

# 机械振动学

刘方抗 编

JIXIE  
ZHENDONG  
XUE



航空工业出版社

# 机 械 振 动 学

刘方抗 编

航空工业出版社

1992

(京)新登字161号

## 内 容 提 要

本书内容是机械振动学的基础理论知识。全书共分五章，在系统地介绍了机械振动的基本概念，对单自由度、两自由度及多自由度线性系统机械振动的基本理论和有关问题作了较详细的论述，并结合机械工程类专业，介绍了机械振动在机械工程中的实际应用。

本书叙述详细，例题较多，并附有习题，便于教学，可作为高等工科院校教材，也可作为工程技术人员的自学用书或参考书。

## 机 械 振 动 学

刘方抗 编

航空工业出版社出版发行  
(北京市安定门外小关东里14号)

—邮政编码：100029—

全国各地新华书店经售

南昌航空工业学院印刷厂印刷

1992年9月第1版

1992年9月第1次印刷

开本：787×1092毫米 1/16

印张：11.5

印数：1—1900

字数：287千字

ISBN 7-80046-455-5/TH·020

定价：3.50元

## 前 言

力学系统的振动或振荡，是整个物理学中最重要的研究领域之一。振动学在机械力学、流体力学、声学、光学、自动控制等领域中占有重要地位。自十八世纪末确立微振动理论至今二百年来，振动理论研究已发展到很高的水平，在工程问题中的应用也经历了相当长的时间，并派生出不少专题的研究。但随着科学技术的飞速发展，现代工程技术向高速度、高精度、大功率、大型化、轻量化、复杂化方向发展，振动问题的研究仍在朝着更深入、更广阔的领域进军，现已由基本的简单系统的研究发展到以现代的复杂问题和庞大系统的处理为主的研究。尤其电子计算机的发展和广泛应用，先进的振动测量和分析技术的出现，振动理论有了许多重要的突破，并得到更广泛的应用。此外，振动问题不仅是工程技术本身的问题，振动作为环境污染源已和人民的的生活密切相关，更加普遍引起人们极大的重视和关注。

随着我国社会主义建设事业的蓬勃发展，振动问题在我国科技界也日益受到重视，研究和解决各种振动问题已成为工程技术领域里的重要课题，在国内已开展大量研究工作。在机械工业中，进行机械或机构的动力分析和动态设计，已成为提高机械产品质量、保证其工作可靠性的重要一环；对机械加工而言，工艺系统的振动将降低加工质量，缩短刀具寿命，降低生产率和机床的精度，产生噪声并成为提高机床自动化水平的严重障碍。这些已成为机械振动学、切削动力学、机床动力学等研究的重要内容。

关于振动问题，无论从防治还是从有效利用方面来说都应阐明其力学原理，研究其力学内容。因此，振动理论今天已成为广大工程技术人员所必备的基础知识，是许多专业的一门必修课程。国内外不少高等工科院校都开设了有关振动工程的课程。

机械振动学是一门理论性、实用性均很强的学科，研究范围相当宽广，需要涉及到多方面的知识，尤其要有丰富的数学基础。本书编写了机械振动学的基础理论知识，系统地论述了线性系统的机械振动的基本理论。本书主要是作为机械工程类专业本科生使用的教材，为此还结合专业特点，介绍了机械振动在机械工程中的一些实际应用问题，如在机械加工中的振动问题和振动在机械设备故障诊断技术中的应用。因这些问题涉及面很广，已有不少专著，限于篇幅，仅作最基本的概括性介绍。本书将为读者进一步学习研究各种有关振动问题奠定必要的基础。

