现代数学基础丛书

有限群导引

下册

徐明曜 黄建华 李慧陵 李世荣 著

科学出版社

内 容 简 介

本书分上下册出版. 下册内容共分八章，第七章到第十章继续讲述抽象群的理论，包括群上的作用， 幂零群，可解群和 群的进一步知识. 第十一、十二两章分别介绍典型群和置换群的基本知识，这对于有限群的应用是非常基本的. 第十三章讲当代最新发展有限群的几何理论. 最后一章讲群论在图论中的应用.

本书内容简明而翔实，特别注意有限群的应用方法. 包含相当数量的习题，书末有解答和提示.

本书适合于高校数学、物理和化学专业研究生、教师和有关科技工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

有限群导引(下)/徐明曜等著. -北京：科学出版社，1999.3
(现代数学基础丛书/程民德主编)
ISBN 7-03-007196-4

Ⅰ. 有… Ⅱ. 徐… Ⅲ. 有限群 Ⅳ. O152.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 38371 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717

新蕾印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1999 年 5 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1999 年 5 月第一次印刷 印张：13 1/8
印数：1－2 000 字数：345 000

定价：27.00 元

下册前言

如上册初版前言所述，本书是作为教材而编写的，目的是用尽量少的篇幅介绍有限群论的基本知识和基本方法，使读完本书的读者能够接触有限群的现代文献，并开始进行一些研究工作.

自本书上册于 1987 年由科学出版社出版以来，已过去了 11 年. 由于作者方面的原因，下册未能及时交稿付排. 在这 11 年间，作者不断收到读者来信询问下册何时出版，也有的要求购买已经售缺的上册，这对我们是很大的鞭策和鼓励. 现在，在科学出版社的帮助下，终于完成了全书的出版工作，我们谨对关心本书的学术界朋友和广大读者，以及科学出版社的同志们表示衷心的感谢.

本书下册共分八章. 第 VII 章到第 X 章继续讲述抽象群的理论. 首先在第 VII 章讲群在群上的作用，这是群的局部分析理论的基础. 第 VIII 章讲 p- 幂零群， Glauberman 的 ZJ- 定理，并且作为这些理论的应用，讲了 Burnside p^aq^b- 定理的群论证明以及 Thompson 的关于 Frobenius 群的 Frobenius 核必为幂零群的著名定理. 之后，在第 IX 章和第 X 章里分别讲述了可解群和 p- 群的进一步知识. 在讲抽象群的四章之后，第 XI 章和第 XII 章分别介绍典型群和置换群的基本知识，这些具体的群的知识是非常基本的，而且对于今天 (单群分类完成之后) 的有限群工作者，特别是想应用有限群的结果到数学的其它领域，譬如几何、组合论以及图论的人们来说是至关重要的. 本书的第 XIII 章讲有限群的几何理论. 1980 年单群分类问题解决之后， J. Tits 所创立的群几何

理论迅速发展，并已成为有限群论的重要组成部分. 近年来，群几何理论向有限群的许多分支渗透，并取得了一些令人瞩目的成果；特别地，群几何理论为最终完成有限单群分类定理的证明，起到了十分重要的作用. 而且目前群几何理论的应用已远远超出了有限群的范围. 本书的最后一章 —— 第 XIV 章讲群论在图论上的应用. 我们在这一章中只讲述了群与图这个广泛的研究领域中的很少几个问题，借以说明群论是如何应用到具有较高对称性的图的理论中去的.

我们认为在下册中，第 VII, VIII, XI, XII 四章是基本的，每个专攻有限群的研究生都应该认真学习. 这四章加上上册的六章可作为硕士生一年的课程. 如感到时间较松，可再选学剩下的四章中的一章到两章. 这可凭借教师的兴趣以及研究生的培养目标而定. 对于这剩下的四章的选材，基本上是根据作者的兴趣，而并不追求内容的完整.

本书下册具有和上册相同的写作特点，初版前言中的 1–5 款仍请读者注意.

