数学分析新讲

第一册

张筑生　编著

北京大学出版社

北京大学教材

数学分析新讲

第一册

张筑生 编著

北京大学出版社

内 容 提 要

本书的前身是北京大学数学系教学改革实验讲义。改革的基调是：强调启发性，强调数学内在的统一性，重视学生能力的培养。书中不仅讲解数学分析的基本原理，而且还介绍一些重要的应用（包括从开普勒行星运动定律推导万有引力定律等）。从概念的引入到定理的证明，书中作了煞费苦心的安排处理，使传统的材料以新的面貌出现。书中还收入了一些有重要理论意义与实际意义的新材料（例如利用微分形式的积分证明布劳沃尔不动点定理等）。

全书共三册。第一册的内容是：一元微积分，初等微分方程及其应用；第二册的内容是：一元微积分的进一步讨论，多元微积分；第三册的内容是：曲线、曲面与微积分，级数与含参变元的积分等。

本书可作为大专院校数学系基础课教材或补充读物，又可作为大、中学教师，科学工作者和工程技术人员案头常备的数学参考书。

北京大学教材

数学分析新讲

第一册

张筑生 编著

责任编辑：刘勇

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

850×1168毫米　32开本　10印张　250千字
1990年1月第一版　1990年1月第一次印刷
印数：0001—5,000册
ISBN 7-301-00846-5/O·153
定价：4.00元

序　　言

微积分是大学数学教育中最重要的基础课。经过三百多年的发展，这一课程的基本内容已经定型，并且已经有了为数众多的教材（其中不乏优秀之作）。但是，人们仍然感到微积分的教和学都不是一件容易的事。究其原因，恐怕与这门学科本身的历史进程有关。

微积分这座大厦是从上往下施工建造起来的。微积分诞生之初就显示了强大的威力，解决了许多过去认为是高不可攀的困难问题，取得了辉煌的胜利.创始微积分的大师们着眼于发展强有力的方法，解决各式各样的问题。他们没有来得及为这门新学科建立起经得起推敲的严格的理论基础。在以后的发展中，后继者才对逻辑的细节作了逐一的修补。重建基础的细致工作当然是非常重要的，但也给后世的学习者带来了不利的影响。微积分本来是一件完整的艺术杰作，现在却被拆成碎片，对每一细部进行详尽的、琐细的考察。每一细节都弄得很清楚了，完整的艺术形象却消失了。今日的初学者在很长一段时间里只见树木不见森林。在微积分创始时期刺激了这一学科飞速发展的许多重要的应用问题，今日的初学者却几乎一无所知。因为这些应用往往涉及到微分方程，而微分方程则要等待到漫长的学究式的考察完成之后再到另一门课程中去学习。P.Lax，S.Burstein 和 A.Lax 在他们合著的《微积分及其应用与计算》(有人民教育出版社出版的中译本)序言中批评道："传统的课本很象一个车间的工具帐，只载明这儿有不同大小的锤子，那儿有锯子，而刨子则在另一个地方，只教给学生每种工具的用法而很少教学生将这些工具一起用于构造某个真正有意义的东西"。

虽然越来越多的人认识到分析教学中的这一缺憾，但要改变这一状况也并不容易的：因为数学分析在漫长的岁月中已形成一个庞大的知识体系，牵一发而动全身，任何改动都必须作全局通盘考虑，稍有疏忽就难免顾此失彼。

本书的前身是北京大学数学系《数学分析》基础课教学改革实验讲义。改革方案的基调是：强调启发性；强调数学内在的统一性；重视学生能力的培养。

我们希望尽可能早一点让初学者对分析的全貌有一个轮廓的印象，尽可能早一点让初学者学会用分析的方法去解决问题。为了达到这一目的，我们在准备好基础之后，不拘泥于每一细节的深入详尽的讨论，也不追求最一般的条件，而是尽快地展示分析的主要概念（导数、原函数、积分、微分方程）并应用这些概念去解决一些重要而有趣的问题。等到学生对全貌有了初步的印象之后，再具体进行涉及细节的讨论。根据这样的方案进行试验，学生在第一学期就能掌握一元函数微积分的基本理论和方法，能用初等的微分方程解应用问题，并能了解历史上应用微积分的一些最著名的例子。

虽然《数学分析》课程的基本内容已经定型，我们仍然尝试加入了一些在理论上或应用上有重要意义，经适当处理之后又能放入基础课的材料。例如：利用微分形式的积分证明著名的Brouwer不动点定理；利用Fourier级数的封闭性方程去解等周问题，等等。

实数理论的教学，历来是一个棘手的问题。从逻辑顺序来说，这一部分材料应该摆在开头的地方，而初学者在一开始时又很难接受这些内容。我们考虑再三，最后采取的折衷方案是：在讲义中较详细地写出实数理论（不过分学究气），但在讲课时却只扼要地说明实数的连续性。可以基于学生已有的关于无尽小数的知识，概述一下讲义中关于确界原理的证明——主要是说明怎样构造一个无尽小数，它的各不足近似值都是下界。而过剩近似