本书由北京理工大学王信义教授审稿，并提出了宝贵的修改指导意见，谨在此致以衷心的感谢。限于编者水平，错误和不妥之处，敬请读者指正。

编 者

1991年7月

# 目 录

<b>第一章 机械振动概述</b> .....	( 1 )
1-1 机械振动的定义及研究内容.....	( 1 )
1-2 机械振动的分类.....	( 1 )
1-3 机械振动的表示方法.....	( 3 )
1-4 谐波分析.....	( 7 )
<b>第二章 单自由度系统的振动</b> .....	( 12 )
2-1 振动系统的动力学模型.....	( 12 )
2-2 单自由度系统的自由振动.....	( 14 )
2-3 单自由度系统的强迫振动.....	( 31 )
2-4 强迫振动理论的应用.....	( 45 )
2-5 机械阻抗的基本概念.....	( 52 )
2-6 简谐力的功.....	( 56 )
2-7 非简谐激振力产生的强迫振动.....	( 59 )
<b>第三章 两自由度系统的振动</b> .....	( 69 )
3-1 无阻尼双质量弹簧系统的自由振动.....	( 69 )
3-2 固定轴上双圆盘扭转振动.....	( 72 )
3-3 静力耦合和动力耦合.....	( 73 )
3-4 “拍”的现象.....	( 76 )
3-5 位移运动方程及柔度影响系数.....	( 78 )
3-6 双质量弹簧系统的强迫振动.....	( 82 )
3-7 阻尼对两自由度系统振动的影响.....	( 85 )
3-8 动力减振器.....	( 89 )
<b>第四章 多自由度系统的振动</b> .....	( 95 )
4-1 多自由度系统振动方程式.....	( 95 )
4-2 固有频率和主振型.....	( 99 )
4-3 主坐标和正则坐标.....	( 103 )
4-4 固有频率——方程特征值的讨论.....	( 110 )
4-5 系统对初始条件的响应.....	( 115 )
4-6 多自由度系统的阻尼.....	( 117 )
4-7 多自由度系统强迫振动.....	( 119 )

4-8 固有频率及主振型的计算方法.....	( 122 )
<b>第五章 机械振动在机械工程中的应用.....</b>	<b>( 129 )</b>
5-1 机械加工工艺系统的振动问题.....	( 129 )
5-2 振动在机械设备故障诊断中的应用.....	( 148 )
<b>习题.....</b>	<b>( 156 )</b>
<b>参考文献.....</b>	<b>( 177 )</b>

# 第一章 机械振动概述

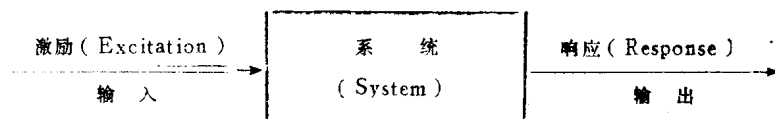
## 1-1 机械振动的定义及研究内容

振动或振荡 (Vibration; Oscillation) 是在相对给定的参考系中, 一个随时间变化的量值与其平均值相比所表现出的时大时小交替变化的现象, 是一种特殊的运动形式。它随着振动体和振动形态的不同, 又有着各种不同的表现形式, 蚊虫翅膀每秒钟振动数百次, 能发出听得见的声音; 地球在一次地震发生后, 也会以约每小时一次的回摆率振动; 声、光、电磁波等都是振动现象。实际上, 各种系统都具有振动的能力, 而且大多数系统都能以多种多样的方式振动。同时具有质量和弹性的机械系统的振动称为机械振动 (Mechanical vibration)

在许多情况下, 机械振动是有害的, 它影响机械设备的工作性能和寿命, 产生有害的噪声及有损于机械结构或建筑物的动载荷, 严重时导致破坏性事故。因此需要将其振动的程度及其影响控制在允许的范围内; 另一方面, 机械振动的原理也可以利用, 如振动造型机、振动运输机等各种振动机械。

机械振动问题广泛地存在机械工程的各个领域内, 常见的问题有: 提高系统的抗振能力; 防止系统产生共振; 避免系统的自振; 不平衡惯性力引起振动的平衡问题; 减振与隔振; 冲击与冲击隔离; 噪声控制; 振动利用等方面。

振动问题研究的内容可以用如下框图加以说明:



图中所示的系统即为振动问题研究的对象, 小至一个零件, 大到一个庞大的工程结构或复杂机器, 都可以看作一个系统, 通常称机械系统或振动系统, 它具有自身的振动特性。

外界对于系统的输入, 包括初始干扰、外界激振力等统称为激励。系统的输出即系统在输入下产生的动态响应, 简称响应。

按以上框图, 振动问题分如下三方面:

1. 振动设计 (Vibration design) 即已知输入及满足预定要求的动态响应来设计系统的振动特性。这是工程技术中最普遍的振动问题。
2. 系统识别 (System identification) 即已知输入和输出, 来研究系统的振动特性。
3. 环境预测 (Forecast ambient) 即已知系统的振动特性和输出来研究输入。

## 1-2 机械振动的分类

按照上节的框图, 从三个方面对机械振动进行分类。

## 一、按系统的输入类型分

1. 自由振动 (Free vibration) 系统受初始干扰或原有外激振力取消后, 系统产生的振动。

2. 强迫振动 (Forced vibration) 系统在外激振力作用下产生的振动。

3. 自激振动 (Self excited vibration) 系统在输入和输出之间具有反馈特性, 并有能量补充而产生的振动。机械工程中机床加工时产生的颤振、低速运动部件的爬行、传动皮带横向自振及滑动轴承的油膜振荡等都是自激振动。

