数学分析教程 第二卷 第一分册

数学分析教程

第二卷 第一分册

[苏] C. M. 尼柯尔斯基 著

郭思旭 刘远图 高尚华 译

高等教育出版社

数学分析教程

第二卷 第一分册

[苏] C. M. 尼柯尔斯基 著
郭思旭 刘远图 高尚华 译

高等教育出版社

本书系按照苏联《Наука》1983年出版的 Курс Математического Анализа, Том II 翻译的，原书是经苏联高等与中等专业教育部批准的物理与数学——力学专业的教科书，主要内容为重积分、场论、含参变量的积分及广义积分，线性赋范空间、正交系等，本书立论严谨，内容充实，可以作为我国数学以及物理、计算数学与应用数学专业师生的重要参考书.

(京)112号

数学分析教程

第二卷　第一分册

[苏] C.M. 尼柯尔斯基 著

郭思旭　刘远图　高尚华　译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张6.75　字数 160 000

1992年8月第1版　1992年8月第1次印刷

印数1—1 878

ISBN7-04-002645-7/O·1007

定价4.20元

译 者 的 话

本书是根据苏联《Наука》出版社1983年出版的C. M. Никольский 著《Курс Математического Анализа》第二卷第三版译出的.

第二卷包括从第十二章至第二十章共九章，内容为重积分；数量场和向量场，含参变量的积分，广义积分；线性赋范空间，正交系（以上为第一分册）；傅里叶级数，函数的多项式逼近；傅里叶积分；广义函数；微分流形和微分形式；补充专题；勒贝格积分；线性算子与线性泛函（以上为第二分册）. 从取材上可以看出，作者强调了分析与数学物理的联系，并使分析教程有某种程度的现代化.

在翻译过程中，我们先是根据原书第二版的英译本翻译，后来又按照新得到的俄文第三版作了校订和补译，但仍然少量地保留了英文版特有的说明性文字. 其中十二、十三章由刘远图同志翻译，十四与十九章由高尚华同志翻译，十五章至十八章由郭思旭同志翻译. 每个人都对另外两位同志所译部分作了校阅. 由于我们水平所限，翻译不妥之处在所难免，恳请读者批评指正.

译　者

1985年5月9日

目　录

第十二章　重　积　分

§12.1.　引　言

在建立了直角坐标系(x,y,z)的三维空间中，给定了由下列方程确定的连续曲面：

$$z=f(Q)=f(x,y),\quad (Q=(x,y)\in\Omega),$$

其中 Ω 是具有面积（二维测度①）的有界（二维）集. 例如，Ω 可以是一个圆，一个矩形，一个椭圆，等等. 以后我们假定函数 $f(x,y)$ 只取正值. 我们提出下面这样一个问题：试求上面以已知曲面为界，下面以平面$z=0$为界，侧面以通过平面集合Ω的边界 γ 且由平行于 z 轴的母线生成的柱面为界的立体的体积.

显然，我们可以用下面的方法得出所求的体积.

将集合 Ω 分成N（N是有限数）个部分（子区域）

$$\Omega_1,\cdots,\Omega_N, \tag{1}$$

其中任何两部分都不相交，或者仅仅沿它们的边界的某些部分相交. 但是这些子区域都应该是可以确定其面积（二维测度）的，我们把它们的面积分别记作 $m\Omega_1,\cdots,m\Omega_N$.

我们引入集合 A 的直径的概念：如果 A 是平面上的一个集合，它的直径 $d(A)$被定义为

$$d(A)=\sup_{P',\ P''\in A}|P'-P''|,$$

其中上确界是对属于 A 的所有点对 P',P'' 来取的.

---

① 参看§12.2.