下册的写作除了上册作者徐明曜外，又加上了合作者黄建华、李慧陵和李世荣. 其中徐明曜负责第 VII, VIII, X, XIV 四章的写作，李世荣写作第 IX 章，李慧陵写作第 XII 章，而第 XI, XIII 两章由黄建华执笔.

编写本书下册增加了以下四本参考书：

8. M. Suzuki, *Group Theory I*, Springer-Verlag, 1982.

9. M. Suzuki, *Group Theory II*, Springer-Verlag, 1986.

10. M. Aschbacher, *Finite Group Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

11. H. Kurzweil und B. Stellmacher, *Theorie der endlichen Gruppen*, Springer-Verlag, 1998.

限于作者的水平，本书还会有错误和不足之处，亟盼读者给以指正.

最后，我们要感谢首都师范大学王汝楫教授、广西大学班桂宁教授、北方交通大学冯衍全博士、郑州大学王长群博士、清华

大学王殿军博士以及北京大学博士生曲海鹏，他们对本书的初稿进行了校对，并协助进行计算机排版的工作．特别是王汝楫教授和曲海鹏同学，他们认真阅读了本书大部分章节，提出了不少修改的意见．

徐明曜　黄建华

李慧陵　李世荣

1998 年 8 月于北京大学

目　录

下册第二版前言 i

第 VII 章　群在群上的作用 **1**

§1. 群在群上的作用 2

§2. π'-群在交换 π-群上的作用 5

§3. π'-群在 π-群上的作用 11

§4. Hall-Higman 简化定理和 Blackburn 定理 17

第 VIII 章 转移，ZJ-定理和 p-幂零群 **22**

§1. Grün 定理 22

§2. p-幂零群 26

§3. 极小非 p-幂零群 28

§4. Glauberman ZJ-定理 32

§5. Glauberman-Thompson p-幂零准则 39

§6. Burnside p^aq^b-定理 40

§7. Frobenius 群 47

第 IX 章　可解群若干专题 **54**

§1. 超可解群 54

§2. p-可解群的 p-长 62

§3. 幂零子群 68

§4. Deskins 的指数复合 76

§5. 正规指数 83

§6. 极小子群 90
§7. 置换条件 97
§8. 共轭类长 101

第 X 章　有限 p-群的进一步知识　109
§1. Hall 恒等式 109
§2. 正则 p-群和 p-交换群 113
§3. 亚交换正则 p-群 119
§4. 正则 p-群的幂结构 134
§5. 亚循环 p-群 142

第 XI 章　典型群　153
§1. 一般线性群简介 154
§2. 典型群 158
§3. 射影空间和射影群 179
§4. $PSL(2,q)$ 的子群结构 189

第 XII 章　置换群　201
§1. 置换群的基本概念 202
§2. 非本原群和本原群 206
§3. 多重传递群 208
§4. 轨道图 213
§5. 本原群的群论结构 223
§5.1 本原群的基柱 223
§5.2 本原群的几种类型 228
§5.3 O'Nan-Scott 定理 237
§6. 有较小级的传递子群的本原群 239
§7. Mathieu 群 242
§8. 素数级本原群 250
§9. 2 重传递群介绍 256

第 XIII 章 群的几何理论 **266**

§1. 复形 267
§2. Coxeter 系和 Coxeter 复形 273
§3. 厦 286
§4. BN-对 294
§5. 融合理论 303
§6. 有限单群简介 311
§6.1 有限单群简介 312
§6.2 有限单群分类定理要点 315

第 XIV 章 群与图 **321**

§1. 图的基本概念 322
§2. 图的谱和邻接代数 333
§3. 图的自同构群 340
§4. 群的 Cayley 图 349
§4.1 Cayley 图的同构问题 351
§4.2 Cayley 图的自同构群 361
§4.3 Cayley 图的 Hamilton 性 366
§4.4 Sabidussi 陪集图 367
§5. 对称图的一般理论 369
§5.1 点本原对称图 369
§5.2 非点本原对称图 370
§6. 半传递图和半对称图 379