## 二、按系统的特性分

### 1. 按系统结构参数的特性分

1) 线性振动 (Linear vibration) 系统内的恢复力、阻尼力和惯性力分别与振动的位移、速度和加速度成线性关系, 系统可用常系数线性微分方程来描述其振动。

2) 非线性振动 (Non-linear vibration) 系统内若上述参数中有一组以上不成线性关系则称为非线性系统。微分方程中将出现非线性项。

### 2. 按系统的自由度数目分

1) 单自由度系统振动 (Single degree-freedom system vibration) 只用一个独立坐标就能确定的系统振动。

2) 多自由度系统振动 (Multi degree-freedom system vibration) 用多个独立坐标才能确定的系统振动。

3) 连续系统振动 (Continuous system vibration) 即无限多自由度系统振动, 也称弹性体振动。系统需用偏微分方程来描述其运动。

## 三、按系统的输出分

### 1. 按振动位移特征分

1) 直线振动 (Rectilinear vibration) 振动体上质点的运动轨迹为直线振动, 又可分为:

a) 纵向振动 (Longitudinal vibration) 振动体上质点只作沿轴线方向的振动。

b) 横向振动 (Transverse vibration) 振动体上质点作垂直轴方向的振动, 又称弯曲振动 (Flexural vibration)。

2) 圆振动 (Circular vibration) 振动体上质点运动轨迹为圆弧线的振动。对轴线而言, 振动体上的质点只作绕轴线的振动, 也称角振动。

### 2. 按振动规律分

1) 简谐振动 (Simple harmonic motion 简写为SHM) 振动量为时间的正弦或余弦函数。

2) 周期振动 (Periodic vibration) 振动量为时间的周期函数, 故可用谐波分析的方法展开为一系列简谐振动的叠加。

3) 瞬态振动 (Transient vibration) 振动量为时间的非周期函数, 通常只在一定时间内存在。



4) 随机振动 (Random vibration) 振动量不是时间的确定性函数, 只能用概率统计的方法进行研究。

### 1-3 机械振动的表示方法

从运动学的观点看, 机械振动是指机械系统的某些物理量 (位移、速度、加速度) 在某一数值附近, 随着时间的变化关系。当此种关系是确定的, 可用时间函数来描述其振动量。如位移的变化可用下式表示

$$x = x(t) \quad (1.1)$$

若以时间  $t$  为横坐标, 位移  $x$  为纵坐标, 则可作图表示。如图 1-1。

图 1-1 a) 即表示在相等时间间隔内作往复运动, 称为周期运动。可用时间的周期函数来表示振动量, 即

$$x(t) = x(t + nT) \quad (1.2)$$

式中  $n = 1, 2, 3, \dots$

$T$  为重复一次的时间间隔, 称为周期 (Period) 单位以秒 (s) 计。

图 1-1 b) 表示机械系统受到冲击或爆炸后产生的振动。

图 1-1 c) 表示在旋转机械起动过程产生的振动, 是非周期性振动。

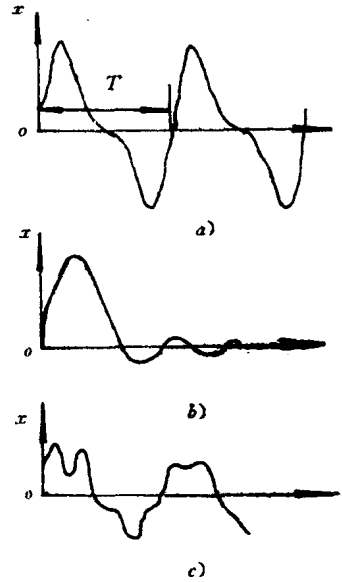


图 1-1 典型机械振动

#### 一、简谐振动

最简单的周期振动是简谐振动。振动位移可表示为:

$$x = A \sin \omega t \quad (1.3)$$

式中  $A$  为振动量的最大值, 称振幅 (Amplitude)。

$\omega$  为圆频率 (Circular frequency) 单位是弧度/秒 (rad/s)。

根据正弦周期函数的特点, 若其周期为  $T$  则

$$A \sin \omega(t + T) = A \sin(\omega t + 2\pi)$$

即

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

在周期振动中, 周期的倒数定义为频率 (Frequency) 即单位时间内振动量的重复次数:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{单位是 } 1/\text{秒} (1/\text{s}) \text{ 称赫兹, 写作 Hz。}$$