现在，我们从每一部分 $\Omega_j(j=1, \cdots, N)$中任意选取一点 $Q_j=(\xi_j, \eta_j)$，并形成和式

$$V_N=\sum_{j=1}^{N} f(Q_j) m\Omega_j. \tag{2}$$

它当然可以看作是所求体积V的一个近似值. 我们会想到，子区域 Ω_j 的直径 $d(\Omega_j)$愈小，近似式 $V \approx V_N$ 的精确度愈高. 因此，所求立体的体积可以定义为下列极限

$$V=\lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(Q_j) m\Omega_j, \tag{3}$$

也就是在分法(1)中的子区域的最大直径趋于零时，和式(2)所趋近的极限；当然这时要求这个极限存在而且不论分法(1)的序列的取法如何，这个极限都等于同一个数.

现在我们可以从求立体体积这样的问题抽象出一般的问题，而把(3)式看作是对于定义在Ω上的已知函数f实施一种运算的结果. 这种运算称为**函数 f 在区域Ω上的黎曼二重积分运算**，运算的结果称为**f 在Ω上的(黎曼)二重定积分**，记作:

$$V=\lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(\Omega_j) m\Omega_j=\iint_{\Omega} f(x, y)\ dxdy=\int_{\Omega} f(Q) dQ$$

$$=\int_{\Omega} f d\Omega.$$

现在，假定在三维空间建立了直角坐标系(x, y, z)，在这个空间中给定了一个物体Ω(集合)，它的质量不是均匀分布的，其密度函数为$\mu(x, y, z)=\mu(Q)(Q=(x, y, z) \in \Omega)$. 要求出物体$\Omega$的全部质量.

为了解决这个问题，显然可以将Ω分成N部分 $\Omega_1, \cdots, \Omega_N$，它们的体积(三维测度)是$m\Omega_1, \cdots, m\Omega_N$(假设它们存在)，在每一部分

中任意选取一点$Q_j=(x_j,y_j,z_j)\in\Omega_j$, $(j=1,\cdots,N)$, 于是所求的质量等于

$$M=\lim_{\max d(\Omega_j)\to 0}\sum_{j=1}^{N}\mu(Q_j)m\Omega_j. \tag{4}$$

同样,(4)式也可以看作是对于定义在三维集合Ω上的函数实施一种运算. 这种运算称为函数f在Ω上的黎曼三重积分运算,而运算的结果称为黎曼三重定积分,记作:

$$M=\lim_{\max d(\Omega_j)\to 0}\sum\mu(Q_j)m\Omega_j=\int_\Omega\mu(Q)dQ$$

$$=\iiint_\Omega\mu(x,y,z)dxdydz.$$

用同样的办法可以定义黎曼n重积分.

我们将会看到,(黎曼)重积分的部分理论,包括积分存在定理和可加性定理在内,对于n维的情形也可以用与1维的情况完全相同的讲法来阐述. 然而在重积分的理论中,将产生单变量积分理论中未曾遇到的一些困难.

这是由于(黎曼)单变量积分是对最简单的集合,即闭区间$[a,b]$来定义的,它又可以分割成许多闭区间.我们可以毫无困难地给出区间长度(一维测度)的定义. 但是,在二重积分的情况下,或者更一般地,在n重积分的情况下,积分区域Ω需要分成以曲线为边界的部分区域,这就提出了如何一般地定义面积的概念的问题,更一般地,提出了如何定义所分成的各部分的n维测度的问题. 在$n=1$的情况下,如果我们不是在一个闭区间上定义黎曼单变量积分,而是对于一个较复杂的一维集合上定义黎曼单变量积分,当然同样会出现上述类似的问题.

为此,我们应当对集合的测度的概念给出严格的定义,并且进而说明测度的性质.因此,我们在本章将首先介绍与黎曼积分理论

有着有机联系的若当① 测度理论. 这一理论为阐述黎曼重积分理论提供了基础. 而黎曼重积分理论提出了一种求 n 重积分的重要方法，这就是把 n 重积分化成包含 n 个关于每一个变量的单变量积分的逐次积分；在许多重要的情况下，逐次积分时可以应用为单变量积分建立的牛顿-莱布尼兹定理.