下册习题提示 **387**

索 引 **404**

第 VII 章

群在群上的作用

我们在第 II 章中研究了群在集合上的作用，证明了有限群最基本的定理 —Sylow 定理. 第 VI 章又讲述了群表示论，它研究的是群在向量空间上的作用. 应用这个理论可以得到十分丰富的结果. 本章我们将讨论群在群上的作用，这时作用的对象是另一个群. 从某种意义上来说，它似乎介于群在集合上的作用和群在向量空间上的作用两者之间. 因为群虽然比集合有更丰富的代数结构，但又远不及向量空间，后者是一个以域为算子集的交换群. 因此，我们企望能从这种研究中得到某些新的概念，方法和结果. 它不象在集合上的作用那样空泛，同时又能把表示论的某些结果和方法应用到远更广泛的场合，这种想法从逻辑上看是合理的，而且在实际上也已经取得了丰硕的成果. 事实上，从 50 年代末开始创立的研究有限群的群论方法 (或更精确地，局部分析方法) 正是以此为基础的.

我们知道，群元素在集合上的作用相当于该集合的一个置换，它在向量空间上的作用相当于该空间的满秩线性变换，而它在群上的作用则相当于该群的一个自同构. 因而, 本章也可以看成是对自同构群的进一步研究. 由于这几种作用的对象迥然不同，因此，所考虑的中心问题以及得到的结果也很不一样. 但尽管如此，它们都以一个统一的“作用”的观点为中心，这个观点是十分重要的. 如果我们把视野再扩大一些，允许群作用的集合有某种几何的或组合的结构，比如它们是图，射影平面，或区组设计

等，那么还会得到许多令人惊异的结果，无论是对群还是对这些组合结构.

以上这些话我们希望能对读者学习和研究有限群提供某些方法性的启示.

§1. 群在群上的作用

定义 1.1 设 G 和 H 是给定的有限群. 若 φ 是 H 到 $\mathrm{Aut}(G)$ 内的一个同态映射. 我们就称 φ 为 H 在 G 上的一个作用.

于是，对于任意的 $h \in H$, 有 $\varphi(h) \in \mathrm{Aut}(G)$. 并且对于任意的 $g \in G$, 我们以 g^h 表 g 在 $\varphi(h)$ 之下的像，即规定 $g^h = g^{\varphi(h)}$.

和第 II 章以及第 VI 章的情形相同，我们称 φ 为*忠实作用*，如果 $\mathrm{Ker}\,\varphi = 1$; 而称 φ 为*平凡作用*, 如果 $\mathrm{Ker}\,\varphi = H$, 这时有 $\varphi(H) = 1$.

根据第 III 章讲述的群扩张理论，由群 G, H 和作用 φ 可唯一确定一个 G 和 H 的半直积 $S = G \rtimes_\varphi H$. 在 S 中，$h \in H$ 在 G 上的作用就相当于共轭变换，亦即 $g^h = h^{-1}gh$, $\forall g \in G$. 显然，半直积 S 是直积当且仅当 φ 是平凡作用.

例 1.2 设 S 是群，$H, G \leq S$, 且 $H \leq N_S(G)$. 则 H 在 G 上的共轭作用是 H 在 G 上的一个作用.

这个作用虽然简单，但非常重要. 它和上述作半直积的考虑恰好相反.

定义 1.3 设 φ 是群 H 在 G 上的一个作用，$A \leq G$, 称 A 为 *H-不变的*, 如果 $A^h \subseteq A$, $\forall h \in H$.

事实上，因为 h 在 A 上的作用相当于 A 的自同构，$A^h \subseteq A$ 等价于 $A^h = A$. 因而在上述定义中可用 $A^h = A$ 代替 $A^h \subseteq A$.

如果在半直积 $S = G \rtimes_\varphi H$ 中考虑，G 的子群 A 是 H-不变的就等价于 $H \leq N_S(A)$. 因而 "A 是 H-不变的" 也常称作 "A 被 H 正规化".

定义 1.4 设 φ 为 H 在 G 上的一个作用. 如果 G 中存在非平凡的 H-不变子群, 则称作用 φ 为 **可约的**, 否则称为 **不可约的**.