值都不是下界。至于所构造的数应是集合的下确界。这一事实容易为学生所接受。讲授“实数”这一章时，甚至可以略去§1、§2和§3的大部分内容，只简要地介绍上、下确界的概念，然后重点讲解§4与§5。讲义中的详细内容可供学生经过一段时间的学习之后再回过头来复习时用，那时他们就可以进一步理解较细致的论述了。

从教学改革实验到最后整理写成本书，在整个过程中作者得到了北京大学数学系领导与同事们多方面的关心与帮助。在此谨向李忠、邓东皋、姜伯驹、方企勤、敖海龙等同志致谢。

美国加州大学伯克莱分校的项武义教授关心祖国的教育事业。作者曾就教学改革问题向他请教，获益实多。借此机会谨向项先生表示衷心感谢。

张筑生

1988年12月于北京大学

符 号 说 明

本书所采用的符号都是很普通的。例如

$$\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 n 个实数中最大的一个，而

$$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

则表示这些实数中最小的一个。又如，

$$[x]$$

表示实数 x 的整数部分，也就是不超过 x 的最大整数。我们还以符号

$$\square$$

表示证明完毕，或者要证之事很显然，不再详细写出了。其他符号将在第一次出现时予以说明。

目　录

预篇　准备知识

第一篇　分析基础

第二篇 微积分的基本概念及其应用

第二册 目 录

第三篇 一元微积分的进一步讨论

第三册　目　录

第十九章 函数序列与函数级数

第二十章 傅立叶级数

第二十一章 含参变元的积分

预　　篇

准 备 知 识

本篇为课程的学习作准备，先介绍一些在数学中广泛采用的术语和记号，然后介绍几个启发微积分基本概念的典型问题.

§1 集合与逻辑记号

集合这一概念描述如下：一个集合是由确定的一些对象汇集的总体. 组成集合的这些对象被称为集合的*元素*. x 是集合 E 的元素这件事，用记号表示为

$$x \in E \text{（读作：} x \text{ 属于 } E\text{）；}$$

y 不是集合 E 的元素这件事记为

$$y \notin E \text{（读作：} y \text{ 不属于 } E\text{）.}$$

如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素，那么我们就说 E 是 F 的子集合，记为

$$E \subset F \text{（读作：} E \text{ 包含于 } F\text{）} ①$$

或者

$$F \supset E \text{（读作：} F \text{ 包含 } E\text{）.}$$

如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素并且集合 F 的任何元素也都是集合 E 的元素(即 $E \subset F$ 并且 $F \subset E$)，那么我们就说集合 E 与集合 F 相等，记为

$$E = F.$$

为了方便起见，我们引入一个不含任何元素的集合——空集合 $\varnothing$. 我们还约定：空集合 $\varnothing$ 是任何集合 E 的子集合，即

$$\varnothing \subset E.$$

---

① 有些作者用符号“$\subset$”表示“真包含”关系，但在现代数学文献中广泛采用的是另一种约定：“$\subset$”表示一般的包含关系（不限于真包含）. 本书采用这后一种约定.这样约定之后，当需要表示“真包含”关系时，反而要用稍累赘的记号“$\subsetneq$”，但毕竟需要这样做的情形是很少的，没有带来多少不方便.

全体自然数的集合，全体整数的集合，全体有理数的集合，全体实数的集合和全体复数的集合都是最常遇到的集合，我们约定分别用空体字母$\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$和$\mathbb{C}$来表示这些集合，即

$\mathbb{N}$　表示全体自然数的集合；

$\mathbb{Z}$　表示全体整数的集合；

$\mathbb{Q}$　表示全体有理数的集合；

$\mathbb{R}$　表示全体实数的集合；

$\mathbb{C}$　表示全体复数的集合.

我们还把非负整数、非负有理数和非负实数的集合分别记为$\mathbb{Z}_+$，$\mathbb{Q}_+$和$\mathbb{R}_+$。显然有

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

和

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}_+\subset\mathbb{Q}_+\subset\mathbb{R}_+.$$

集合可以通过罗列其元素或者指出其元素应满足的条件等办法来给出．例如：

$$\{1,2,3,4,5\}$$

表示由1，2，3，4，5这五个数字组成的集合，而

$$\{x\in\mathbb{R}\mid x>3\}$$

表示由大于3的实数组成的集合．又如：2的平方根的集合可以记为

$$\{x\in\mathbb{R}\mid x^2=2\}$$

或者

$$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}.$$

在本课程中经常要遇到以下形式的实数集的子集：

闭区间

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\};$$

开区间

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\};$$

左闭右开区间