§ 12.2. 若当可求面积的集

我们来考察建立了直角坐标系(x,y)的平面 $R=R_2$；这个坐标系也用同一字母R表示.

如果在同一平面上经旋转或平移建立另一坐标系(ξ,η)，我们将把这个平面(以及新坐标系)记作 R'.

平面R上的矩形Δ将被看作是最简单的集合. 它可以用解析法定义如下：假设建立了直角坐标系 R'，在此坐标系下，Δ 可以表示成为满足不等式

$$a_1\leqslant\xi\leqslant a_2,\ b_1\leqslant\eta\leqslant b_2 \tag{1}$$

的点$(\xi,\ \eta)$的集合，而且 $a_1<a_2$，$b_1<b_2$. 坐标系 R' 具有这样一个特点，即 Δ 的边都平行于坐标系 R' 的坐标轴. 为了强调 Δ 的边平行于坐标系 R'的轴这一点，我们将记作 $\Delta=\Delta_{R'}$. 注意，我们将把Δ看作是闭集.

现在，我们给出初等图形 σ 这一概念. 如果集合 $\sigma\subset R$ 可以表示有限个矩形 $\Delta\subset R$ 的和(集合论意义下)，而且其中任意两个矩形都不相交或者仅仅沿它们的边界的某些部分相交，那么集合σ称为初等图形. 一个二维初等图形σ的面积$|\sigma|$被定义为组成σ的诸矩形Δ的面积和.

将初等图形σ表示成矩形Δ的有限和(并)的方法可以有无限

① 若当(1838—1922)是法国数学家.

多种，但是面积$|\sigma|$同表示方法无关．利用初等几何的方法很容易证明这一论断，因此我们在这里不作详细的讨论．

空集也可看作是一个图形，而且把它的测度（面积）看作是零．

在定义矩形Δ的不等式(1)中，我们曾经假定$a_1<a_2, b_1<b_2$．因此，孤立的点和线段将不看作是矩形；我们在讲述测度理论时，没有必要考虑这类情形．

如果所有组成初等图形σ的矩形都可以表示成$\Delta\equiv\Delta_R$，也就是说，它们的边都平行于坐标系R的轴，那么我们将把这种初等图形σ记作σ_R．

下面列出初等图形σ的一些简单性质．用初等方法便可给出它们的证明，这里就不赘述了．

(a) 如果$\sigma_1\subset\sigma_2$，那么$|\sigma_1|\leqslant|\sigma_2|$．

(b) 两个图形σ'_R和σ''_R的和（集合论意义下的）是一个图形σ_R，并且有不等式：

$$|\sigma'_R+\sigma''_R|\leqslant|\sigma'_R|+|\sigma''_R|.$$

当σ'_R和σ''_R彼此不相交或者仅仅沿它们的边界的某些部分相交，那么上式变成为等式．

(c) 两个图形σ'_R和σ''_R的差不一定是闭集，因而它不一定是图形．只有在$\sigma'_R\subset\sigma''_R$或者$\sigma'_R$和$\sigma''_R$不相交这两种情况下，差才可能是图形（也可能是空集）．然而，差的闭包$\overline{\sigma'_R-\sigma''_R}$一定是图形，而且有不等式

$$|\overline{\sigma'_R-\sigma''_R}|\geqslant|\sigma'_R|-|\sigma''_R|.$$

当$\sigma''_R\subset\sigma'_R$时，上式变成为等式．

(d) 如果图形σ_R被平行于坐标系R的两轴之一的直线分割，那么σ_R就分成两个图形σ'_R和σ''_R．

除了上面几个性质以外，下面还要提出两个；其中一个与网络

的概念有关.

我们任意取一个自然数 N，并且作两族直线: $x=kh$ 和 $y=lh$ ($h=2^{-N}; k, l=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$). 这两族直线确定了一个矩形网络 S_N，它将 R 分成边长为 h 且各边平行于 R 的坐标轴的正方形 Δ_h. 当我们由网络 S_N 到 S_{N+1} 时，S_N 的每一个正方形被分成四个相等的正方形.