又, 如果 G 可表成两个非平凡的 H-不变子群 A, B 的直积 $G = A \times B$, 则称作用 φ 为 **可分解的**, 否则称为 **不可分解的**.

命题 1.5 *设 φ 是群 H 在 G 上的作用.*

(1) 若 A 是 G 的 H-不变子群, 则 $C_G(A)$ 和 $N_G(A)$ 也是 G 的 H-不变子群.

(2) 若 A 是 G 的 H-不变正规子群, 则 φ 诱导出 H 在 G/A 上的作用 $\bar{\varphi} : h \mapsto \bar{\varphi}(h)$, 这里 $\bar{\varphi}(h) : gA \mapsto g^h A$, $\forall g \in G$.

证 (1) 首先看一个一般性的结论. 设 A, G 是群 S 的子群, 且 $A \leq G$, α 是 S 的自同构. 则易验证

$$C_G(A)^\alpha = C_{G^\alpha}(A^\alpha), \quad N_G(A)^\alpha = N_{G^\alpha}(A^\alpha). \tag{1.1}$$

(例如验证后者: 由 $g \in N_G(A) \iff g \in G$ 且 $g^{-1}Ag = A \iff g^\alpha \in G^\alpha$ 且 $(g^\alpha)^{-1}A^\alpha g^\alpha = A^\alpha \iff g^\alpha \in N_{G^\alpha}(A^\alpha)$, 即可得到 $N_G(A)^\alpha = N_{G^\alpha}(A^\alpha)$.)

下面把 (1.1) 式应用到本命题: 设 S 为半直积 $G \rtimes_\varphi H$, $h \in H$. 命 α 为由 h 诱导出的 S 的内自同构, 注意到 $A^h = A$, $G^h = G$, 则可由 (1.1) 式得到

$$C_G(A)^h = C_{G^h}(A^h) = C_G(A),$$

$$N_G(A)^h = N_{G^h}(A^h) = N_G(A).$$

再由 h 的任意性, 即得 $C_G(A)$ 和 $N_G(A)$ 是 G 的 H-不变子群.

(2) 设 $g, g' \in G$, $gA = g'A$, $h \in H$. 由 $gA = g'A$, $g^{-1}g' \in A$. 于是 $(g^{-1}g')^h \in A^h = A$, $(g^h)^{-1}g'^h \in A$, 即 $g^h A = g'^h A$. 故映射 $\bar{\varphi}(h)$ 是有意义的. 注意到上述过程可以逆推, 故 $\bar{\varphi}(h)$ 是 G/A 到自身的单射. 因当 g 跑遍 G 时 g^h 亦跑遍 G, 故 $\bar{\varphi}(h)$ 又是满射. 而 $\bar{\varphi}(h)$ 保持运算是明显的, 这样 $\bar{\varphi}(h) \in \mathrm{Aut}(G/A)$. 最后, 对于 $h, h' \in H$, 因为

$$(gA)^{\bar{\varphi}(hh')} = g^{hh'}A = (g^h A)^{\bar{\varphi}(h')} = (gA)^{\bar{\varphi}(h)\bar{\varphi}(h')},$$

故 $\bar{\varphi}(hh') = \bar{\varphi}(h)\bar{\varphi}(h')$. 于是 $\bar{\varphi}$ 是 H 到 $\mathrm{Aut}(G/A)$ 内的同态. □

下面我们推广已经熟悉的中心化子和换位子的概念.

定义 1.6 设群 H 作用在群 G 上.

(1) 规定 $C_G(H) = \{g \in G \mid g^h = g,\ \forall h \in H\}$, 即 $C_G(H)$ 为 H 在 G 中的不动点的集合. 显然, $C_G(H)$ 是 G 的 H-不变子群.

(2) 设 $g \in G$, $h \in H$, 规定

$$[g, h] = g^{-1}g^h.$$

同时规定

$$[G, h] = \langle [g, h] \mid g \in G \rangle,$$

$$[G, H] = \langle [g, h] \mid g \in G, h \in H \rangle.$$

事实上, 如果在半直积 $S = G \rtimes_\varphi H$ 中考虑, 上述概念即我们所熟知的中心化子和换位子的概念. 仿照换位子群, 以下我们还约定

$$[G, H, H] = [[G, H], H], \qquad [G, h, h] = [[G, h], h],$$

等等.