故

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (1.4)$$

$\omega t$  称为相角 (Phase angle)

因简谐振动可以看作一个匀速圆周运动的点在铅垂轴上投影的结果，故可以图 1-2 表示。

相角  $\omega t$  即为在时间  $t$  的转角。若振动开始时振动体不在静平衡位置，而是具有初相角  $\varphi$ ，如图 1-3 a) 所示。

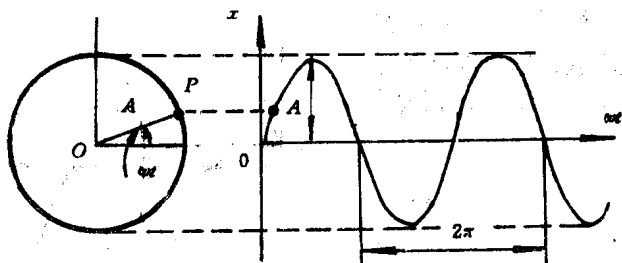


图 1-2 简谐振动

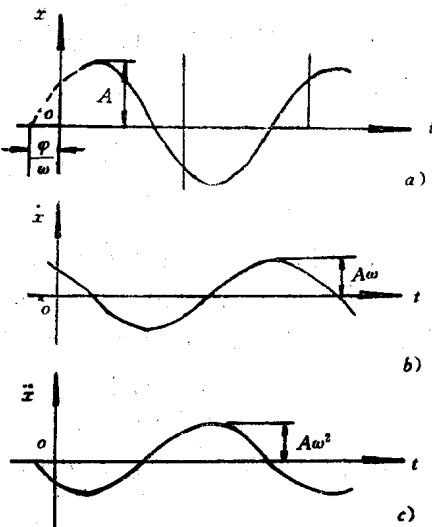


图 1-3 有初相角的振动

则一般表达式应为

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.5)$$

简谐振动的速度和加速度只要对位移求一阶及二阶导数，便可求得。

速度

$$\begin{aligned} v = \dot{x} &= A\omega \cos(\omega t + \varphi) \\ &= A\omega \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

加速度

$$\begin{aligned} a = \ddot{x} &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \\ &= A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi + \pi) \end{aligned} \quad (1.7)$$

可见速度和加速度仍是与位移具有相同频率的简谐函数，只是相角分别超前  $\pi/2$  和  $\pi$ ，振幅分别为  $A\omega$  和  $A\omega^2$ ，如图 1-3 b)、c)、所示。

简谐振动的加速度其大小与位移成正比，而方向则相反，即始终指向平衡位置，这是一个重要特性。

## 二、简谐振动的矢量表示法

简谐振动可用旋转矢量表示，见图 1-2，当  $op$  表示一模为  $A$  并以等角速度  $\omega$  从水平位置开始以逆时针方向旋转的一个旋转矢量，则此矢量在铅垂轴上的投影即可表示一简谐振动  $x = A \sin \omega t$  旋转矢量的模为振幅，旋转角速度则为圆频率。

显然，旋转矢量在水平轴上的投影亦可表示一简谐振动，仅变为余弦函数  $x = A \cos \omega t$ ，但一般采用正弦函数表达。同样，当具有初相角的，即矢量旋转前即与水平轴有一夹角  $\varphi$ ，则要写成  $x = A \sin(\omega t + \varphi)$

现在讨论两个同频率，但相角差为  $\pi/2$  旋转矢量的合成。如图 1-4 所示。

$\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  为以角速度  $\omega$  同步旋转，但  $\vec{a}$  比  $\vec{b}$  超前  $\pi/2$  相角的两个互相垂直的旋转矢量，它们分表示两个简谐振动： $a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = a \cos \omega t$  和  $b \sin \omega t$ 。可按矢量相加原理，得到合

成旋转矢量 $\vec{A}$ ,

其模  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  (1.8)

与 $\vec{b}$ 的相角差  $\varphi = \text{tg}^{-1} \frac{a}{b}$  (1.9)

旋转矢量 $\vec{A}$ 表示一简谐振动, 即  $x = A \sin(\omega t + \varphi)$  且按图 1-4 中几何关系明显可知

$$\begin{aligned} x &= a \cos \omega t + b \sin \omega t \\ &= a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + b \sin \omega t \end{aligned}$$