设 $G\subset R$ 是一任意有界非空集合. 用符号 $\underset{\sim}{\omega}_N(G)=\underset{\sim}{\omega}_N$表示由网络 S_N 中完全包含于 G 内的所有正方形 Δ_h 组成的图形，用 $\tilde{\omega}_N(G)=\tilde{\omega}_N$ 表示由网络 S_N 中至少包含集合 G 一个点的正方形组成的图形(图 12.1). 在特殊情况下，$\underset{\sim}{\omega}_N$ 可能是空集; 前面已经约定，这样的集合可以看作是图形(测度为零).

显然有

$$\underset{\sim}{\omega}_1\subset\underset{\sim}{\omega}_2\subset\cdots,$$

$$\tilde{\omega}_1\supset\tilde{\omega}_2\supset\cdots,$$

$$\underset{\sim}{\omega}_N(G)\subset G\subset\tilde{\omega}_{N'}(G),$$

其中 N 和 N' 是任意的自然数. 由此可以得出，存在下列有限的极限:

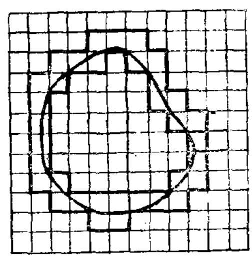

图 12.1

$$m_iG=\lim_{N\to\infty}|\underset{\sim}{\omega}_N|,\quad m_eG=\lim_{N\to\infty}|\tilde{\omega}_N|,\quad m_iG\leqslant m_eG.$$

数 m_iG 称为集合 G 的(二维)若当内测度，而数 m_eG 称为集合 G 的(二维)若当外测度. 为了简单起见，以后我们常常省去“若当”两字. 同样，由于我们在本节中只讨论若当二维测度，所以有时还会省去“二维”两字.

我们已经证明，每一个有界集 $G\subset R$ 具有若当内测度 m_iG 和外测度 m_eG，而且它们满足不等式 $m_iG\leqslant m_eG$.

如果对于集合 $G\subset R$ 有 $m_iG=m_eG=mG$，那么 G 称为若当可测集，而数 mG 称为 G 的(二维)若当测度. 二维若当可测集也称

为可求面积的集.

现在,我们可以把我们需要的图形 σ 的一条性质叙述如下:

(e) (相对于坐标系 R 中作任意旋转或平移的矩形组成的)图形 σ 是若当可测集,而且 $m\sigma=|\sigma|$.

在图 12.2 中,我们看到图形 σ 和另外两个图形 σ' 和 σ'',σ' 和 σ'' 的边分别与 σ 相应的边平行,而且 $\sigma'\subset\sigma\subset\sigma''$. 显然,对于给定的图形 σ 和任意的 $\varepsilon>0$, 可以指出两个图形 σ'和 σ'',使得下列条件成立:

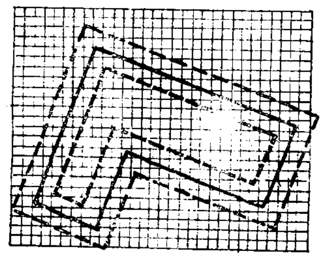

图 12.2

(i) $\sigma'\subset\sigma\subset\sigma''$,

(ii) $|\sigma''|-|\sigma'|<\varepsilon$,

(iii) σ' 和 σ''的边界点同 σ 的任一边界点的距离大于某一正数α.

