一个函数，但 $\{(1, 2), (2, 3), (2, 1)\}$ 不是函数。

一函数 f 的定义域 $\text{Dom}(f)$ 是集合

$$\{x \mid \text{对某个 } y, f(x) = y\}.$$

f 的值域 $\text{Ran}(f)$ 是集合

$$\{y \mid \text{对某个 } x, f(x) = y\}.$$