且  $a = A \sin \varphi, \quad b = A \cos \varphi$

由上式可知, 两个同频率的简谐振动可以合成为一个和原频率相同的简谐振动。反之, 一个简谐振动也可以分解成两个与其频率相同的简谐振动。故具有初相角的简谐振动, 可以看作是二个频率相同、相角差为  $\pi/2$  的简谐振动的合成。

如位移用旋转矢量表示, 则速度、加速度也可用旋转矢量表示, 见图 1-5 所示。

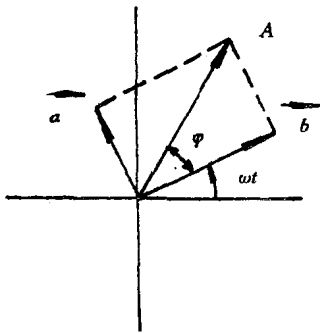


图 1-4 旋转矢量的合成

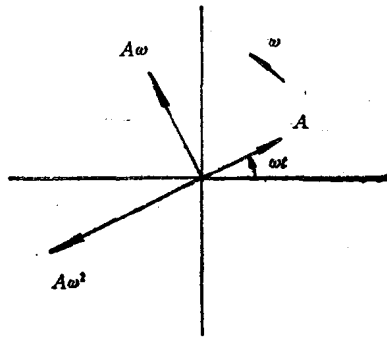


图 1-5 旋转矢量表示图

位移  $x = A \sin \omega t$

速度  $v = A\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\omega \cos \omega t$

加速度  $a = A\omega^2 \sin(\omega t + \pi) = -A\omega^2 \sin \omega t$

### 三、简谐振动的复数表示法

复数  $Z = x + jy \quad j = \sqrt{-1}$

此复数可用四种方法表示:

1) 坐标表示法: 用直角坐标所决定的复平面上的点来表示这个复数。如图 1-6 中的点  $Z$ 。  $x$  轴为实轴,  $y$  轴为虚轴。

2) 矢量表示法 用一矢量  $\vec{op}$  表示复数, 如图 1-7 所示。

$\vec{op}$  在水平和铅垂轴上的投影为  $x$ 、 $y$ 。它的模  $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。矢量与水平轴的夹角  $\theta$  称为辐角, 记作  $\text{arg } Z$ , 而且  $\theta = \text{tg}^{-1} \frac{y}{x}$

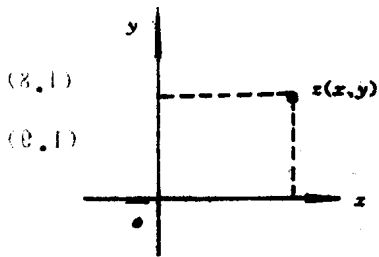


图 1-6 坐标表示法

$$d + j d \sqrt{2} = 1$$

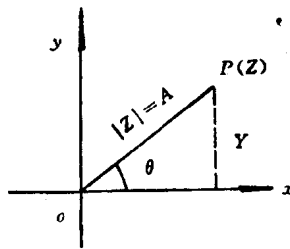


图 1-7 向量表示法

3) 三角表示法 将向量写成三角公式, 因实部  $R_e(z) = x = A \cos \theta$

虚部  $I_m(z) = y = A \sin \theta$

则 
$$Z = A(\cos \theta + j \sin \theta)$$

4) 指数表示法 根据欧拉公式

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

复数可写成指数形式

$$Z = A e^{j\theta}$$

由于一个简谐振动可以用一个旋转矢量在坐标轴上的投影来表示, 所以也可以利用复数矢量法, 当它以某一频率旋转而成为复数旋转矢量时, 它在复平面的虚轴(或实轴)上投影可表示一个简谐振动。如图 1-8 所示。

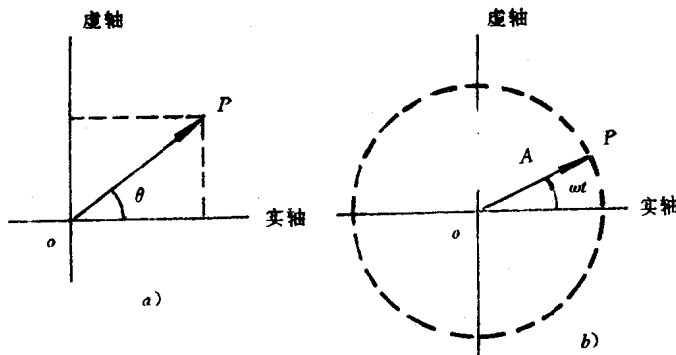


图 1-8 复数矢量表示法

复矢量  $\vec{op}$  其模为  $A$ , 当绕  $O$  点从实轴开始以  $\omega$  匀角速度, 逆时针方向旋转成为复数旋转矢量。则此复数可表达为