命题 1.7 *设群 H 作用在 G 上. 则 $[G, H]$ 是 G 的 H-不变正规子群, 且 H 在 $G/[G, H]$ 上作用平凡. 又若 N 是 G 的一个 H-不变正规子群, 使得 H 在 G/N 上作用平凡, 则 $[G, H] \le N$.*

证 对于任意的 $g, g_1 \in G$, $h, h_1 \in H$, 有

$$\begin{aligned} [g, h]^{h_1} &= [g^{h_1}, h^{h_1}] \in [G, H], \\ [g, h]^{g_1} &= [gg_1, h][g_1, h]^{-1} \in [G, H]. \end{aligned}$$

故 $[G, H]$ 是 G 的 H-不变正规子群. 又因

$$(g[G, H])^h = g^h[G, H] = g[g, h][G, H] = g[G, H],$$

故 H 在 $G/[G,H]$ 上作用平凡.

现在假定 N 是 G 的 H-不变正规子群，且对任意的 $h\in H$, $g\in G$ 有

$$(gN)^h=g^hN=gN,$$

则 $g^{-1}g^hN=N$, 即 $[g,h]\in N$, 于是 $[G,H]\le N$. □

命题 1.8 *设有限 p-群 H 作用在有限 p-群 $G\neq 1$ 上，则有 $C_G(H)\neq 1$, 且 $[G,H]<G$.*

证 这时半直积 $S=G\rtimes H$ 也是有限 p-群. 因为 $G\lhd S$, 有 $1\neq Z(S)\cap G\le C_G(H)$, 故 $C_G(H)\neq 1$. 又因 S 幂零， $[G,S]<G$, 当然更有 $[G,H]<G$. □

定理 1.9 *设 p-群 H 作用在群 G 上，则存在 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$ 是 H-不变的.*

证 令 $S=G\rtimes H$, 取 $R\in\mathrm{Syl}_p(S)$ 满足 $H\le R$. 则若令 $P=R\cap G$, 有 $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$. 最后因

$$P^H=(R\cap G)^H=R^H\cap G^H=R\cap G=P,$$

故 P 是 H-不变的. □

§2. π'-群在交换 π-群上的作用

前面说过，群的表示也可以看成是群在群上的作用，只不过被作用的群是一个向量空间的加法群. 因此，表示论的方法和结果对于一般地研究群在群上的作用应该有它的应用. 在表示论中，如果域的特征等于零或者不整除所讨论的群的阶，其理论有它的简便之处. 这提示我们，在研究群在群上的作用时也应该先加上类似的假设，这就是假定作用的群和被作用的群的阶是互素的，也就是研究 π'-群在 π-群上的作用，这里 π 是一个素数集合. 另外，交换群比非交换群更接近于向量空间，因此我们先来研究 π'-群在交换 π-群上的作用.

这时，在表示论中起重要作用的 Schur 引理和 Maschke 定理都有它们的推广了的形式.

定理 2.1 (Schur 引理) *设 φ 是群 H 在交换群 G 上的一个不可约作用，又设 $E=\mathrm{End}(G)$ 是 G 的自同态环. 则 $C_E(\varphi(H))$ 是一个体.*

证 不失普遍性，可设 φ 是忠实作用. 即可设 $H\le \mathrm{Aut}(G)\subseteq E$. 我们来证明 $C=C_E(H)$ 是一个体.

容易验证 C 是 E 的一个子环. 于是我们只须再证明 C 中每个非零元素 α 都是可逆的，并且其逆 $\alpha^{-1}\in C$ 即可.