现在我们可以在坐标系 R 中构造一个网络 S_N, 使得$\sqrt{2}\,h=\sqrt{2}\cdot 2^{-N}<\alpha$; 于是, 任何一个至少包含 σ 的一个边界点的网络的矩形,都完整地包含于集合 $\sigma''-\sigma'$中. 因此, 所有覆盖 σ 的边界且属于 S_N 的正方形的面积和, 不超过 $|\overline{\sigma''-\sigma'}|=|\sigma''|-|\sigma'|<\varepsilon$. 由此得出,

$$|\tilde{\omega}_N(\sigma)|-|\underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)|<\varepsilon; \tag{2}$$

由于 ε 是任意小的正数,而且$|\underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)|\leqslant|\sigma|\leqslant|\tilde{\omega}_N(\sigma)|$,得

$$m_i\sigma=m_e\sigma=m\sigma=|\sigma|.$$

下列等式可以作为有界集 G 的外测度和内测度的等价定义,而且下面将给出证明:

$$m_iG=\lim_{N\to\infty}|\underset{\sim}{\omega}_N(G)|=\sup_N|\underset{\sim}{\omega}_N(G)|=\sup_{\sigma_R\subset G}|\sigma_R|=\sup_{\sigma\subset G}|\sigma|, \tag{3}$$

$$m_eG=\lim_{N\to\infty}|\tilde{\omega}_N(G)|=\inf_N|\tilde{\omega}_N(G)|=\inf_{\sigma_R\supset G}|\sigma_R|=\inf_{\sigma\supset G}|\sigma|. \tag{4}$$

(3)式的第一个等式与m_iG前述定义一致，同时提供了一种计算m_iG的有效方法. 但是，由于网络S_N同最初选取的坐标系R有关，所以这个定义也与R有关.

(3)式的第二个等式显然成立，因为$|\underset{\sim}{\omega}_N(G)|$随着$N$的增大而增大.

由于$\underset{\sim}{\omega}_N(G)$同时又是某一图形$\sigma_R$，而$\sigma_R$又是某一图形$\sigma$，所以我们显然有

$$\sup_N|\underset{\sim}{\omega}_N(G)|\leqslant\sup_{\sigma_R\subset G}|\sigma_R|\leqslant\sup_{\sigma\subset G}|\sigma|. \tag{5}$$

另一方面，如果$\sigma\subset G$是一任意图形，而且$\varepsilon>0$，那么由σ的可测性，可以指出这样大的N，使得

$$|\sigma|<|\underset{\sim}{\omega}_N(\sigma)|+\varepsilon\leqslant\underset{\sim}{\omega}_N(G)|+\varepsilon\leqslant m_iG+\varepsilon.$$

由此可得$\sup\limits_{\sigma\subset G}|\sigma|\leqslant m_iG+\varepsilon$；而由$\varepsilon$的任意性，我们得到

$$\sup_{\sigma\subset G}|\sigma|\leqslant m_iG. \tag{6}$$

由式(5)和(6)可以推出(3)式中的第三个和第四个等式((3)式的前两个等式已经被证明了).

(3)式的最后一项表明，*内测度*m_iG对于任意的坐标系是不变的，也就是说，它同考察它时所取的坐标系R无关.

同样可以证明(4)式中的各个等式.

由等式(3)和(4)容易得出:

引理 1 *使集合G可测的必要和充分条件是：对于任意的$\varepsilon>0$，存在两个图形$\underset{\sim}{\sigma}$和$\boldsymbol{\sigma}$（$\underset{\sim}{\sigma}\subset G\subset\boldsymbol{\sigma}$）使得$|\boldsymbol{\sigma}|-|\underset{\sim}{\sigma}|<\varepsilon$.*

这里可以假设$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_R$和$\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\sim}{\sigma}_R$.

实际上，如果G可测，R是给定的坐标系，那么可以找到这样的$\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\sim}{\sigma}_R\subset G$和$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_R\supset G$，使得

$$mG-\frac{\varepsilon}{2}<|\underset{\sim}{\sigma}|\leqslant|\boldsymbol{\sigma}|<mG+\frac{\varepsilon}{2}\quad 和\quad |\boldsymbol{\sigma}|-|\underset{\sim}{\sigma}|<\varepsilon.$$

反过来，由 $\underset{\sim}{\sigma}\subset G\subset\bar{\sigma}$ 可以推出 $|\underset{\sim}{\sigma}|\leqslant m_iG\leqslant m_eG\leqslant|\bar{\sigma}|$；同时，如果 $|\bar{\sigma}|-|\underset{\sim}{\sigma}|<\varepsilon$，那么 $m_eG-m_iG<\varepsilon$，而且由 $\varepsilon(>0)$ 的任意性，我们得到

$$m_eG=m_iG.$$

由引理1. 得出，可测集是有界集.