$$Z = A(\cos \omega t + j \sin \omega t) = A e^{j\omega t}$$

这个复数在虚轴上(或实轴上)的投影即表一个简谐振动。即

$$x = I_m Z = A \sin \omega t = I_m [A e^{j\omega t}]$$

为简便起见, 以后直接写为  $x = A e^{j\omega t}$  即表示在虚轴上的投影。

由于指数求导数极为简便, 故采用此表达式, 速度和加速度的表达式立即可以写出

$$\text{速度} \quad v = \dot{x} = j\omega A e^{j\omega t} \quad (1.10)$$

$$\text{加速度} \quad a = \ddot{x} = -\omega^2 A e^{j\omega t} \quad (1.11)$$

根据欧拉公式, 当  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = \pi$  时

$$e^{j0} = e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

$$e^{j\pi} = e^{j\pi} = -1$$

故上式又可写成

$$\dot{x} = A\omega e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} \quad (1.12)$$

$$\ddot{x} = A\omega^2 e^{j(\omega t + \pi)} \quad (1.13)$$

这与图 1-5 所示完全一致。由于复数  $A e^{j\omega t}$  每求导一次, 相当于在它前面乘上一个  $j\omega$  而每乘一个  $j$ , 相当于将此复数旋转矢量逆时针旋转  $\pi/2$ , 故运算较为方便。

## 1-4 谐波分析 (Harmonic analysis)

### 一、傅里叶级数 (Fourier series) 法

任何一个周期函数, 在满足狄利克雷 (Dirichlet) 条件下 (即 1. 函数在一个周期内连续或只有有限个间断点; 且间断点上函数左右极限都存在; 2. 在一个周期内只有有限个极大和极小值;) 都可以展开成傅里叶级数, 即展开成一系列简谐函数之和。一个周期为  $T$  的函数  $x(t)$  可展开为

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (1.14)$$

式中  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  称为基圆频

$f = \frac{1}{T}$  称为基频

利用三角函数的正交性可得出

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.15)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega_1 t dt \quad (1.16)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega_1 t dt \quad (1.17)$$

( $n=1, 2, 3, \dots$ )

上式亦可写为

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t + \phi_n) \quad (1.18)$$

式中  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

$$\phi_n = \text{tg}^{-1} \frac{a_n}{b_n}$$

三角函数的正交性，有如下公式

$$\int_0^T \cos m\omega_1 t \cos n\omega_1 t dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin m\omega_1 t \sin n\omega_1 t dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin m\omega_1 t \cos n\omega_1 t dt = \int_0^T \cos m\omega_1 t \sin n\omega_1 t dt = 0$$

$$\int_0^T \cos n\omega_1 t dt = \int_0^T \sin n\omega_1 t dt = 0 \quad (n \neq 0)$$

根据三角函数的正交性，当  $x(t)$  为奇函数 ( $x(t) = -x(-t)$ ) 时，则  $a_0 = a_n = 0$ ，就不会有余弦项；当  $x(t)$  为偶函数时 ( $x(t) = x(-t)$ ) 则  $b_0 = 0$ ，便不会有正弦项。

若将谐波分析结果，把  $A_n$  和  $\phi_n$  与其频率  $\omega = n\omega_1$  之间的关系分别用直角坐标图形表示，则  $A_n$  与  $\omega$  关系图称幅值频谱 (Amplitude spectrum)， $\phi_n$  与  $\omega$  关系图称相角频谱 (Phase spectrum)，如图 1-9 所示。