考虑 $\mathrm{Ker}\,\alpha$ 和 G^α. 我们来证明它们都是 G 的 H-不变子群. 设 $h\in H$, $k\in \mathrm{Ker}\,\alpha$, 有 $(k^h)^\alpha=(k^\alpha)^h=1$, 故 $k^h\in \mathrm{Ker}\,\alpha$. 这得到 $\mathrm{Ker}\,\alpha$ 的 H-不变性. 再设 $g\in G$, 由 $(g^\alpha)^h=(g^h)^\alpha\in G^\alpha$, 又得到 G^α 的 H-不变性. 现在由 $\alpha\neq 0$ 以及 φ 是不可约作用，必有 $\mathrm{Ker}\,\alpha=0$ 和 $G^\alpha=G$. 于是 α 是可逆的，而 $\alpha^{-1}\in C$ 是明显的.
□

定理 2.2 (Maschke) *设 π'-群 H 作用在交换 π-群 G 上，A 是 G 的 H-不变子群, 并且是 G 的直因子, 即存在 $B\le G$ 使 $G=A\times B$, 则必可找到 G 的某个 H-不变子群 K 使 $G=A\times K$.*

证 令 ρ 是 G 到 A 上的射影. 如下规定 G 到 G 内的另一映射 ψ:

$$g^\psi=\prod_{h\in H}(g^n)^{h\rho h^{-1}},$$

其中 n 是满足 $n|H|\equiv 1(\mathrm{mod}\ |G|)$ 的一个正整数，这样的 n 存在是因为 $(|G|,|H|)=1$. 我们有

(1) ψ 是 G 到 A 内的映射：由 A 的 H-不变性.

(2) ψ 是 G 到 A 上的射影：对 $a\in A$ 有

$$a^\psi = \prod_{h\in H}(a^n)^{h\rho h^{-1}}=\prod_{h\in H}((a^n)^h)^{\rho h^{-1}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{h\in H}(a^n)^{hh^{-1}} = \prod_{h\in H} a^n \\
&= a^{n|H|} = a.
\end{aligned}
$$

(3) ψ 是 G 到 A 上的 H-同态，从而 $K = \mathrm{Ker}\,\psi$ 也是 G 的 H-不变子群：对于任意的 $h' \in H$,

$$
\begin{aligned}
g^{\psi h'} &= \prod_{h\in H}(g^n)^{h\rho h^{-1}h'} \\
&= \prod_{h\in H}(g^n)^{h'(h'^{-1}h)\rho(h'^{-1}h)^{-1}} \\
&= \prod_{h\in H}((g^{h'})^n)^{(h'^{-1}h)\rho(h'^{-1}h)^{-1}} \\
&= \prod_{h'^{-1}h\in H}((g^{h'})^n)^{(h'^{-1}h)\rho(h'^{-1}h)^{-1}} \\
&= g^{h'\psi},
\end{aligned}
$$

故 ψ 是 H-同态. 从而 K 也是 G 的 H-不变子群.

(4) $G = A \times K$: 因 ψ 是 G 到 A 上的射影， $A \cap K = 1$. 又对任意的 $g \in G$, 有 $g = g^\psi \cdot (g^\psi)^{-1}g$, 其中 $g^\psi \in A$, 而因 $((g^\psi)^{-1}g)^\psi = ((g^\psi)^\psi)^{-1}g^\psi = (g^\psi)^{-1}g^\psi = 1$, 故 $(g^\psi)^{-1}g \in K$. 定理得证. □

注 2.3 从上述证明可以看出，在定理的条件中，“G 是 π-群”可以减弱为“G 有一个 H-不变直因子 A 是 π-群”，定理的结论仍能成立.

下面来研究 H 在 G 上作用的不可分解性. 我们来证明

定理 2.4 *设 p'-群 H 作用在交换 p-群 G 上. 令 $\Omega = \Omega_1(G)$, 它作为 G 的特征子群当然是 H-不变的. 假定 Ω 是 H-可约的，则 G 必为 H-可分解的.*

证 设 $\exp G = p^e$, 则 $1 \neq \mho = \mho_{e-1}(G)$. 因为 $\mho$ char G, 故 $\mho$ 是 H-不变的. 又因 Ω 是 H-可约的，存在它的非平凡 H-不变子群 K. 我们可以选到 $K \leq \mho$. (这总是可以办到的. 因为若 $\mho < \Omega$,

则可取 $K=\mho$; 而若 $\mho=\Omega$, 则可任取 Ω 的非平凡 H-不变子群作为 K.) 令 $|K|=p^k$. 再令 T 是 G 的满足 $T\cap K=1$ 的极大 H-不变子群, 当然有 $T\neq 1$. (因为据定理 2.2, 在 Ω 中就有非平凡 H-不变子群与 K 的交为 1.)