引理 2 集合 G 为若当可测集的必要和充分条件是它的边界 Γ 的(二维)若当测度为零，也就是说，对于任意的 $\varepsilon>0$，可以找到一个图形 σ_0，它覆盖 Γ 而且 σ_0 有测度 $|\sigma_0|<\varepsilon$.

证明 设集合 G 可测. 那么，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，可以找到两个图形 $\sigma'=\sigma'_R$ 和 $\sigma''=\sigma''_R$，使得 $\sigma'\subset G\subset\sigma''$ 和 $|\sigma''|-|\sigma'|<\varepsilon$(参看图 12.1). 总可以假定集合 G 的边界 Γ 的点既不在 σ'' 的边界上，也不在 σ' 的边界上. 实际上，如果找到的图形 σ' 和 σ'' 不具有这种性质，那末我们可以沿 x 轴和 y 轴的方向将图形 σ'' 伸大，而将图形 σ' 缩小，同时应使不等式 $|\sigma''|-|\sigma'|<\varepsilon$ 仍然成立. 这时，显然有

$$\Gamma\subset\sigma''-\sigma'\subset\overline{\sigma''-\sigma'}=\sigma_0 \text{ 和 } |\sigma_0|=|\sigma''|-|\sigma'|<\varepsilon.$$

上式说明图形 σ_0 的面积小于 ε，而它可以覆盖 Γ.

反过来，设对于任意的 $\varepsilon>0$，可以指出覆盖 Γ 的图形 $\sigma_0=\sigma^0_R$，$|\sigma_0|<\varepsilon$ (参看图 12.1). 我们可以假定，Γ 同 σ_0 的边界没有公共点，因为否则我们可以将图形 σ_0 再伸大一些，但同时保持不等式 $|\sigma_0|<\varepsilon$ 仍然成立.

设 $\sigma''=G+\sigma_0$ 和 $\sigma'=\overline{G-\sigma_0}$. 容易看出，$\sigma'$ 和 σ'' 是初等图形(参看图 12.1)，而且 $\sigma'=\sigma'_R$，$\sigma''=\sigma''_R$，$\sigma'\subset G\subset\sigma''$，$\overline{\sigma''-\sigma'}=\sigma_0$，$|\sigma''|-|\sigma'|=|\sigma_0|<\varepsilon$. 这表明 G 是可测集.

引理 3 如果集合 G_1 和 G_2 的若当测度都为零，那末它们的和也是若当测度为零的可测集.

实际上，根据假设，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在两个图形σ'_R 和σ''_R，使得 $\sigma'_R\supset G_1$，$\sigma''_R\supset G_2$，$|\sigma'_R|<\frac{\varepsilon}{2}$ 和$|\sigma''_R|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是，图形 $\sigma_R=\sigma'_R+\sigma''_R$ 具有下列性质：

$$\sigma_R\supset G_1+G_2, |\sigma_R|\leqslant|\sigma'_R|+|\sigma''_R|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

引理 4 如果G是若当测度为零的集合，那么任意集合$G_1\subset G$也是若当测度为零的集合.

这个引理的结论显然正确.

定理 1 如果集合 G_1 和 G_2 是两个若当可测集，那么它们的和、差与交也是若当可测集.