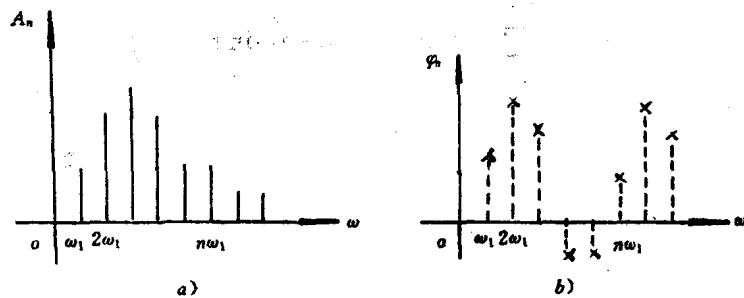


图 1-9 幅频与相频图

由图可知，只有当  $\omega = n\omega_1$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) 时  $A_n$  和  $\phi_n$  才有一定的数值，这种谱称为离散谱 (Discrete spectrum)，都是线谱 (Line spectrum)，故谐波分析又称频谱分析 (Frequency spectrum analysis)，实际上是振动量在频率域 (Domain of frequency) 内进行分析。而前面是在时间域 (Domain of time) 和幅值域 (Domain of amplitude) 内进行分析，统称为波形分析 (Wave form analysis) 频谱分析和波形分析既是相互独立又是密切相关的，它们之间可以通过傅里叶变换 (Fourier transform，即傅里叶级数和傅里叶积分)，可以互相转换。频谱分析和波形分析已获极大的发展，它与随机数据处理

分析方法已构成现代科学中的一个分支，是科学技术领域中重要的工具。

【1.1】 将图 1-10 所示周期方波进行谐波分析。

【解】 分析  $-T/2$  至  $T/2$  这一周期，其表达式为

$$x(t) = \begin{cases} -A & (-T/2 \leq t < -T/4) \\ A & (-T/4 < t < T/4) \\ -A & (T/4 < t \leq T/2) \end{cases}$$

此周期方波为偶函数，故无正弦项，根据式 (1.15)、(1.16)、(1.17) 可得

$$a_0 = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \left\{ \int_{-T/2}^{-T/4} (-A) \cos n\omega_1 t dt + \int_{-T/4}^{T/4} A \cos n\omega_1 t dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{T/4}^{T/2} (-A) \cos n\omega_1 t dt \right\} \\ &= \frac{4A}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{4A}{n\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ &\quad (n=1, 3, 5, \dots) \end{aligned}$$

故 
$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left( \cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t - \dots \right)$$

则可得幅值频谱如图 1-11 所示。

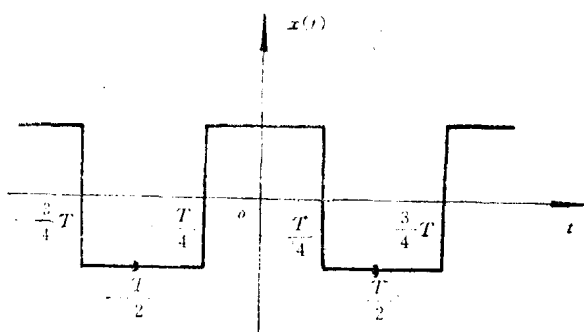


图 1-10 周期方波

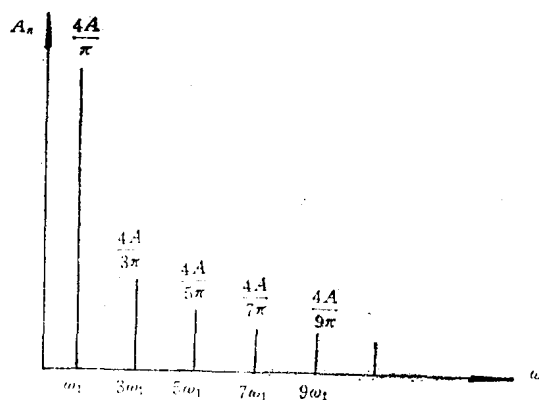


图 1-11 幅频谱

各次谐波分量的幅值分别为基波幅值  $4A/\pi$  的  $1/n$ ，此级数收敛很慢，要构成一个精确的方波，需要很多项。对这个例子必须注意，当纵座标选择位置不同，周期函数可能变成奇函数，则级数展开结果是不同的。

【例 1-2】 求图 1-12 周期三角波的傅里叶级数。

【解】 分析  $-T/2$  至  $T/2$  这个周期，函数可表达为

$$x(t) = \begin{cases} A + \frac{2A}{T}t & (-T/2 \leq t \leq 0) \\ A - \frac{2A}{T}t & (0 \leq t \leq T/2) \end{cases}$$

显见函数为偶函数，仅有余弦项。故

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left( A - \frac{2A}{T}t \right) \cos n\omega_1 t dt$$