考虑 $\overline{G}=G/T$. 由命题 1.4(2), H 也作用在 $\overline{G}$ 上, 并且子群 $\overline{K}=KT/T$ 也是 $\overline{G}$ 的 H-不变子群. 我们有

(1) $\exp\overline{G}=p^e$, $\overline{K}\le\mho_{e-1}(\overline{G})$ 且 $|\overline{K}|=|K|=p^k$: 因为 $K\le\mho$, 故对 K 的任一非单位元素 y, 可找到元素 $x\in G$ 满足 $y=x^{p^{e-1}}$, 则 x 在 $\overline{G}$ 中的像 $\bar{x}$ 必满足 $\bar{x}^{p^{e-1}}\neq\bar{1}$. (若否, $\bar{x}^{p^{e-1}}=\bar{1}$, 即 $x^{p^{e-1}}\in T$. 但 $x^{p^{e-1}}\in K$, 故 $x^{p^{e-1}}\in K\cap T=1$, 于是 $x^{p^{e-1}}=y=1$, 矛盾.) 于是有 $\exp\overline{G}\ge p^e$, 但 $\exp G=p^e$, 故 $\exp\overline{G}=p^e$.

又因 $K\le\mho_{e-1}(G)$, 当然有 $\overline{K}\le\mho_{e-1}(\overline{G})$, 而因

$$|\overline{K}|=|KT/T|=|K/K\cap T|=|K|,$$

故 $|\overline{K}|=p^k$.

(2) $\overline{G}$ 中不存在与 $\overline{K}$ 不相交的非平凡的 H-不变子群: 若有这样的子群 $\overline{T}_1=T_1/T$, $\overline{T}_1\cap\overline{K}=\bar{1}$, 则由 $T_1\cap K=1$ 及 $T_1>T$, 与 T 的极大性相矛盾.

(3) $\overline{K}=\mho_{e-1}(\overline{G})=\Omega_1(\overline{G})$: 若否, 则必有 $\overline{K}<\Omega_1(\overline{G})$. 于是由定理 2.2, 在 $\Omega_1(\overline{G})$ 中存在非平凡 H-不变子群 $\overline{T}_1$ 满足 $\overline{T}_1\cap\overline{K}=\bar{1}$, 与 (2) 矛盾.

由 (3), $\overline{G}$ 必为 k 个 p^e 阶循环子群的直积. 我们设 $\overline{G}=\langle\bar{a}_1\rangle\times\cdots\times\langle\bar{a}_k\rangle$, a_i 是 $\bar{a}_i$ 的原像, $i=1,\cdots,k$. 并令 $M=\langle a_1,\cdots,a_k\rangle$. 则显然有 $G=MT$. 因为 $o(\bar{a}_i)=p^e$, 必有 $o(a_i)=p^e$, 于是 $M=\langle a_1\rangle\times\cdots\times\langle a_k\rangle$ 的阶为 $p^{ek}=|\overline{G}|$. 故

$$|M|=|G/T|=|MT/T|=|M/T\cap M|,$$

于是 $M\cap T=1$. 这说明了 $G=M\times T$. 因为 T 是 H-不变的, 再用定理 2.2, 即得 G 存在 H-不变子群 M_1 满足 $G=M_1\times T$, 于是 G 是 H-可分解的. □

推论 2.5 *p'-群 H 不可分解地作用在交换 p-群 G 上, 则 G 必为齐次循环 p-群, 即它的型不变量为 $(p^e,p^e,\cdots,p^e)$, 其中 $p^e=\exp G$.*