证明 设$\Gamma(E)$ 表示集合E的边界. 那么容易证明下列集合论意义下的包含关系是正确的：

$$\Gamma(G_1+G_2)\subset\Gamma(G_1)+\Gamma(G_2),$$
$$\Gamma(G_1\cdot G_2)\subset\Gamma(G_1)+\Gamma(G_2),$$
$$\Gamma(G_1-G_2)\subset\Gamma(G_1)+\Gamma(G_2).$$

由于 G_1 和 G_2 都是可测集，由引理 2 可以得出 $m\Gamma(G_1)=0$，$m\Gamma(G_2)=0$. 因此，根据引理 3，上列各个包含关系式的右边的测度都是零；根据引理 4，左边的测度也应是零. 于是，再应用引理2，便可得出定理的叙述中提到的三个集合是可测集.

引理 5 如果若当可测集G被一条若当测度为零的曲线段 L (作为特殊情况也可以是线段)分成两部分 G_1 和G_2，那么其中每一部分都是若当可测集.

证明 显然有

$$\Gamma(G_1)\subset\Gamma(G)+L \quad 和 \quad \Gamma(G_2)\subset\Gamma(G)+L.$$

根据前面的引理，由此可以得出我们需要证明的结论.

由此可见，如果G是若当可测集，那么任一网络S_N (相对于任一坐标系R')将G分成的每一部分都是若当可测的. 每一部分的直

径不大于$\sqrt{2}\cdot 2^{-N}$. 因此，当 $N\to\infty$ 时，各部分的直径一致趋近于零.

现在，我们叙述图形 σ 的最后一个性质.

(f) 如果将图形 σ 在平面 R 上作平移或旋转，那么所得的集合是图形 σ'，而且 $|\sigma|=|\sigma'|$.

根据这一性质以及包含关系 $A\subset B$ 在平移和旋转下保持不变的事实，现在可以得出：

引理 6 如果 G_* 是由可测集 G 经过 R 上的移动或旋转而得到的集合，那么 G_* 是可测集，而且 $mG=mG_*$.

例. 我们来考察一个非可求面积的集（即二维意义下的不可测集）的例子. 设 $G\subset R$ 是一个非空的有界开集，E 是它的所有有理点（即坐标 (x, y) 为有理数的点）的集合. 显然，对于任意有理数 N 来说，$\underset{\sim}{\omega}_N(E)$ 是空集，而且 $m_iE=0$. 另一方面，如果 x^0 是属于 G 的点，那么一定可以找到这样一个非退化的矩形 Δ，它属于 G 而且包含 x^0. 显然，$\tilde{\omega}_N(E)\supset\Delta$，$|\tilde{\omega}_N(E)|\geqslant|\Delta|>0$，$m_eE\geqslant|\Delta|>0$.

因此，$m_iE<m_eE$，E 是非平方集.

下面我们来证明若当测度的可加性.

定理2 如果集合 G_1 和 G_2 是两个若当可测集，而且如果它们有公共点就一定在它们的边界上，那么这两个集合的并（根据定理1是可测集）的测度，等于集合 G_1 和 G_2 的测度的和：

$$m(G_1+G_2)=mG_1+mG_2. \tag{7}$$

证明 我们选取任意的 $\varepsilon>0$，并且选取这样的图形 $\sigma'_1=\sigma'_{1,R}$，$\sigma''_1=\sigma''_{1,R}$，$\sigma'_2=\sigma'_{2,R}$，$\sigma''_2=\sigma''^{2}_{2},_{R}$，使得

$$\sigma'_1\subset G_1\subset\sigma''_1,\ \sigma'_2\subset G_2\subset\sigma''_2,$$

$$mG_1-\varepsilon<|\sigma'_1|<|\sigma''_1|<mG_1+\varepsilon,$$

$$mG_2-\varepsilon<|\sigma'_2|<|\sigma''_2|<mG_2+\varepsilon.$$

设 $\sigma'=\sigma'_1+\sigma'_2$，$\sigma''=\sigma''_1+\sigma''_2$. 显然，$\sigma'$ 和 σ'' 都是初等图形，