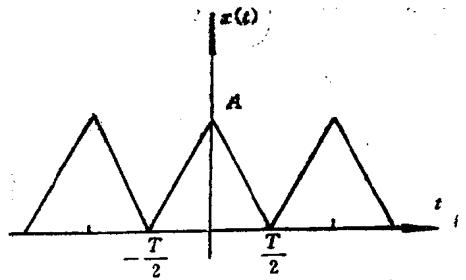


图 1-12 周期三角波

$$= \begin{cases} \frac{4A}{n^2\pi^2} & n=1, 3, 5, \dots \\ 0 & n=2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left( A - \frac{2A}{T}t \right) dt = A$$

因此

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^n \frac{1}{n^2} \cos n\omega_1 t$$

$$= \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \left( \cos \omega_1 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_1 t + \dots \right)$$

为了计算方便，往往将傅里叶级数写成复指数形式，根据欧拉公式，有如下关系式

$$e^{jn\omega_1 t} = \cos n\omega_1 t + j \sin n\omega_1 t$$

$$e^{-jn\omega_1 t} = \cos n\omega_1 t - j \sin n\omega_1 t$$

$$\cos n\omega_1 t = \frac{1}{2} \left( e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t} \right) \quad (1.19)$$

$$\sin n\omega_1 t = \frac{1}{2j} \left( e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t} \right) \quad (1.20)$$

将上式代入式(1.14)

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} a_n e^{jn\omega_1 t} + \frac{1}{2} a_n e^{-jn\omega_1 t} + \frac{1}{2j} b_n e^{jn\omega_1 t} - \frac{1}{2j} b_n e^{-jn\omega_1 t} \right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right]$$

因为  $a_0$  与  $a_n$  的表示式当  $n=0$  时是一致的，且  $a_n = a_{-n}$ ,  $b_n = -b_{-n}$ ，上式可写成

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} \quad (1.21)$$



式中  $a_n = \frac{jb_n}{2}$  称傅里叶级数的复数系数, 记作  $C_n$ , 将式 (1.16), (1.17) 代入可得

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (1.22)$$

( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

## 二、傅里叶级数计算方法

当  $x(t)$  函数不能给出, 只能测其波形或波形离散处理后给出一组数据, 则可以把  $a_n$  和  $b_n$  的积分近似为求和的方法进行计算。

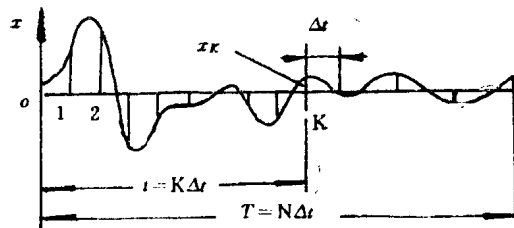


图 1-13 周期函数

图 1-13 所示为一测得的周期函数曲线, 周期  $T = 8(s)$ 。

根据精度要求, 将  $T$  分为  $N$  等分 ( $N$  为偶数) 则分割点间距  $\Delta t = T/N$ , 每分割点横坐标为  $t_K = K\Delta t$  ( $K = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ) 纵坐标为  $x(t_K)$ , 若采用矩形法数值求积可算出系数  $a_0$ ,  $a_n$  和  $b_n$ 。

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} x(t_K) = \bar{x} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{N} \sum_{K=0}^{N-1} x(t_K) \cos n\omega_1 t_K \\ &= \frac{2}{N} \sum_{K=0}^{N-1} x(t_K) \cos n \cdot \frac{2\pi}{T} K \cdot \Delta t \\ &= \frac{2}{N} \sum_{K=0}^{N-1} x(t_K) \cos \frac{2\pi n K}{N} \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$b_n = \frac{2}{N} \sum_{K=0}^{N-1} x(t_K) \sin \frac{2\pi n K}{N} \quad (1.25)$$

式中  $n = 1, 2, 3, \dots, N/2$

以上即为离散的有限傅里叶级数计算公式对于一个非周期振动函数 (瞬态振动和冲击波形) 的频率分析, 一般通过傅里叶积分的方法进行频谱计算。其频率是一条连续曲线, 称为连续谱 (Continuous spectrum)。同样, 当实际曲线不能写出精确的数学函数关系式时, 则往往要把实际曲线逐点的读数离散化后进行计算, 所谓离散傅里叶变换 (D.F.T) 的问题, 这是一种近似算法。按常规的计算法工作量大, 速度太慢, 不适应发展的要求。1965年出现了一种新的有效的称为快速傅叶变换 (F.F.T) 的算法, 现已得到极大的发展, 以 F.F.T 为基础的实时分析仪得到了广泛的重视和应用, 并成为数字信号处理机 (Digital signal processor) 的核心设备。